

Calcolo combinatorio.

Biagio Raucci

Sommario

In questo secondo capitolo introdurremo, dapprima, il concetto di *definizione ricorsiva* o per ricorrenza. Affronteremo, poi, i rudimenti del calcolo combinatorio. Definiremo i concetti di disposizioni semplici con e senza ripetizioni, di permutazioni e di combinazioni.

Key words: Definizioni ricorsive, ricorrenza, calcolo combinatorio, fattoriale, formula del binomio di Newton.

VERS: 1.0

1 Introduzione

Ci sono problemi che possono essere risolti ragionando in maniera induttiva. Chiediamoci, ad esempio, *in quante parti n rette, a due a due intersecanti, dividono il piano?*

Proviamo a formulare una risposta induttiva a questo problema.

Iniziamo ad osservare che, per ipotesi, le rette sono tutte distinte, non vi sono coppie di rette parallele e tre o più rette non possono passare per lo stesso punto.

Se indichiamo con $r(n)$ il numero delle regioni che cerchiamo, basta dare un'occhiata alla figura 1 per poter affermare che:

$$r(1) = 2, r(2) = 4, r(3) = 7.$$

Evidentemente, se non c'è nessuna retta il piano non viene diviso affatto, i.e. $r(0) = 1$. Una retta divide il piano in due parti (vedi figura 1-(a)), i.e. $r(1) = 2$, due rette dividono il piano in 4 parti (vedi figura 1-(b)) e, in generale, se inseriamo, ad esempio nella figura 1-(c) una nuova retta che rispetta le ipotesi dette, questa intersecherà ciascuna delle tre rette preesistenti in un punto restando così suddivisa in 4 parti (vedi figura 2) (due segmenti e due

Email address: raucci@gmail.com (Biagio Raucci).

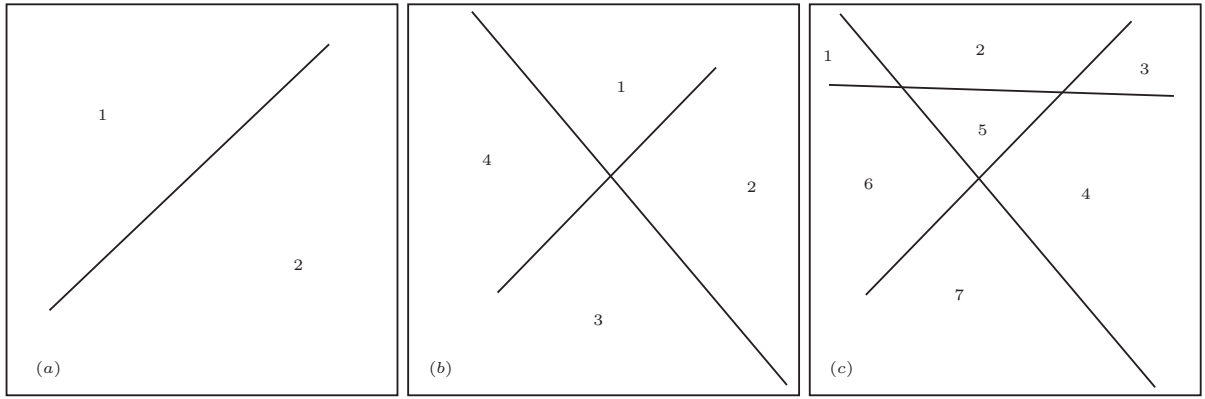


Figura 1. Schema semplificato della risoluzione del problema.

semirette); ciascuno di questi segmenti o semirette divide a sua volta in due parti ciascuna delle 4 regioni che attraversa. Otterremo così in tutto $7 + 4 = 11$ regioni.

Più in generale una nuova retta intersecherà le n rette preesistenti in altrettanti punti restando così divisa in $n+1$, ciascuna delle quali rivide in due ogni regione che attraversa.

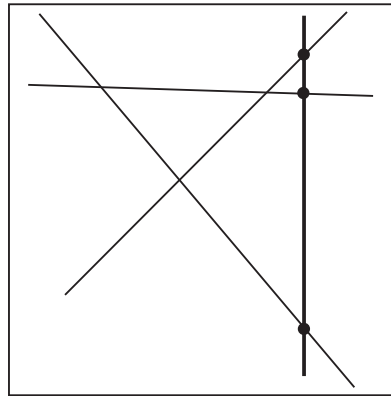


Figura 2. Una nuova retta intersecherà ciascuna delle rette preesistenti in un punto.

Avremo così:

$$r(n+1) = r(n) + (n+1)$$

Se applico la formula appena trovata al caso in cui inseriamo una n -esima retta dopo $n-1$ rette preesistenti, avremo:

$$r(n) = r(n-1) + n \tag{1}$$

La (1) risponde alla domanda che ci eravamo posti. Avremo:

$$\begin{aligned}r(0) &= 1 \\r(1) &= 2 \\r(2) &= 4 \\&\dots \quad \dots \quad \dots \\r(n) &= r(n-1) + n \\r(n+1) &= r(n) + (n+1)\end{aligned}$$

Il problema posto, quindi, risulta essere risolto attraverso la **formula ricorsiva**:

$$\begin{aligned}r(0) &= 1 \\r(n) &= r(n-1) + n\end{aligned}$$

La formula ricorsiva data, però, ci costringe, se volessimo, per esempio, calcolare $r(10)$, a calcolare anche $r(9)$, $r(8)$ e così via, fino a $r(0)$.

È possibile costruire, facilmente, dalla formula ricorsiva una formula in **forma chiusa**; infatti:

$$\begin{aligned}r(0) &= 1 \\r(1) &= r(0) + 1 \\r(2) &= r(1) + 2 \\&\vdots \\r(n) &= r(n-1) + n\end{aligned}$$

da cui:

$$r(n) = 1 + 1 + 2 + \dots + n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}.$$

È possibile dimostrare le definizioni per ricorrenza o ricorsive usando il principio d'induzione.

