Insiemi e simboli logici. Funzioni. Il principio d'induzione.

Biagio Raucci

Sommario

In questo primo capitolo affronteremo il concetto di **insieme**. Dopo aver introdotto il concetto di intersezione, unione e complemento affronteremo, brevemente, alcuni aspetti sui ragionamenti matematici. Sarà, successivamente, introdotto il concetto importantissimo di funzione o applicazione. Nel corso di questo capitolo verrà introdotto anche l'insieme dei numeri reali.

Key words: Insieme, definizioni, principio d'induzione, simboli logici.
VERS: 1.0

1 Il concetto d'insieme

Nella lingua italiana esistono dei sostantivi, come squadra, gregge, flotta, scolaresca, settimana che in grammatica si dicono **nomi collettivi**, perchè pur essendo singolari stanno ad indicare una pluralità di *oggetti*. Nel linguaggio matematico per indicare un ente costituito da una pluralità di oggetti si adopera il termine **insieme**. Il concetto di insieme è **primitivo** ed **intuitivo**.

- "primitivo" perché non può essere derivabile da concetti più elementari,
- "intuitivo" perché nasce spontaneamente nella nostra mente ed ivi ne è sepolto.

Approfondimento — Georg Cantor sviluppò la teoria degli insiemi in una serie di memorie pubblicate tra il 1878 e il 1883 e inizia a descrivere un insieme come:

Per insieme intendiamo ogni riunione, raccolta, aggregato, classe di oggetti determinati della nostra intuizione o del nostro pensiero, ben distinti tra loro e che vengono chiamati elementi dell'insieme.

Email address: `raucci@gmail.com` (Biagio Raucci).

La critica alla precedente proposizione è facile e quasi scontata; per definire un *insieme* si usano vocaboli come riunione, raccolta, aggregato, classe, intesi nel loro significato comune, vocaboli che, certamente, non sono né più chiari né meno chiari della parola insieme.
É noto che la dottrina aristotelica della definizione concerne l'**esistenza sostanziale**. Dice Aristotele: "l'essenza sostanziale appartiene alle cose di cui c'è definizione. E non c'è definizione quando c'è un termine che si riferisce a a qualcosa; in qusto caso, tutte le parole sarebbero definizioni perchè le parole indicano sempre qualcosa. Ma c'è definizione solo quando il termine significa qualcosa di primario, il che accade quando si parla di cose che non possono essere predicati di altre cose". É evidente che la precedente definizione cantoriana di un insieme non è accettabile in base alla concezione aristotelica della definizione a meno che non si voglia parlare di insieme come di "qualcosa di primario" nel qual caso il termine insieme è già una definizione. □

Un insieme viene indicato solitamente con le lettere maiuscole dell'alfabeto: A, B, C, Z, X ... e deve essere univocamente determinato. Una squadra è un *insieme* costituito da giocatori, un gregge è un *insieme* costituito da pecore, una flotta è un *insieme* costituito da navi. Un ulteriore esempio è l'insieme costituito da tutti i giocatori che giocano in Italia, da non confondersi con quello costituito da tutte le squadre di calcio esistenti in Italia: si tratta di due insiemi diversi, perchè gli *oggetti* dell'uno non sono gli *oggetti* dell'altro (una squadra di calcio è costituita da calciatori, ma non è un calciatore).
Gli oggetti che costituiscono un dato insieme A si dicono **elementi** di A e vengono indicati, solitamente, con le lettere minuscole dell'alfabeto; si dice pure che tali oggetti **appartengono** ad A. Per indicare che un dato oggetto x appartiene ad A si usa la scrittura

$$x \in A.$$

Per dire che x **non appartiene** ad A, invece, si usa il simbolo:

$$x \notin A.$$

Il simbolo $\in$ si legge *appartenente* mentre $\notin$ si legge *non appartenente*.
É utile prendere in considerazione insiemi costituiti da *un solo elemento*, anche se ciò contrasta col concetto di pluralità; un insieme siffatto si chiama **singleton**. É risultato altresì opportuno, pur essendo contraddittorio, considerare l'insieme *privo di elementi*, che si chiama **insieme vuoto**, e si denota col simbolo $\emptyset$.
Un insieme può essere definito nei seguenti modi:

(1) in **forma tabulare** o **per elencazione**: vengono elencati tutti gli elementi, in tal caso la convenzione comune è quella di scrivere l'elenco degli elementi tra parentesi graffe separati da virgole, ad esempio:

$$F = \{\text{rosa, giglio, geranio}\}$$

questo tipo di definizione è utilizzabile solo nel caso di *insiemi finiti*, per gli *insiemi infiniti* si fa talvolta uso di puntini di sospensione laddove si ritiene che è evidente il modo in cui sono stati scelti gli elementi, ad esempio:

$$P = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$$

(2) per **caratteristica** o **in estensione**: come l'insieme di tutti gli oggetti che verificano una determinata proprietà. In tal caso si usa la scrittura $I = \{x : P(x)\}$ [1] dove al posto di $P(x)$ viene descritta una particolare proprietà. Ad esempio:

$$F = \{x : x \text{ è un fiore}\}$$

oppure

$$P = \{x : x \text{ è pari}\}$$

Per indicare alcuni insiemi che si adoperano frequentemente, sono state scelte delle lettere una volta per tutte. In particolare l'insieme dei *numeri naturali*

$$\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

viene indicato con $\mathbb{N}$; l'insieme costituito, invece, dai numeri naturali e dal numero 0 si denota con $\mathbb{N}_0$; l'insieme dei *numeri relativi*

$$\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \ldots\}$$

si denota con la lettere $\mathbb{Z}$. Nel corso di queste note avremo modo d'introdurre altri insiemi particolari.