1.1 Potenza intera

La potenza a^n con $n \in \mathbb{N}$ può definirsi, per ricorrenza, attraverso la relazione:

$$\begin{aligned}a^0 &= 1; \\a^{n+1} &= a \cdot a^n.\end{aligned}\tag{2}$$

Osservazione 1 Dalla (2) risulta, banalmente:

$$\begin{aligned}a^2 &= a \cdot a \\a^n &= \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ fattori}} \\a^{n+1} &= \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ fattori}} \cdot a = a^n \cdot a\end{aligned}$$

Possiamo, così, cercare di dare un significato ai simboli a^1 e a^0 . Risulta:

$$a \cdot a = a^2 = a \cdot a^1 \rightarrow a^1 = \frac{a \cdot a}{a} = a$$

e, ancora:

$$a = a^1 = a \cdot a^0 \rightarrow a^0 = \frac{a}{a} = 1 \text{ con } a \neq 0.$$

Così proseguendo è semplice definire anche le potenze negative. Risulta (lasciamo al lettore il compito di dimostrarlo) che:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

1.2 Il fattoriale

Sia $n \in \mathbb{N}$. Il **fattoriale di n** , che si indica col simbolo $n!$, è il prodotto dei primi n numeri naturali consecutivi e crescenti a partire da 1:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n.$$

La definizione ricorsiva del fattoriale di n è:

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1) \tag{3}$$

Cosa si ottiene se pretendiamo la veridicità della (3) per $n = 0$?

$$1 = 1! = 0! \cdot 1 \Leftrightarrow 0! = 1$$

cosa che può sembrare strana ma che troverà una sua giustificazione in quanto andremo a spiegare nella prossima sezione.

2 Elementi di calcolo combinatorio.

Sia dato un insieme finito A costituito da n oggetti del tipo:

$$a_1, a_2, \dots, a_n.$$

Pensiamo, a partire dagli elementi dell'insieme A , di costruire, fissato un $k \in \mathbb{N}$, degli **allineamenti** del tipo:

$$a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}$$

dove i_r può essere uno dei numeri $1, 2, \dots, n$. Queste elencazioni possono essere **ordinate** o **non-ordinate**.

Ci proponiamo di contare quanti di questi allineamenti si possono formare quando si stabilisce un certo criterio.

Abbiamo già definito, precedentemente, il concetto di prodotto cartesiano di due insiemi. Brevemente lo riprendiamo.

Siano dati due insiemi A_1 e A_2 , non necessariamente distinti. Ci domandiamo quante **coppie ordinate** possiamo formare prelevando un elemento $a_1 \in A_1$ e $a_2 \in A_2$. L'insieme di tutte queste coppie è, come abbiamo visto, il **prodotto cartesiano** di A_1 e A_2 e si indica con

$$A_1 \times A_2.$$

Se, ad esempio, A_1 contiene 3 elementi e A_2 contiene 2 elementi, le coppie che possiamo formare prelevando un primo elemento da A_1 e un secondo elemento da A_2 è $3 \times 2 = 6$. Infatti, se:

$$A_1 = \{a, b, c\} \quad A_2 = \{1, 2\}$$

si ha:

$$\begin{aligned} &(a, 1) ; (a, 2) \\ &(b, 1) ; (b, 2) \\ &(c, 1) ; (c, 2) \end{aligned}$$

ovvero 6 coppie.

In generale, se A_1 contiene n_1 elementi e A_2 contiene, invece, n_2 elementi, l'insieme delle coppie che si può formare prendendo il primo elemento da A_1 e il secondo elemento da A_2 è $n_1 \times n_2$.

2.1 Disposizioni

Supponiamo di avere un insieme formato da n oggetti e di voler formare delle liste (ordinate) di k elementi con possibilità di ripetizioni di un elemento.

Esempio 1

$$A_1 = \{a, b, c\} \quad n = 3 \text{ e, poniamo, } k = 2.$$

Le 9 disposizioni possibili con ripetizioni di 3 elementi presi a 2 a 2 sono:

aa ab ac
ba bb bc
ca cb cc

Definizione 1 (Disposizioni con ripetizioni) – Sia A un insieme costituito da n elementi. Le disposizioni di n elementi presi k a k alla volta, con la possibilità di avere delle ripetizioni, sono date dalla relazione:

$$D_{n,k}^{(r)} = n^k \quad (4)$$

Cerchiamo di capire il perchè della (4).

Supponiamo di avere n elementi e di voler costruire una stringa di k elementi prelevati fra gli n . Vediamo in quanti modi possiamo fare le nostre scelte.

- Scelgo il primo elemento fra n elementi;
- scelgo il secondo elemento fra n elementi;
- scelgo il k -mo elemento fra n elementi.

Ogni scelta, quindi, avviene, per ciascun k , fra n elementi e quindi avrò

$$\underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{k\text{-volte}} = n^k$$

scelte.

Esempio 2 Tutti sanno che l'informazione viene codificata con due sole "lettere", $\{0, 1\}$ dette bit. In particolare si considera una sequenza di 8 bit (i.e. 8 cifre binarie), detti byte, per rappresentare una informazione in una cella di memoria dell'elaboratore. Ci chiediamo: quanti sono i diversi tipi di byte che possiamo rappresentare?

Chiaramente è $n = 2$ e $k = 8$, quindi, per la (4) abbiamo:

$$2^8 = 256$$

Consideriamo, adesso, un diverso criterio di scelta rispetto al caso precedente. Supponiamo di avere un insieme con n elementi, ne scegliamo k , ma questa volta ci proibiamo le ripetizioni.

Definizione 2 (Disposizioni semplici) – Sia A un insieme costituito da n elementi. Le disposizioni semplici di n elementi presi k a k alla volta (con $k \leq n$), senza la possibilità di avere delle ripetizioni, sono date dalla relazione:

$$D_{n,k} = n \times (n - 1) \times \dots \times (n - k + 1), \quad (5)$$

i.e. il prodotto di k fattori decrescenti e consecutivi a partire da n .

La spiegazione della (5) è banale. Infatti, il primo elemento lo possiamo scegliere in n modi possibili mentre il secondo in $n - 1$ modi (il primo elemento, infatti, la abbiamo già impegnato); quando seglierò il k -esimo elemento, ne avrò scelti già $k - 1$ e quindi il k -esimo lo potrò scegliere ancora fra i rimanenti $n - (k - 1) = n - k + 1$.

Per $n = k$ otteniamo le **permutazioni di n elementi** ovvero:

$$P_n = D_{n,n} = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 1 = n!,$$

i.e. il prodotto di n numeri interi decrescenti e consecutivi a partire da n .

Esempio 3 *Quattro amici vanno a teatro e prenotano quattro poltrone. In quanti modi si possono sedere?*

$$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \text{ modi}$$

Il primo a sedersi, infatti, può scegliere fra 4 poltrone, il secondo fra 3 e così via fino a che, l'ultimo, avrà una sola poltrona su cui sedersi.

2.2 Combinazioni

Fino ad ora ci siamo occupati di "liste ordinate", i.e. di disposizioni. In questa sezione ci occuperemo, invece, di elencazioni in cui si prescinde dall'ordine; abbandoniamo, quindi, il concetto di coppia ordinata e rifacciamoci al concetto di sottoinsieme.

Se, ad esempio, abbiamo un insieme costituito da $n = 3$, le *disposizioni semplici* degli elementi presi a 2 a 2 sono:

$$D_{3,2} = 3 \cdot 2 = 6$$

i.e.

$$(a, b) ; (b, a)$$

$$(a, c) ; (c, a)$$

$$(b, c) ; (c, b)$$

Il numero delle **combinazioni**, invece, è 3, perchè non ha senso distinguere, ad esempio, la combinazione $\{a, b\}$ dalla combinazione $\{b, a\}$.

Per rispondere, quindi, alla domanda *quante sono le combinazioni semplici di n oggetti presi a k a k ?* proviamo a fare un ragionamento, per così dire, rovesciato. Dall'esempio fatto possiamo dire che ad una combinazione semplice corrispondono 2 disposizioni semplici perchè tanti sono i modi di permutare due elementi. In generale, se ho k elementi li posso permutare in $k!$ elementi.

Quindi, se ogni combinazione facendo permutare i suoi k elementi da luogo a $k!$ disposizioni, il numero di combinazioni di n elementi presi a k a k è:

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

Risulta:

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (6)$$

Osservazione 2 Per convincersi della veridicità della (6) basta osservare che:

$$C_{n,k} = \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \cdot \overbrace{(n-k)(n-k-1) \cdot \dots \cdot 1}^{(n-k)!}}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

La (6) è anche nota come **formula dei tre fattoriali**.

Risulta:

$$C_{n,k} = C_{n,n-k}$$

Esempio 4 Cinque amici vanno a fare una gita con due automobili, una piccola e una più grande. Si decide, allora, che due amici vanno sull'auto piccola mentre gli altri tre vanno sull'auto grande. Ci chiediamo: in quanti modi si possono dividere?

Quando si sono scelti i 2 che vanno nell'auto piccola, di conseguenza si sono individuati anche gli altri 3 che andranno sull'auto più grande, ossia:

$$C_{5,2} = \frac{5 \cdot 4}{2!} = \frac{20}{2} = 10$$

$$C_{5,3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = \frac{60}{6} = 10$$

In generale se da n elementi ne scegliamo k , ne lasciamo fuori $n-k$. Se $k=n$ otteniamo $C_{n,n}$, i.e. degli n oggetti che abbiamo ne prendiamo proprio n . In quanti modi possiamo farlo? chiaramente in 1 solo modo, i.e.

$$C_{n,n} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = 1 \Leftrightarrow 0! = 1.$$

Si tratta di una *convenzione ragionata*, i.e. di una convenzione coerente con la proprietà del fattoriale.

Introduciamo, adesso, il simbolo del **coefficiente binomiale di indice superiore n e indice inferiore k** (per una ragione che vedremo nella sezione 3):

$$\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$$

Il numero delle combinazioni di classe k di n oggetti è espresso dal coefficiente binomiale:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = C_{n,k}.$$

3 Proprietà dei coefficienti binomiali

Esaminiamo alcune semplici proprietà dei coefficienti binomiali definiti, ricordiamolo, per $k \leq n$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Risulta, chiaramente, che il numero di sottoinsiemi A di B di k elementi (con B insieme finito formato da n elementi e $k \leq n$) è proprio il coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$. Abbiamo subito che:

$$\binom{n}{0} = 1$$

poichè l'unico sottoinsieme di B con zero elementi è l'insieme vuoto,

$$\binom{n}{1} = n$$

perchè i sottoinsiemi di B con un solo elemento sono tanti quanti gli elementi di B . Inoltre, vale la seguente relazione di **simmetria**:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Infatti ad ogni sottoinsieme A di n elementi ne corrisponde biunivocamente un altro, A' , di $n - k$ elementi ottenuto prendendo gli elementi di B che non stanno in A . Possiamo, in più, trovare una formula ricorsiva che ci permette di calcolare tali numeri a partire dai primi valori. Se infatti aggiungiamo a B un ulteriore elemento, diciamolo b_{n+1} , ottenendo un nuovo insieme B' di $n + 1$ elementi, allora i sottoinsiemi di B' di k elementi saranno di due tipi: quelli che non contengono b_{n+1} che sono tanti quanti i sottoinsiemi di B di k

elementi e quelli che contengono b_{n+1} che sono tanti quanti i sottoinsiemi di B di $k - 1$ elementi. Perciò:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \quad (7)$$

La (7) (**legge del Triangolo di Tartaglia**) si verifica osservando che:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n!(n-k+1) + n!k}{k!(n-k+1)!} = \\ &= \frac{n!(n-k+1+k)}{k!(n-k+1)!} = \frac{n!(n+1)}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k} \end{aligned}$$

Con questa formula possiamo ricavare $\binom{n+1}{k}$ a partire dai numeri $\binom{n}{k}$ e $\binom{n}{k-1}$.

Ad esempio, essendo:

$$\binom{2}{0} = 1, \binom{2}{1} = 2 \text{ e } \binom{2}{2} = 1,$$

ricaviamo

$$\binom{3}{0} = 1, \binom{3}{1} = \binom{2}{1} + \binom{2}{0} = 2 + 1, \binom{3}{2} = \binom{2}{2} + \binom{2}{1} = 1 + 2, \text{ etc.}$$

Il numero $\binom{m}{n}$ è anche detto coefficiente binomiale poiché interviene nella formula che dà lo sviluppo di una potenza di un binomio:

$$\begin{aligned} (a+b)^0 &= 1 \\ (a+b)^1 &= a+b \\ (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{aligned}$$

Se scriviamo, in una tabella, i coefficienti degli sviluppi precedenti, otteniamo:

$$\begin{array}{cccccc}
 1 & & & & & \\
 1 & 1 & & & & \\
 1 & 2 & 1 & & & \\
 1 & 3 & 3 & 1 & & \\
 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
 \end{array}$$

detto *triangolo di Tartaglia* o *di Pascal*. Si fa osservare, esplicitamente, che il triangolo di Tartaglia si può anche scrivere come:

$$\begin{array}{cccc}
 \binom{0}{0} & & & \\
 \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & \\
 \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & \\
 \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots
 \end{array}$$

Vale, in generale, la relazione:

$$\begin{aligned}
 (a + b)^n &= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k}b^k
 \end{aligned}$$

nota come **formula del binomio di Newton**. Sussiste, infatti, il seguente

Teorema 1 Se $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ e $n \in \mathbb{N}$, si ha:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k}b^k.$$

Dimostrazione — Utilizzeremo il principio d'induzione.