2 L'inclusione. Operazioni tra insiemi: intersezione, unione, complemento.

Definizione 1 *Siano A e B insiemi. Se ogni elemento di B appartiene anche ad A, ciò si esprime scrivendo:*

$$B \subseteq A \quad \textit{oppure} \quad A \supseteq B. \tag{1}$$

*Si dice allora che l'insieme B è **contenuto** (o **incluso**) in A, oppure che A **contiene** (o **include**) B, oppure ancora che B è un **sottoinsieme** (o una **parte**) di A.*
Si conviene che l'insieme vuoto sia contenuto in qualunque insieme.

[1] Che si legge nel modo seguente: I è l'insieme costituito da tutte le variabili x che godono della proprietà $P(x)$.

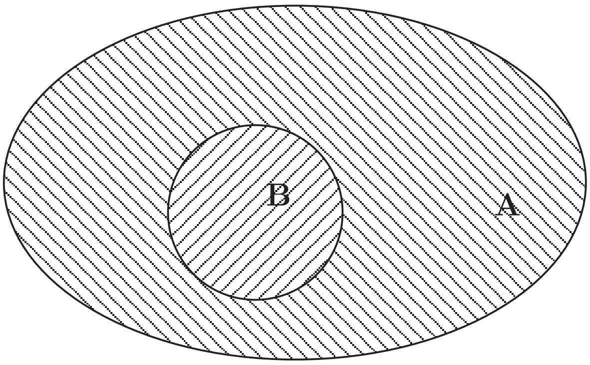

Figura 1. Diagramma di Eulero-Venn per l'inclusione.

In figura 1 sono rappresentati due insiemi A e B soddisfacenti alla (1). Si noti che nel linguaggio matematico *ogni insieme è una parte di se stesso*. Se risulta simultaneamente B contenuto in A e A contenuto in B, ciò vuol dire che gli insiemi A e B hanno gli stessi elementi, i.e. sono uguali $A = B$.
Nel caso $B \subseteq A$, se i due insiemi non coincidono e si vuole evidenziare tale circostanza, in luogo della (1) si scrive:

$$B \subset A \quad \text{oppure} \quad A \supset B.$$

Si dice allora che B è un sottoinsieme **proprio** (o una parte **propria**) di A, oppure si aggiunge alle parole *contenuto, incluso*, la parola **strettamente**.
Se l'insieme B **non è contenuto** in A si scriverà:

$$B \nsubseteq A \quad \text{oppure} \quad A \nsupseteq B. \tag{2}$$

Definizione 2 *Siano A e B insiemi. Si chiama **intersezione** di A e B, e si denota col simbolo:*

$$A \cap B \qquad (\textit{leggasi } A \textit{ intersezione } B)$$

linsieme costituito dagli oggetti che appartengono simultaneamente ad A e a B.
*Se A e B non hanno elementi in comune, i.e. se $A \cap B = \emptyset$, gli insiemi A e B si dicono **disgiunti**.*

Esempio 1 *Con riferimento ai numeri naturali, se A è l'insieme dei numeri divisibili per 3 e B è l'insieme dei numeri divisibili per 4, l'insieme $A \cap B$ è costituito dai numeri divisibili sia per 3 che per 4, i.e. dai numeri divisibili per 12.*

Cogliamo l'occasione per evidenziare una sfumatura di linguaggio. Detto C l'insieme dei numeri naturali divisibili per 24, gli elementi di C sono an-

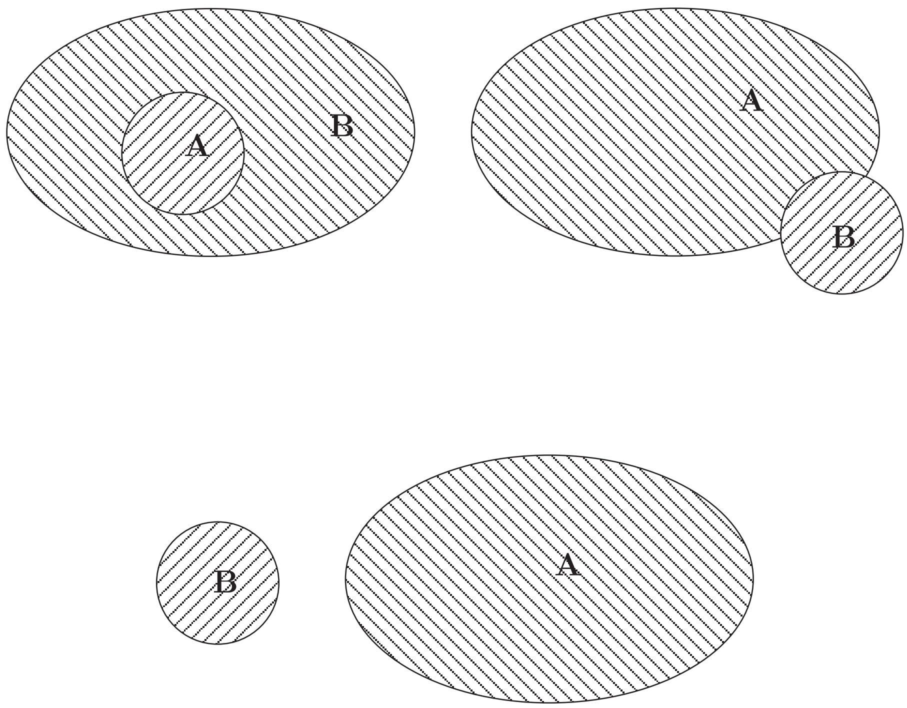

Figura 2. Diagramma di Eulero-Venn che esprime la (2).

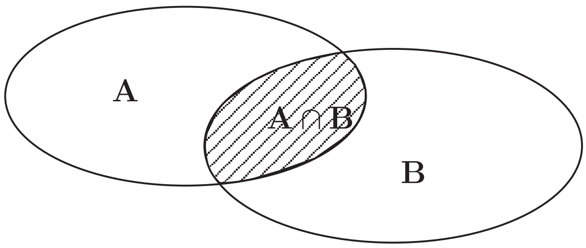

Figura 3. Diagramma di Eulero-Venn per l'intersezione di due insiemi.

che divisibili per 12, e quindi C è costituito *da* numeri divisibili per 12, ma non *dai* numeri divisibili per 12 (perchè non tutti i numeri divisibili per 12 appartengono a C). In generale, un insieme

$$C \subset A \cap B$$

è costituito *da* oggetti che appartengono sia ad A che a B, ma non *dagli* oggetti che appartengono sia ad A che a B.