Se $n = 1$ la formula è vera, perchè:

$$(a + b) = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 = a + b.$$

Supponiamo vera la formula per un binomio di grado n e proviamola per un binomio di grado $n + 1$, i.e. facciamo vedere che risulta:

$$(a + b)^{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} a^{n-k+1} b^k.$$

Si ha:

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= (a + b) (a + b)^n = (a + b) \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \end{aligned}$$

Ponendo, nella prima sommatoria, $h = k$ mentre, nella seconda sommatoria, $h = k + 1$, si ha:

$$(a + b)^{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{h} a^{n-h+1} b^k + \sum_{h=1}^{n+1} \binom{n}{h-1} a^{n-h+1} b^h$$

Isolando l'ultimo addendo nella seconda somma e il primo addendo nella prima, avremo:

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= \\ &= \binom{n}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{h=1}^n \binom{n}{h} a^{n-h+1} b^h + \sum_{h=1}^n \binom{n}{h-1} a^{n-h+1} b^h + \binom{n}{n} a^0 b^{n+1} = \\ &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{h=1}^n \left[\binom{n}{h} + \binom{n}{h-1} \right] a^{n-h+1} b^h. \end{aligned}$$

Ricordando che:

$$\binom{n}{h} + \binom{n}{h-1} = \binom{n+1}{h}$$

si ha:

$$(a + b)^{n+1} = a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{h=1}^n \binom{n+1}{h} a^{n-h+1} b^h = \sum_{h=0}^{n+1} \binom{n+1}{h} a^{n-h+1} b^h.$$

Per il principio d'induzione la tesi è dimostrata. \square

4 Esercizi

Esercizio — Quante bandiere tricolori si possono formare con i sette colori dell'iride? \blacksquare

Evidentemente tante quante sono le disposizioni semplici che si possono formare con i sette colori presi a 3 a 3, i.e.

$$D_{7,3} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$$

Esercizio — Quanti sono i numeri di tre cifre tutte tra loro diverse? \blacksquare

Le disposizioni semplici delle dieci cifre $0, 1, 2, 3, \dots, 9$ a tre a tre danno, oltre i numeri chiesti, anche i gruppi del tipo $0ab$, con a, b cifre distinte non nulle. Siccome questi gruppi sono in numero di $9 \cdot 2$, il numero richiesto è:

$$D_{10,2} - D_{9,2} = 10 \cdot 9 \cdot 8 - 9 \cdot 8 = (10 - 1) \cdot 9 \cdot 8 = 648$$

Esercizio — Un'urna contiene 25 palline numerate da 1 a 25. Si estraggono successivamente 3 palline (senza rimettere le palline estratte nell'urna). Quante sono le possibili terne ordinate di numeri che si estraggono? \blacksquare

Si tratta di un tipico problema di disposizione senza ripetizione.

$$D_{25,3} = 25 \cdot 24 \cdot 23 = 13800$$

Esercizio — Si calcoli il numero degli anagrammi che si possono formare con le lettere della parola "Roma". \blacksquare

Si tratta di valutare in quanti modi possono essere disposte tutte le quattro lettere "R", "O", "M", "A". Quindi è sufficiente calcolare il numero delle permutazioni semplici di quattro elementi:

$$P_4 = 4! = 24$$

Esercizio — Quante partite di scacchi diverse possono essere giocate da sei giocatori? \blacksquare

Si deve valutare il numero $C_{6,2}$ delle combinazioni semplici di 6 elementi di classe 2 (una partita a scacchi, infatti, viene giocata da due giocatori):

$$C_{6,5} = \frac{D_{6,2}}{P_2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

A Interpretazione geometrica del quadrato di un binomio

Vogliamo, brevemente, dare una interpretazione geometrica alla quantità:

$$(a + b)^2.$$

Risulta, usando, ad esempio, la formula del binomio di Newton, che:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Geometricamente, risulta, infatti, che l'area del quadrato di lato $(a + b)$ (si veda la figura A.1) può vedersi composta come l'area di un quadrato di lato

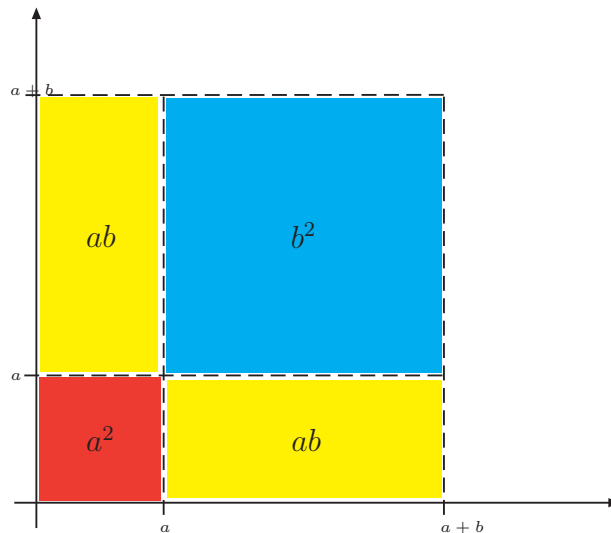


Figura A.1. L'area del quadrato di lato $(a + b)$.

a , l'area di un quadrato di lato b e l'area di due rettangoli di lati a e b .

B Equazioni di primo grado

Siano $a, b \in \mathbb{R}$ assegnati. Ci chiediamo se esistono numeri reali x tali che

$$ax + b = 0. \tag{B.1}$$

Osserviamo che poichè ogni $b \in \mathbb{R}$ ha il suo opposto, la (B.1) equivale alla seguente equazione:

$$ax + b - b = -b$$

ovvero:

$$ax = -b. \tag{B.2}$$

Valutiamo, adesso i seguenti casi:

- $a = 0$ — se
 - $b = 0$ allora ogni $x \in \mathbb{R}$ è soluzione della (B.1);
 - $b \neq 0$ allora nessun $x \in \mathbb{R}$ è soluzione della (B.1).
- $a \neq 0$ — la (B.2), per ogni $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, equivale alla equazione seguente:

$$\frac{1}{a}ax = \frac{1}{a}(-b)$$

ovvero:

$$x = -\frac{b}{a}$$

Teorema 2 *Siano $b \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} - \{0\}$. Esiste una e una soluzione dell'equazione:*

$$ax + b = 0.$$

In simboli:

$$\forall b \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R} - \{0\}, \exists! x \in \mathbb{R} : ax + b = 0$$

Esempio 5

$$4 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = 4/3.$$

C Disequazioni di primo grado

Siano $a, b \in \mathbb{R}$ assegnati. Ci chiediamo se esistono numeri reali x tali che:

$$ax + b > 0 \tag{C.1}$$

Osserviamo che la (C.1) equivale alla seguente disequazione:

$$ax + b - b > -b$$

ovvero:

$$ax > -b. \tag{C.2}$$

Valutiamo, adesso, i seguenti casi:

- $a = 0$;
 - se $-b < 0$ ogni $x \in \mathbb{R}$ è soluzione;
 - se $-b > 0$ nessun $x \in \mathbb{R}$ è soluzione;

- $a > 0$; la (C.2) equivale a:

$$\frac{1}{a}ax > \frac{1}{a}(-b) \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$$

- $a < 0$; la (C.2) equivale a:

$$\frac{1}{a}ax < \frac{1}{a}(-b) \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$$

D Potenze con esponente reale. Polinomi. Equazioni esponenziali.

Abbiamo, in 1.1, introdotto la *potenza ennesima di un numero reale a* come il prodotto di n fattori uguali ad a , i.e.:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ volte}}$$

- Se $n = 1$, si pone $a^1 = a$;
- se $n = 0$ e $a \neq 0$, si pone $a^0 = 1$;
- se $n < 1$ e $a \neq 0$, si pone $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$.

Dalle definizioni date segue che se a e b sono numeri reali e m, n numeri interi, risulta:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad ; \quad a^m : a^n = a^{m-n} \quad ; \quad (a^m)^n = a^{m \cdot n};$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad ; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Vogliamo, ora, estendere ulteriormente il concetto di potenza, considerando il caso di un **esponente razionale** (o frazionario) qualunque, e di una base positiva (o nulla se l'esponente è positivo).

Vogliamo dare una definizione che permetta di estendere alle "nuove potenze" le ordinarie regole del calcolo delle potenze ad esponente intero.

Osservando attentamente le regole di calcolo dei radicali si intuisce la convenienza delle seguenti *definizioni*:

- (1) — se $\frac{m}{n} > 0$ e $a \geq 0$, si pone:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m};$$

- (2) — se $\frac{m}{n} > 0$ e $a > 0$, si pone:

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^m}}.$$

Dunque, ogni potenza a base positiva ed esponente frazionario è equivalente a un radicale, e viceversa. Per questo motivo una tale potenza **non** risulta mai negativa perchè tale è la radice n -ma aritmetica di un numero non negativo.

Esempio 6 *Si ha:*

- $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$; $3^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{3^4}$; $a^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{a^3}$; $(x+y)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(x+y)^2}$.
- $3^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $\left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{3}{5}} = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{\left(\frac{4}{3}\right)^3}$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} = (3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$.
- $\sqrt[4]{7} = 7^{\frac{1}{4}}$; $\sqrt[5]{a^4} = a^{\frac{4}{5}}$; $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = x^{-\frac{2}{3}}$.

Non è difficile provare che le potenze ad esponente razionale conservano le proprietà delle potenze a esponente intero.

Esempio 7

$$x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{3}{4}} = x^{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}} = x^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{x^5}.$$

$$x^{\frac{2}{5}} : x^{\frac{3}{5}} = x^{-\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{x}}.$$

$$\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = x^{-1} = \frac{1}{x}$$

$$\left(1 - x^{-\frac{1}{2}}\right) \left(1 + x^{-\frac{1}{2}}\right) = 1 - \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = 1 - \frac{1}{x}$$

D.1 Polinomi.

Iniziamo, subito, col definire il concetto di *polinomio*.

Definizione 3 *Siano $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Si chiama **polinomio con coefficienti** a_0, a_1, \dots, a_n la funzione:*

$$p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

definita da:

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n \quad (\text{D.1})$$

Si chiama **grado del polinomio** il

$$\max \{k : x^k \text{ ha coefficiente diverso da } 0\}.$$

Se p ha grado n , il coefficiente di x^n si chiama **coefficiente direttore** del polinomio.

Esempio 8 *Se:*

$$p(x) = 0 \cdot x^4 + 2x^3 - 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 3$$

allora p ha grado 3 e coefficiente direttore 2.

Osservazione 3 *I polinomi di grado zero sono identificabili con i numeri reali.*

Due polinomi si possono sempre sommare e moltiplicare (con le regole del calcolo letterale).

Esempio 9 *Siano:*

$$p(x) = 2x - 1 \quad , \quad q(x) = 3x^2 - 2x - 1,$$

risulta:

$$(p + q)(x) = 2x - 1 + 3x^2 - 2x - 1 = 3x^2 - 2$$

e, ancora:

$$\begin{aligned}(p \cdot q)(x) &= (2x - 1) \cdot (3x^2 - 2x - 1) \\ &= 6x^3 - 4x^2 - 2x - 3x^2 + 2x + 1 \\ &= 6x^3 - 7x^2 + 1\end{aligned}$$

Definizione 4 (Opposto di un polinomio.) — *Si chiama opposto di un polinomio*

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

il polinomio

$$-p(x) = (-a_0)x^n + (-a_1)x^{n-1} + (-a_2)x^{n-2} + \dots + (-a_{n-1})x + (-a_n)$$

Esempio 10 *L'opposto di $2x - 1$ è $-2x + 1$.*

D.2 Polinomi di secondo grado.

Il generico polinomio di secondo grado ha l'espressione:

$$p(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{con } a \neq 0$$

Ci proponiamo di determinare:

- (1) le soluzioni dell'equazione $p(x) = 0$;
- (2) le soluzioni della disequazione $p(x) > 0$.

D.2.1 Fattorizzazione

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \right) \right]. \end{aligned}$$

Osserviamo che:

$$\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

può avere qualunque segno e quindi anche il numero

$$b^2 - 4ac$$

potrà avere qualsiasi segno.

Definizione 5 Il numero $b^2 - 4ac$ si chiama **discriminante** dell'equazione di secondo grado e si indica con Δ .

D.2.2 Caso I : $\Delta < 0$.