Definizione 3 *Siano A e B insiemi. Si chiama* ***unione*** *di A e B e si denota col simbolo:*

$$A \cup B \qquad (\textit{leggasi } A \textit{ unione } B)$$

l'insieme costituito dagli oggetti che appartengono ad almeno uno degli insiemi A e B (vedi figura 4).

Definizione 4 *Siano A e B insiemi. Si chiama* ***complemento di*** B ***rispetto***

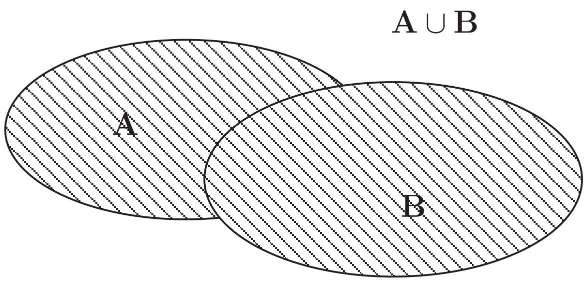

Figura 4. Diagramma di Eulero-Venn per l'unione di due insiemi.

ad *A, e si denota col simbolo*

$$A\backslash B = A - B \qquad \textit{(leggasi A meno B)}$$

l'insieme costituito dagli oggetti che appartengono ad A ma non appartengono a B (vedi figura 5).

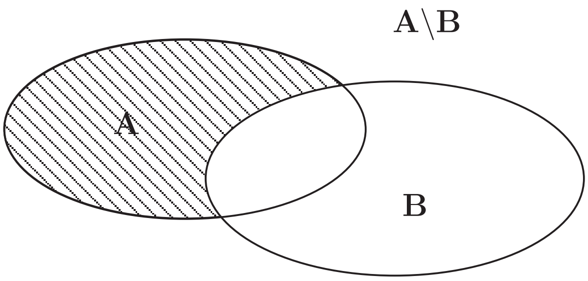

Figura 5. Diagramma di Eulero-Venn per la differenza di due insiemi.

L'insieme $A\backslash B$ viene anche chiamato **differenza** degli insiemi A e B.
Se $A \subset B$, l'insieme $B\backslash A$ si chiama *complementare* di A rispetto a B e lo si indica anche con

$$\complement_B A.$$

Sussistono inoltre le seguenti relazioni:

$$A \cup A = A \qquad , \qquad A \cap A = A.$$

$$A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A \qquad \text{(proprietà commutativa).}$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

(proprietà associativa)

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

(proprietà distributiva)

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

3 Simboli logici

Spesso intercorrono locuzioni del tipo:

qualunque sia $x \in A \ldots$, qualunque siano $x, y \in A$ tali che ...
esiste almeno un $x \in A$ tale che ..., esistono $x, y \in A$ tali che ...;
esiste un unico $x \in A$ tale che ....

Per rendere più sintetica la scrittura, solitamente tali locuzioni si esprimono utilizzando i seguenti simboli:

$\forall \longleftrightarrow$ qualunque sia ..., per ogni...

$\exists \longleftrightarrow$ esiste almeno un ..., esistono ...

$\nexists \longleftrightarrow$ non esiste alcun ..., non esistono ...

$\exists! \longleftrightarrow$ esiste un unico ..., esiste uno ed uno solo ...

$: \longleftrightarrow$ tale che ..., tali che ....

Esempio 2 *Con riferimento agli insiemi A e B ed al numero naturale n, le scritture:*

$$\exists x \in B : x \notin A \quad , \quad \exists m \in \mathbb{N} : n = 2m \quad , \quad \exists m \in \mathbb{N} : n = 3m$$

significano rispettivamente: l'insieme B non è contenuto in A, il numero n è pari, il numero n è divisibile per 3.

4 Note sui ragionamenti matematici

4.1 Implicazioni. Controesempi.

Dato un insieme non vuoto S, una proprietà $\wp$ si dice **definita in** S quando per ogni $x \in S$ "ha senso" dire che x ha la proprietà $\wp$ (indipendentemente dal fatto che x abbia o non tale proprietà). Ad esempio una proprietà $\wp$ definita in $\mathbb{N}$ è la divisibilità per 8, un'altra proprietà $\wp'$ definita in $\mathbb{N}$ è la divisibilità per 4; la proposizione "*il numero n è equilatero*" non esprime una proprietà definita in $\mathbb{N}$.
Dette $\wp$ e $\wp'$ due proprietà definite in S, per ciascun x di S denotiamo con $\wp_x$ e $\wp'_x$ rispettivamente le proposizioni:

$$x \text{ ha la proprietà } \wp \text{ ; x ha la proprietà } \wp'. \tag{3}$$

Nel caso dei precedenti esempi dove $S = \mathbb{N}$, le proposizioni $\wp_x$ e $\wp'_x$ sono rispettivamente:

$$\wp_x = (x \text{ è divisibile per } 8) \quad , \quad \wp'_x = (x \text{ è divisibile per } 4)\,. \tag{4}$$

Naturalmente ciascuna delle proposizioni (3) può essere vera o falsa.

Definizione 5 *Supposto che esista almeno un $x \in S$ avente la proprietà $\wp$, per affermare che nell'insieme S la $\wp'_x$ è conseguenza della $\wp_x$, si usa la notazione:*

$$\wp_x \overset{S}{\Rightarrow} \wp'_x \tag{5}$$

che si legge come " $\wp_x$ implica $\wp'_x$ in S ".