Sotto tale ipotesi è:

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2} \right].$$

La quantità tra parentesi quadra è maggiore di zero per ogni $x \in \mathbb{R}$ e quindi l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ **non ha soluzioni**.

Inoltre $ax^2 + bx + c$ ha, per ogni $x \in \mathbb{R}$, lo stesso segno di a . Perciò:

$$a > 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$a < 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

D.2.3 Caso II : $\Delta = 0$.

Sotto tale ipotesi è:

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2.$$

La quantità tra parentesi tonda non è mai negativa e si annulla se e solo se $x = -\frac{b}{2a}$. Quindi l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ ha l'unica soluzione $x = -\frac{b}{2a}$. Inoltre $ax^2 + bx + c$ ha, per ogni $x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$ lo stesso segno di a . Perciò:

$$\begin{aligned} a > 0 &\Rightarrow ax^2 + bx + c > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{b}{2a}\right\} \\ a < 0 &\Rightarrow ax^2 + bx + c < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{b}{2a}\right\} \end{aligned}$$

D.2.4 Caso III : $\Delta > 0$.

Sotto tale ipotesi è:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] \\ &= a \left[x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right] \left[x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right]. \end{aligned}$$

Per il principio di annullamento del prodotto risulta che $ax^2 + bx + c = 0$ se e solo se almeno una delle parentesi quadre è nulla in x , ovvero:

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{oppure} \quad x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Abbiamo scritto $ax^2 + bx + c$ come prodotto di tre fattori. Tale prodotto è positivo se e solo se il numero dei fattori negativi è pari (i.e. se è 0 o 2).

Se $a > 0$:

dalla figura (D.1) risulta che $ax^2 + bx + c > 0$ se e solo se:

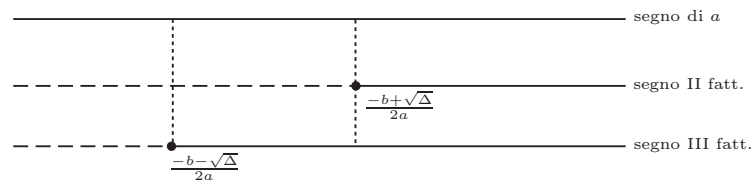


Figura D.1. Schema di soluzione della disequazione.

$$x \in \left] -\infty, \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right[\cup \left] \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, +\infty \right[.$$

Se $a < 0$:

dalla figura (D.2) risulta che $ax^2 + bx + c > 0$ se e solo se:

$$x \in \left] \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right[.$$

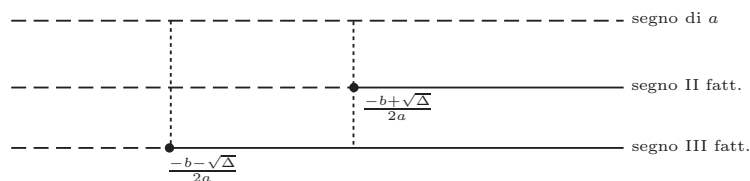


Figura D.2. Schema di soluzione della disequazione.

Per comodità del lettore riassumiamo i risultati ottenuti nella tabella rappresentata in figura D.3.

$\Delta = b^2 - 4ac$	$ax^2 + bx + c > 0$	$ax^2 + bx + c < 0$
$\Delta > 0$	è soddisfatta da tutti i valori della x che sono esterni all'intervallo che ha per estremi le radici dell'equazione: $ax^2 + bx + c = 0$.	è soddisfatta da tutti i valori della x che sono interni all'intervallo che ha per estremi le radici dell'equazione: $ax^2 + bx + c = 0$.
$\Delta = 0$	è soddisfatta da tutti i valori della x , tranne il valore $-\frac{b}{2a}$ per il quale il trinomio si annulla.	non ammette soluzioni.
$\Delta < 0$	è soddisfatta da tutti i valori della x .	non ammette soluzioni

Figura D.3. Tabella riepilogativa per le soluzioni delle disequazioni con $a > 0$.

Osservazione 4 La tabella riepilogativa di figura D.3 tiene conto solo del caso $a > 0$. È banale osservare che il caso $a < 0$ si riduce a quello per cui $a > 0$; cambia, però, il segno della disuguaglianza dell'equazione:

$$ax^2 + bx + c > 0 \stackrel{con\ a < 0}{\Leftrightarrow} -ax^2 - bx - c < 0$$

e

$$ax^2 + bx + c < 0 \stackrel{con\ a < 0}{\Leftrightarrow} -ax^2 - bx - c > 0$$

Esempio 11 Si consideri la disequazione:

$$-x^2 + 2x - 1 \geq 0 \tag{D.2}$$

Possiamo pensare di risolvere la (D.2) in due modi:

- osserviamo che:

$$-x^2 + 2x - 1 = -(x - 1)^2.$$

Risulta che $-(x - 1)^2$ è nullo per $x = 1$ ed è negativo altrove. Concludiamo, da questa osservazione, che la (D.2) ha soluzione $\{1\}$.

- Notiamo che $\Delta = 4 - 4 = 0$ e $a = -1 < 0$. Il trinomio $-x^2 + 2x - 1$ si annulla in $-\frac{b}{2a} = 1$ e ha il segno di a , i.e. negativo, in $\mathbb{R} - \{1\}$. Quindi l'insieme delle soluzioni della (D.2) è $\{1\}$.

Esempio 12 Si consideri la disequazione:

$$x^2 + 1 < 0 \quad (D.3)$$

Possiamo pensare di risolvere la (D.3) in due modi:

- Osserviamo che $x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Quindi $x^2 + 1$ è sempre positivo ovvero l'insieme delle soluzioni di (D.3) è l'insieme vuoto \emptyset .
- Notiamo che $\Delta = -4 < 0$, inoltre è $a = 1 > 0$ e quindi il trinomio $x^2 + 1$ è sempre positivo ovvero la (D.3) non ha soluzioni.

Esempio 13 Risolviamo la disequazione:

$$-2x^2 + x + 1 \leq 0.$$

Si ha $\Delta = 1 + 8 = 9 > 0$; quindi $-2x^2 + x + 1$ si annulla nei punti:

$$\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{1}{2} \text{ e } \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 1.$$

Osserviamo che $a = -2 < 0$ e quindi $-2x^2 + x + 1$ è positiva nell'intervallo $]-1/2, 1[$ e quindi le soluzioni della disequazione data sono:

$$]-\infty, -1/2] \cup [1, +\infty[.$$

D.3 Zeri di polinomi

Sia p un polinomio; si dice che $\alpha \in \mathbb{R}$ è uno **zero** (o una radice) di p se:

$$p(\alpha) = 0$$

Teorema 3 (di Ruffini) Siano p un polinomio e α una sua radice. Allora p è divisibile per il polinomio $(x - \alpha)$; i.e., esiste un polinomio q , di grado minore di quello di p , tale che:

$$p(x) = (x - \alpha) \cdot q(x);$$

q si chiama **quoziente** della divisione dei polinomi $p(x)$ e $(x - \alpha)$.

Esempio 14 Applichiamo il teorema di Ruffini al polinomio:

$$p(x) = x^4 - 2x + 1.$$

Osserviamo che $p(1) = 0$; p , quindi, è divisibile per $(x - 1)$.

$$1 \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & -1 \\ \hline & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right.$$

ovvero:

$$q(x) = x^3 + x^2 + x - 1.$$

Teorema 4 (di fattorizzazione) Ogni polinomio non costante si può scrivere nella forma:

$$a(x - \alpha_1) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_m) (x^2 + b_1x + c_1) \cdot \dots \cdot (x^2 + b_nx + c_n) \quad (D.4)$$

dove $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n, c_1, \dots, c_n$ appartengono a \mathbb{R} , i polinomi $(x^2 + b_1x + c_1), \dots, (x^2 + b_nx + c_n)$ sono irriducibili. La decomposizione (D.4) è unica a meno dell'ordine dei fattori.

Esempio 15 Sia dato il seguente polinomio:

$$p(x) = x^3 - 2x + 1.$$

Poichè $p(1) = 0$ si ha che:

$$p(x) = (x - 1)q(x)$$

dove il grado di $q \leq 2$. Risulta: Osserviamo che $p(1) = 0$; il polinomio p dato, quindi, è divisibile per $(x - 1)$.

$$1 \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ & 1 & 1 & -1 \\ \hline & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right.$$

Otteniamo:

$$\begin{aligned} q(x) &= x^2 + x - 1 \\ &= \left(x - \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right) \left(x - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right) \end{aligned}$$

ovvero:

$$p(x) = (x - 1) \left(x - \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right) \left(x - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)$$

Esempio 16 Sia dato:

$$p(x) = x^3 - x^2 - x - 2.$$

Si noti che $p(2) = 0$;

$$2 \left| \begin{array}{cccc} 1 & -1 & -1 & -2 \\ & 2 & 2 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right.$$

ovvero:

$$p(x) = (x - 2)(x^2 + x + 1).$$

D.4 Disequazioni polinomiali

Sia dato da risolvere il problema dello studio della soluzione della disequazione:

$$p(x) > 0$$

dove p è un polinomio.

- **I passo:** fattorizzare il polinomio;
- **II passo:** studiare il segno di ciascun fattore;
- **III passo:** determinare il segno di p .

Esempio 17 Trovare la soluzioni di:

$$p(x) = x^3 - x^2 - x - 2 \leq 0. \quad (\text{D.5})$$

Abbiamo visto che $p(x) = (x - 2)(x^2 + x + 1)$; dalla figura D.4 si osserva subito che le soluzioni di (D.5) sono le $x \in]-\infty, -2]$.

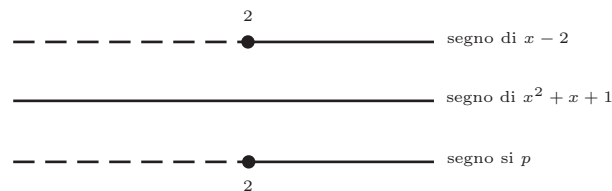


Figura D.4. Schema di soluzione della disequazione (D.5).

Esempio 18 Trovare la soluzione di

$$p(x) = x^3 - 2x + 1 > 0.$$

Abbiamo visto che:

$$p(x) = (x - 1) \left(x - \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \right) \left(x - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right)$$

per cui, dalla figura D.5 deduciamo che le soluzioni della disequazione data

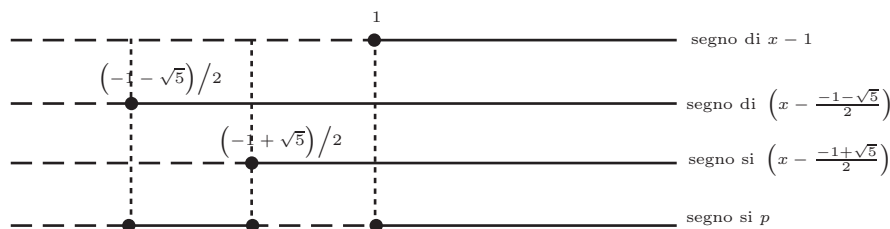


Figura D.5. Schema di soluzione della disequazione assegnata.

sono:

$$\left] -\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right[\cup]1, \infty[$$

Esercizio — Risolvere la seguente **disequazione biquadratica**:

$$p(x) = 2x^4 - 3x^2 + 1 \leq 0$$

■

Il polinomio $q(t) = 2t^2 - 3t + 1$ (ottenuto da $p(x)$ ponendo $x^2 = t$) si fattorizza nel modo seguente:

$$q(t) = 2(t - 1)\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

ovvero:

$$\begin{aligned} p(x) &= 2(x^2 - 1)\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) \\ &= 2(x - 1)(x + 1)\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

L'analisi del segno dei vari polinomi in cui abbiamo fattorizzato $p(x)$ ci permette di dire che la soluzione della disequazione data è:

$$\left[-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right].$$

E Sistemi di equazioni e disequazioni

Nelle sezioni successive di questa Appendice, si studieranno casi in cui le equazioni o disequazioni in esame, possono essere ricondotte ad una o più equazioni o disequazioni di tipo semplice. Quando, in generale, si hanno più equazioni o disequazioni che devono essere soddisfatte contemporaneamente si preferisce parlare di *sistemi di equazioni* (o, rispettivamente, di *sistemi di disequazioni*) e raggruppare le disequazioni con una parentesi graffa. Un sistema di equazioni

o di disequazioni, si presenta, rispettivamente, nella forma:

$$\begin{cases} f_1(x) = g_1(x), \\ f_2(x) = g_2(x), \\ \vdots \\ f_n(x) = g_n(x) \end{cases} \text{ e, rispettivamente } \begin{cases} f_1(x) \leq g_1(x), \\ f_2(x) \leq g_2(x), \\ \vdots \\ f_n(x) \leq g_n(x) \end{cases}$$

con $f_1 : X_1 \rightarrow \mathbb{R}, \dots, f_n : X_n \rightarrow \mathbb{R}$ e $g_1 : Y_1 \rightarrow \mathbb{R}, \dots, g_n : Y_n \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni reali assegnate.