La (5) esprime in forma sintetica l'affermazione seguente: " ogni elemento x di S avente la proprietà $\wp$ ha pure la proprietà $\wp'$ ".
La (5), quando è vera, rappresenta l'enunciato di un teorema, del quale $\wp_x$ è l'ipotesi e $\wp'_x$ è la tesi.
Per affermare che la $\wp'_x$ non è conseguenza della $\wp_x$, i.e. che fra gli elementi di S aventi la proprietà $\wp$ ne siste almeno uno che non ha la proprietà $\wp'$, si usa la notazione:

$$\wp_x \overset{S}{\not\Rightarrow} \wp'_x. \tag{6}$$

che va letto come " $\wp_x$ non implica $\wp'_x$ in S ".
La (5) viene detta una **implicazione**, la (6) una **non implicazione**.
Per dimostrare che è vera la non implicazione (6), in genere si procede determinando un $x \in S$ che ha la proprietà $\wp$ ma non ha la proprietà $\wp'$. Un siffatto elemento x, poichè smentisce la (5), si chiama un **controesempio** della (5).

Definizione 6 *Qualora sussistano, simultaneamente, la (5) e implicazione opposta (i.e. $\wp'_x$ implica $\wp_x$ in S), si dice che $\wp_x$ e $\wp'_x$, sono* ***equivalenti*** *in S, e si scrive:*

$$\wp_x \overset{S}{\Leftrightarrow} \wp'_x$$

4.2 Ragionamento per assurdo. Dimostrazione per induzione.

Per dimostrare che la (5) è vera, talvolta si utilizza il cosiddetto ragionamento per *assurdo*, che consente nel *negare la tesi*, i.e. ammettere che *esista un* $x \in S$ *tale che sia vera la* $\wp_x$ e si abbia:

$$\text{è falsa la proposizione } \wp'_{\mathrm{x}}. \tag{7}$$

In base alla (7) si effettua un opportuno ragionamento, che conduce a contraddire l'ipotesi oppure ad ottenere una proposizione palesemente falsa (in entrambi i casi si dice che si è pervenuti "*ad un assurdo*"). Il teorema allora è dimostrato.

Talvolta per dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N}$ è vera una certa proposizione p_n si adopera il cosiddetto procedimento **induttivo**, che consiste nell'applicare il seguente:

Definizione 7 (Principio d'induzione) — *Per ogni $n \in N$ sia p_n una proposizione. Siano soddisfatte le seguenti condizioni:*

(1) p_1 è vera;
(2) qualunque sia $k \in \mathbb{N}$, supponendo vera la p_k, si può dedurre che è vera anche la p_{k+1}.

Allora p_n è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Prima di indicare un semplice esempio di come si possa, con il principio d'induzione, dimostrare una data proposizione, vogliamo introdurre dei simboli usati, spessissimo, in letteratura:

- **sommatoria**: La sommatoria è un operatore matematico che abbrevia in una notazione sintetica, la somma di un certo numero di addendi. Risulta, ad esempio:

$$1 + 2 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i, \qquad \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n+1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i+1}.$$

- **produttoria**: La produttoria è un operatore matematico che abbrevia in una notazione sintetica, il prodotto di un certo numero di fattori. Risulta, ad esempio:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2n+1} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2i+1}$$

Esempio 3 *Dimostriamo, per **induzione**, che:*

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{8}$$

Un aneddoto, forse vero forse verosimile, racconta che l'insegnante di Johann Carl Friedrich Gauss per mettere a tacere l'allievo gli ordinò di fare la somma di tutti i numeri da 1 a 100. Poco dopo, sorprendendo tutti, il giovanissimo Carl diede la risposta esatta, essendosi accorto che sommando i numeri tra di loro opposti si ottiene sempre la stessa somma: $1 + 100 = 101$, $2 + 99 = 101$, $3 + 98 = 101$, *ecc.*
Infatti:

$$\begin{array}{rcrcrcccr}
1 & + & 2 & + & 3 & + & \ldots & + & 100 \\
100 & + & 99 & + & 98 & + & \ldots & + & 1 \\
\hline
101 & + & 101 & + & 101 & + & \ldots & + & 101
\end{array}$$

ovvero 100 *volte* 101 *è il doppio della somma richiesta, i.e.*

$$2 \cdot (1 + 2 + \ldots + 100) = 100 \cdot 101$$

donde, in generale, la (8).
Proviamo, però, per induzione, che la (8) sia vera $\forall n \in \mathbb{N}$.
La (8) è vera per $n = 1$. *Supponiamo che sia vera per* $n = k$ *e mostriamo che è possibile ricavare la veridicità della (8) anche per* $n = k + 1$.
Per ipotesi, allora,

$$1 + 2 + \ldots + k = \frac{k\,(k+1)}{2}.$$

Aggiungendo, a quest'ultima equazione, $k + 1$ *al primo e al secondo membro, si ha:*

$$1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = \frac{k\,(k+1)}{2} + (k+1)$$

ovvero, essendo

$$\frac{k\,(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k\,(k+1) + 2\,(k+1)}{2} = \frac{(k+1)\,(k+2)}{2}$$

per induzione la (8) è dimostrata $\forall n \in \mathbb{N}$.

5 Funzioni o applicazioni

5.1 Premesse

Data l'enorme importanza del concetto di *funzione* in matematica, ci proponiamo di illustrare e definire con generalità e rigore questo concetto e, a questo scopo, premettiamo alcune osservazioni.
In molti fenomeni certe grandezze *variano*, i.e. sono suscettibili di assumere diversi valori numerici; mentre altre possono conservare uno stesso valore numerico.
Si chiama *grandezza variabile*, o **variabile**, una grandezza che può assumere diversi valori numerici.
Una grandezza i cui valori numerici non cambiano è detta *grandezza costante*, o **costante**.
In seguito indicheremo generalmente le variabili con le lettere $x, y, z, \ldots$ e le costanti con le lettere $a, b, c, \ldots$.

Prima di continuare vogliamo, brevemente, introdurre alcune costanti "speciali" che avremo modo di usare, spesso, di seguito:

- π (**pi greca**) — π è un numero irrazionale, non può cioè essere scritto come quoziente di due interi. Questo è stato provato nel 1761 da Johann Heinrich Lambert. Inoltre, è un numero trascendente (ovvero non è un numero algebrico): questo fatto è stato provato da Ferdinand von Lindemann nel 1882. Questo significa che non ci sono polinomi con coefficienti interi o razionali di cui π è radice. Di conseguenza, è impossibile esprimere π usando un numero finito di interi, di frazioni e delle loro radici. Il valore approssimato di $\pi \simeq 3,1415926\ldots$.
- e (**numero di Nepero**) — La costante matematica e è la base della funzione logaritmo naturale. Essa è approssimativamente uguale a $2.7182818284\ldots$.

5.2 Definizione di applicazione o funzione

Definizione 8 *Dati due insiemi non vuoti A e B, si chiama* ***applicazione*** *o* ***funzione*** *(univoca) di A in B una qualsiasi legge che fa corrispondere ad ogni elemento x di A, uno e un solo elemento y di B.*

Dare una funzione di A in B signiica quindi assegnare due insiemi, A e B, e un procedimento che permette di associare ad *ogni* elemento di A *uno e un solo* elemento di B.
Se indichiamo con f l'applicazione (o funzione) di A in B, l'elemento y di B, che la funzione associa all'elemento x di A, si indica con:

$$y = f(x),$$

o anche semplicemente con $f(x)$, e si legge "*effe di x*".
Per indicare che f è un'applicazione o funzione di A in B, si adoperano le scritture:

$$f : A \to B \qquad \text{oppure} \qquad A \xrightarrow{f} B$$

o anche:

$$f : \{x \mapsto f(x) : A \to B\},$$

o, infine:

$$f : x \in A \mapsto f(x) \in B,$$

o, più semplicemente, quando non vi sia luogo ad equivoco:

$$x \mapsto f(x).$$

Si dice che l'applicazione f è definita in A e che prende i suoi valori in B; la lettera x, che denota un generico elemento di A, si chiama **variabile** nell'insieme A; $f(x)$ si chiama il **valore** della f in x o, anche, l'**immagine** di x, per mezzo della f.
Dunque **ogni** elemento $x \in A$ ha la sua immagine in B mediante la f.
Si osservi però che ogni elemento di B non è necessariamente l'immagine di

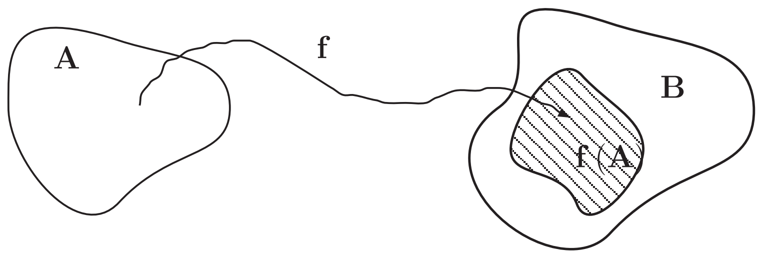

Figura 6. Applicazione f tra A e B.

un elemento di A, i.e. vi possono essere elementi di B che non sono immagini di alcun elemento di A. Ne segue, almeno in generale, che l'insieme delle immagini, che indichiamo con $f(A)$ (vedi figura 6), è un sottoinsieme proprio di B che chiameremo *immagine di A in B, tramite f.*
L'insieme $f(A)$ si chiama anche **codominio** della f, mentre A si dice **insieme di definizione** o **dominio** della f stessa.
Evidentemente risulta:

$$f(A) \subseteq B.$$

Quando si parla di corrispondenze definite in un insieme A, naturalmente si ritiene sottinteso che A non sia l'insieme vuoto.
Sia

$$f : X \to Y$$

se $B \subseteq Y$ si chiama **immagine inversa di** B **mediante** f il sottoinsieme di X:

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$$

i.e. $f^{-1}(B)$ contiene tutti gli elementi di X, se esistono, la cui immagine è in B. L'insieme $f^{-1}(B)$ si chiama anche **controimmagine di** B mediante f.

5.3 Applicazioni suriettive, iniettive e biunivoche

Definizione 9 (Funzione suriettiva) *Una applicazione f di A in B si dice suriettiva quando è:*

$$f(A) = B,$$

i.e. quando ogni elemento di B è immagine di almeno un elemento di A.

In simboli:

$$\forall y \in B, \exists x \in A : f(x) = y.$$

Se f è suriettiva, si dice allora che f applica A su B.

Definizione 10 (Funzione iniettiva) *Una applicazione f di A in B si dice iniettiva se ad elementi distinti di A fa corrispondere elementi distinti di B.*

In simboli:

$$\forall x_1 \in A, \forall x_2 \in A \text{ con } x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Quindi, una applicazione è iniettiva se ogni elemento di B è immagine di "al più" un elemento di A[2].

Definizione 11 (Funzione biunivoca) *Una funzione f di A in B si dice biiettiva o biunivoca se essa è iniettiva e suriettiva.*

In simboli:

$$\forall y \in B, \exists! x \in A : f(x) = y.$$

Quindi f è una biiezione di A in B se risulta:

$$f(A) = B$$

e

$$\text{da } x \neq x' \text{ segue: } f(x) \neq f(x')$$

qualunque siano gli elementi x e x' di A.

Osservazione 1 *La f, in quanto applicazione, fa corrispondere ad **ogni** elemento di A uno e un solo elemento di B; inoltre, poichè la f è suriettiva, **ogni** elemento di B è immagine di almeno un elemento di A; infine, poichè f è iniettiva, ogni elemento di B è immagine di un **solo** elemento di A.*

Possiamo allora anche dire che:

Definizione 12 *Si dice che fra gli elementi di due insiemi A e B, non vuoti, intercorre una **corrispondenza biunivoca** (o biiezione) quando esiste una legge che fa corrispondere ad ogni elemento di A uno e un solo elemento di B, e viceversa, ogni elemento di B è il corrispondente di uno e un solo elemento di A.*

Esempio 4 *Sia A l'insieme dei numeri naturali dispari e sia B l'insieme dei numeri naturali pari diversi da zero, i.e.:*

$$A = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}; \qquad B = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$$

e consideriamo la seguente legge:

"Ad ogni numero di A si faccia corrispondere il successivo".

Questa legge, evidentemente, pone fra gli elementi di A e B una corrispondenza biunivoca.

[2] Quindi non si esclude che in B possano esserci elementi che non risultano essere immagine di alcun elemento di A

Osservazione 2 *L'insieme dei numeri pari P si ottiene dall'insieme $\mathbb{N}$ attraverso la funzione biettiva:*

$$f : n \in \mathbb{N} \to 2n \in P.$$

L'insieme dei numeri dispari D si ottiene dall'insieme $\mathbb{N}$ attraverso la funzione biettiva:

$$f : n \in \mathbb{N} \to 2n + 1 \in D.$$

5.4 Funzione composta

Dati tre insiemi X, Y e T e due funzioni:

$$f : X \to Y \qquad g : Y \to T,$$

preso $x \in X$, consideriamo $f(x) \in Y$: a quest'ultimo elemento applichiamo la funzione g; si ottiene l'elemento $g(f(x)) \in T$. Abbiamo, in tal modo, costruito una nuova funzione, questa volta di X in T, che si indica nel seguente modo:

$$g \circ f : X \to T$$

e si chiama **funzione composta** di f e g.

Esempio 5 *Consideriamo le due funzioni:*

$$f : x \in \mathbb{Z} \to x + 6 \in \mathbb{Z}$$

$$g : x \in \mathbb{Z} \to x^3 \in \mathbb{Z}$$

si ha:

$$g \circ f : x \in \mathbb{Z} \to (x + 6)^3 \in \mathbb{Z}$$
$$f \circ g : x \in \mathbb{Z} \to x^3 + 6 \in \mathbb{Z}$$

6 Relazioni binarie

Un insieme è un *aggregato caotico* di elementi, non interessa i.e. l'ordine con cui i suoi elementi sono elencati. Per esempio se un insieme contiene due soli elementi a, b non ha senso distinguere l'insieme $\{a, b\}$ dall'insieme $\{b, a\}$ se però si vuole tener conto dell'ordine bisogna introdurre la *nozione di coppia.* Pertanto se a, b sono elementi, non necessariamente distinti, di un insieme X chiamiamo **coppia ordinata**, di prima componente a e di seconda componente b, il simbolo (a, b).

Due coppie (a, b) e (a', b') sono uguali se e solo se $a = a'$ e $b = b'$. Quindi se $a \neq b$ risulta

$$(a, b) \neq (b, a)\,.$$

L'insieme delle coppie ordinate di elementi di un insieme non vuoto X si indica con il simbolo $X \times X$ o anche X^2 e si chiama *prodotto caresiano.*

Definizione 13 *Dati due insiemi A e B, si chiama loro insieme prodotto (o* ***prodotto cartesiano****), e si indica con $A \times B$, l'insieme delle* ***coppie ordinate*** *(a, b), con $a \in A$ e $b \in B$; in simboli:*

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \ \text{ e } b \in B\}$$

Ogni qualvolta si fissa un sottoinsieme non vuoto $R \subseteq X \times X$ si dice che è assegnata una **relazione binaria** che, con abuso di linguaggio, indichiamo con R. Diciamo che:

$$\begin{array}{ll}
R \text{ è riflessiva} & \Leftrightarrow \ll \forall x \in X, (x, x) \in R \gg \\
R \text{ è simmetrica} & \Leftrightarrow \ll (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R \gg \\
R \text{ è transitiva} & \Leftrightarrow \ll (x, y) \in R, (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R \gg \\
R \text{ è antisimmetrica} & \Leftrightarrow \ll (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R \gg
\end{array}$$

Una relazione binaria R in X che sia transitiva e antisimmetrica si dice **relazione d'ordine** e l'insieme X, dotato di tale relazione, si chiama **insieme ordinato**. Prendendo spunto dalla notazione adottata per la usuale relazione d'ordine tra grandezze numeriche per indicare che x è in relazione R con y, scriveremo:

$$x < y \quad (R)$$

o più semplicemente

$$x < y$$

se non c'è possibilità di equivoco. La precedente scrittura si legge : " *x precede y nella relazione R*" o, più semplicemente, " *x è minore di y*".
Diremo che una relazione d'ordine è **totale** se comunque si fissi una coppia (x, y) con $x \neq y$ vale una delle due relazioni:

$$x < y \qquad , \qquad y < x.$$

Un insieme in cui sia assegnata una relazione d'ordine totale dicesi **totalmente ordinato**.

7 Massimo, minimo, estremo inferiore e superiore.

Sia S un insieme ordinato e X un sottoinsieme di S. Se esiste un elemento $m' \in X$ tale che

$$\forall x \in X, \qquad m' \leqslant x$$

si dice che m' è il **minimo** di X e si scrive:

$$m' = \min X.$$

Analogamente, se esiste un elemento $m'' \in X$ tale che

$$\forall x \in X, \qquad x \leqslant m''$$

si dice che m'' è il **massimo** di X e si scrive:

$$m'' = \max X.$$

É facile verificare che il massimo (e il minimo) di X, se esiste, è unico.
Supponiamo ora che esista un elemento $a \in S$ tale che

$$\forall x \in X \qquad a \leqslant x.$$

L'insieme X si dice allora **limitato inferiormente** e a è detto **minorante di** X. Se X è dotato di minimo, X è ovviamente limitato inferiormente. Il massimo, se esiste, dell'insieme dei minoranti di X prende il nome di **estremo inferiore** di X e si indica col simbolo

$$\inf X.$$

Analogamente se esiste un elemento $b \in S$ tale che

$$\forall x \in X \qquad x \leqslant b$$

si dice che X p **limitato superiormente** e che b è un **maggiorante** di X. Il minimo, se esiste, dell'insieme dei maggioranti di X si chiama **estremo superiore** di X e si indica col simbolo

$$\sup X.$$

É evidente che se X ammette massimo (o minimo) si ha

$$\sup X = \max X \qquad (\inf X = \min X)\,.$$

8 Insiemi di numeri reali

Abbiamo, precedentemente, introdotto alcuni insiemi "speciali": l'insieme dei numeri naturali, $\mathbb{N}$, quello degli interi $\mathbb{Z}$. A partire da quest'ultimo possiamo, brevemente, introdurre un nuovo insieme, quello dei *numeri razionali*. L'insieme dei razionali si indica con $\mathbb{Q}$ ed è definito nel modo seguente:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}.$$

Risulta:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

É possibile costruire, partendo dall'insieme dei numeri razionali, un'ulteriore insieme (l'insieme dei **numeri reali**) che è, in un certo senso, un'estensione dell'insieme $\mathbb{Q}$ stesso.
Un modo, però, diverso di definire i numeri reali (e, quindi, l'insieme dei numeri reali stessi che, indicheremo con $\mathbb{R}$) consiste nel pensare ad $\mathbb{R}$ come ad un insieme in cui s'introducono delle operazioni interne, dette somma e prodotto, ed una relazione d'ordine totale le quali verifichino una lista di *enunciati primitivi* detti assiomi. Tale **metodo assiomatico** presenta il vantaggio di chiarire, una volta per tutte, quali sono le "regole del gioco" (gli assiomi) che devono costituire gli ingredienti attraverso cui dedurre tutte le proprietà (i teoremi).
Sia $\mathbb{R}$ un insieme.
Assumeremo che siano verificati i seguenti assiomi:

(1) — sono definite, in $\mathbb{R}$, due operazioni:

$$+ : (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to (a + b) \in \mathbb{R}$$
$$\cdot \; : (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to (a \cdot b) \in \mathbb{R}$$

dette, rispettivamente, **somma** e **prodotto**, verificanti le seguenti proprietà:
(a) $a + b = b + a \quad , \quad a \cdot b = b \cdot a$ (proprietà commutativa);
(b) $(a + b) + c = a + (b + c)$,
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (proprietà associativa);
(c) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (proprietà distributiva);
(d) esistono due elementi distinti 0 e 1, detti, rispettivamente, *zero* e *uno*, tali che:

$$a + 0 = a, \qquad 1 \cdot a = a \qquad \forall a \in \mathbb{R}$$

(e) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists x' \in \mathbb{R} : x + x' = 0$; x' è detto *opposto* di x e si denota con $-x$;
$\forall x \neq 0, \exists x'' \in \mathbb{R} : x \cdot x'' = 1$; x'' è detto *inverso* di x e si indica con x^{-1}.

L'insieme $\mathbb{R}$, così strutturato, si dice **campo**.

(2) — Esiste, in $\mathbb{R}$, una **relazione d'ordine totale**, $<$, compatibile con le operazioni di somma e prodotto, tale cioè che:

(a) $x < y \Rightarrow \forall z \in \mathbb{R}, x + z < y + z$;

(b) $x < y \Rightarrow \forall z > 0, x \cdot z < y \cdot z$

L'insieme $\mathbb{R}$ si dice **campo ordinato**

(3) — Ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ non vuoto e limitato superiormente è dotato di estremo superiore.

L'insieme $\mathbb{R}$ dicesi allora *campo ordinato completo.*

Definizione 14 *Diremo campo dei numeri reali un qualsiasi campo ordinato completo.*

Usando in modo opportuno gli assiomi su esposti è possibile dimostrare l'unicità dello zero, dell'unità, dell'opposto e dell'inverso.
Possiamo pertanto definire le operazioni di differenza e quoziente nel modo seguente:

$$a - b = a + (-b)$$

e, se $b \neq 0$

$$\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}.$$

Nel seguito considereremo soltanto insiemi i cui elementi sono *numeri reali.*
L'insieme che contiene **tutti** i numeri reali si chiama **continuo lineare** e si indica con la lettere $\mathbb{R}$.
Risulta:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Insiemi di particolare importanza sono i cosiddetti **intervalli limitati**, che si definiscono nel modo seguente:

Definizione 15 *Se a e b sono due numeri reali qualunque, con $a < b$, l'insieme di tutti i numeri reali compresi fra a e b si chiama **intervallo limitato**.*
*I numeri a e b si chiamano gli **estremi** dell'intervallo, e precisamente:*

- *a si chiama **estremo inferiore**;*
- *b si chiama **estremo superiore**.*

*Il numero $b - a$ si chiama **lunghezza dell'intervallo** (o **misura dell'intervallo**), mentre i numeri*

$$\frac{b-a}{2}, \qquad \frac{a+b}{2}$$

*si chiamano rispettivamente il **raggio** ed il **centro** dell'intervallo.*

Se gli estremi a e b si considerano **appartenenti** all'intervallo, esso si dice **chiuso** e si indica con il seguente simbolo:

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$$

nel caso opposto si dice **aperto** e si indica con il simbolo:

$$]a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}\,.$$

Se vi appartiene soltanto l'estremo inferiore a si dice **aperto a destra** e si indica col simbolo

$$[a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$$

se invece vi appartiene soltanto l'estremo superiore b si dice **aperto a sinistra** e si indica con

$$]a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}\,.$$

Gli **intervalli illimitati** si definiscono nel modo seguente:

Definizione 16 (intervallo illimitato a destra) — *Se a è un numero reale qualunque, l'insieme di tutti i numeri reali **non** minori del numero a, si chiama **intervallo illimitato** che ha per estremo inferiore a e per estremo superiore "**più infinito**", e si indica con il simbolo*

$$[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant a\}$$

Si noti che la frase "più infinito" si deve intendere come modo di dire e nulla di più.

Analogamente

Definizione 17 (intervallo illimitato a sinistra) — *Se a è un numero reale qualunque, l'insieme di tutti i numeri reali **non** maggiori del numero a, si chiama **intervallo illimitato** che ha per estremo superiore a e per estremo inferiore "**meno infinito**", e si indica con il simbolo*

$$]-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant a\}$$

Il continuo lineare $\mathbb{R}$ si indica col simbolo $]-\infty,+\infty[$, i.e.

$$\mathbb{R} =]-\infty,+\infty[$$

Osservazione 3 *Il lettore faccia però bene attenzione al fatto che, almeno in generale, un insieme numerico qualunque non è né un intervallo limitato, né un intervallo illimitato.*

Così, ad esempio, l'insieme numerico formato dai reciproci dei numeri naturali, i.e. dai numeri:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$$

non è un intervallo. Così pure non è un intervallo l'insieme formato da tutti i numeri naturali.

Esiste una corrispondenza biunivoca fra i numeri reali ed i punti di una retta sulla quale sia fissato un sistema di ascisse.
Questa corrispondenza biunivoca ci permette di dare un significato ed un contenuto geometrico a tutte le nozioni che s'introducono per gli insiemi di numeri reali; anzi, se si vuole, queste nozioni potranno essere espresse con linguaggio geometrico, parlando di un punto x in luogo di un numero reale x; di insiemi di punti x che godono di una determinata proprietà, in luogo di insiemi di numeri reali che godono di quella proprietà, etc.
Agli intervalli limitati, sopra definiti, vengono a corrispondere, sulla retta, dei **segmenti**, contenenti o no i punti estremi; agli intervalli illimitati corrispondono delle **semirette**, ed, infine, al continuo lineare viene a corrispondere l'**intera retta**.

9 Prime proprietà dei numeri reali

Dagli assiomi precedentemente introdotti si deducono tutte le classiche regole di calcolo. Ci limiteremo qui ad elencarne alcune.

9.0.1 Moltiplicazione per lo zero

$$a \cdot 0 = 0.$$

Infatti:

$$a \cdot 0 = a \cdot 0 + a - a = a\,(1 + 0) - a = a \cdot 1 - a = a - a = 0$$

9.0.2 Legge di annullamento del prodotto

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \quad \text{oppure} \quad b = 0.$$

Tenendo conto della proprietà prima dimostrata basterà provare che:

$$a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \quad \text{oppure} \quad b = 0.$$

Se $a = b = 0$ la cosa segue subito dalla proprietà prima vista. Sia allora $a \neq 0$; si ha, tenendo conto che $b \cdot a = a \cdot b = 0$:

$$b = (b \cdot a) \cdot a^{-1} = 0 \cdot a^{-1} = 0.$$

9.0.3 Moltiplicazione per -1

$$(-1) \cdot a = -a$$

Infatti:

$$a + (-1) \cdot a = a \cdot (1 - 1) = a \cdot 0 = 0.$$

Quindi, per l'unicità dell'opposto, si ha:

$$(-1) \cdot a = -a$$

Da quest'ultima relazione si ricava, banalmente, che:

$$-(a + b) = -a - b; \quad (-a) \cdot b = -a \cdot b; \quad (-a) \cdot (-b) = a \cdot b.$$

Risulta:

$$a > 0 \Leftrightarrow -a < 0$$

$$a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0 \text{ dove } a^2 = a \cdot a$$

$$a > 0 \Leftrightarrow a^{-1} > 0$$

$$a < b, c < 0 \Rightarrow ac > bc$$

$$a, b < 0 \Rightarrow ab > 0$$

$$a < 0, b > 0 \Rightarrow ab < 0$$

$$0 < a < b \Rightarrow a^{-1} > b^{-1}.$$

A Alfabeto greco

Brevemente elenchiamo le lettere (minuscole/maiuscole) dell'alfabeto greco:

$$\begin{array}{ccc}
\alpha/\mathrm{A} & \rightarrow & \text{alfa} \\
\beta/\mathrm{B} & \rightarrow & \text{beta} \\
\gamma/\Gamma & \rightarrow & \text{gamma} \\
\delta/\Delta & \rightarrow & \text{delta} \\
\varepsilon/\mathrm{E} & \rightarrow & \text{epsilon} \\
\zeta/\mathrm{Z} & \rightarrow & \text{zeta} \\
\eta/\mathrm{N} & \rightarrow & \text{eta} \\
\theta,\vartheta/\Theta & \rightarrow & \text{theta} \\
\iota/\mathrm{I} & \rightarrow & \text{iota} \\
\kappa/\mathrm{K} & \rightarrow & \text{kappa} \\
\lambda/\Lambda & \rightarrow & \text{lambda} \\
\mu/\mathrm{M} & \rightarrow & \text{mu, mi} \\
\nu/\mathrm{V} & \rightarrow & \text{nu, ni} \\
\xi/\Xi & \rightarrow & \text{xi} \\
\phi,\varphi/\Phi & \rightarrow & \text{fi} \\
o/\mathrm{O} & \rightarrow & \text{omicron} \\
\pi,\varpi/\Pi & \rightarrow & \text{pi} \\
\rho/\mathrm{P} & \rightarrow & \text{ro} \\
\sigma,\varsigma/\Sigma & \rightarrow & \text{sigma} \\
\tau/\mathrm{T} & \rightarrow & \text{tau} \\
\upsilon/\mathrm{U} & \rightarrow & \text{upsilon} \\
\chi/\mathrm{X} & \rightarrow & \text{chi} \\
\psi/\Psi & \rightarrow & \text{psi} \\
\omega/\Omega & \rightarrow & \text{omega}
\end{array}$$