Le soluzioni di un sistema di equazioni (rispettivamente, disequazioni) sono date dall'insieme:

$$S = \{x \in X_1 \cap \dots \cap X_n \cap Y_1 \cap \dots \cap Y_n : f_1(x) = g_1(x), \dots, f_n(x) = g_n(x)\}$$

ovvero, per le disequazioni:

$$S = \{x \in X_1 \cap \dots \cap X_n \cap Y_1 \cap \dots \cap Y_n : f_1(x) \leq g_1(x), \dots, f_n(x) \leq g_n(x)\}.$$

Quindi, per determinare l'insieme S si determinano separatamente gli insiemi S_1, \dots, S_n di ognuna delle equazioni o, rispettivamente, delle disequazioni del sistema. Allora l'insieme S è dato da $S_1 \cap \dots \cap S_n$. Quanto osservato vale anche per i sistemi misti, che contengono sia equazioni che disequazioni.

Esempio 19 *Si consideri il sistema:*

$$\begin{cases} 2x > 5 \\ x^2 - 5x + 6 > 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

La prima disequazione ha come soluzioni l'intervallo $S_1 =]5/2, +\infty[$; la seconda equazione ha come soluzione l'insieme $S_2 = \{2, 3\}$ e la terza l'insieme $\mathbb{R} - \{0\}$. Quindi l'insieme delle soluzioni del sistema è dato da $S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \{3\}$.

L'intersezione può facilmente essere determinata graficamente considerando

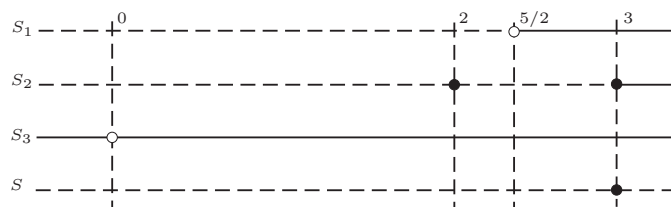


Figura E.1. Schema di soluzione del sistema assegnato.

i punti comuni agli insiemi delle soluzioni di ogni disequazione o equazione come riportato in figura E.1.

Esercizio — Determinare l'insieme delle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} x^2 + 5 \leq 2x^2 + 4 \\ x^4 - 16 < 0 \\ 2x - 1 > 0 \end{cases}$$

■

La soluzione è lasciata al lettore. Ci limitiamo solamente a riportare il risultato: la soluzione del sistema proposto è l'intervallo $[1, 2[$.

E.1 Disequazioni razionali fratte

Si chiama **disequazione razionale fratta** ogni disequazione razionale nella quale compaiono divisori contenenti l'incognita.

Siano p, q due polinomi, con q non identicamente nullo. Sia

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}.$$

Ci poniamo il problema di risolvere la disequazione:

$$r(x) > 0$$

Procederemo, per la risoluzione del nostro problema, attraverso i seguenti *step*:

- **condizione di esistenza di r** , i.e. determinazione degli $x \in \mathbb{R}$ tali che $q(x) \neq 0$;
- **fattorizzazione di p e q** ;
- **studio del segno di p e q** ;
- **determinazione del segno di r** .

Esempio 20 *Risolvere la disequazione razionale:*

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^3 - x^2 - x - 2}{x - 2} \geq 0.$$

L'insieme di esistenza della $r(x)$ data è $\mathbb{R} - \{2\}$.

Risulta:

$$\begin{aligned} r(x) &= \frac{(x-2)(x^2+x+1)}{x-2} \\ &= x^2 + x + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{2\} \end{aligned}$$

Figura E.2. Schema di soluzione della disequazione assegnata: si noti che in 2 la $r(x)$ non esiste.

Notiamo che $x^2 + x + 1$ è irriducibile e positivo sicchè il segno di $r(x)$ è quello indicato in figura E.2, i.e. la soluzione della disequazione data è $\mathbb{R} - \{2\}$.

Osservazione 5 Si osservi che la generica disequazione razionale fratta:

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} > 0$$

sarà soddisfatta per quei valori della x per i quali i due polinomi $p(x)$ e $q(x)$ assumono valori dello stesso segno, i.e. le soluzioni della disequazione razionale fratta sono date dalle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} p(x) > 0 \\ q(x) > 0 \end{cases}, \quad \text{e da quelle del sistema:} \quad \begin{cases} p(x) < 0 \\ q(x) < 0 \end{cases}$$

Si vede così che la risoluzione di una equazione razionale fratta è riconducibile alla risoluzione di due sistemi di disequazioni razionali intere.

Esempio 21 Si supponga di voler risolvere la disequazione:

$$\frac{11}{2x+3} < \frac{5}{2-x}.$$

Trasportando tutti i termini nel primo membro ed eseguendo le operazioni indicate, si ottiene:

$$\frac{21x-7}{2x^2-x-6} > 0.$$

Dobbiamo quindi determinare le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} 21x-7 > 0 \\ 2x^2-x-6 > 0 \end{cases}, \quad \text{e da quelle del sistema:} \quad \begin{cases} 21x-7 < 0 \\ 2x^2-x-6 < 0 \end{cases}$$

Risolviendo i due sistemi si trova che il primo è soddisfatto per:

$$x > 2,$$

ed il secondo per:

$$-\frac{3}{2} < x < \frac{1}{3}.$$

Si conclude dunque che la disequazione data è soddisfatta per:

$$x \in \left] -\frac{3}{2}, \frac{1}{3} \right[\cup]2, +\infty[$$

Esercizio — Risolvere l'equazione:

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^2(x-1)}{x^2-2} \leq 0$$

■

Lasciamo al lettore il compito di verificare che :

- l'insieme di esistenza della $r(x)$ è $\mathbb{R} - \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.
- le soluzioni della disequazione data sono le x degli intervalli:

$$]-\infty, -\sqrt{2}[\cup [1, \sqrt{2}[.$$

E.2 Equazioni esponenziali

Definizione 6 Si chiama **equazione esponenziale** ogni equazione in cui l'incognita compare come esponente di una o più potenze.

Il caso più semplice di equazione esponenziale è l'equazione:

$$a^x = b, \tag{E.1}$$

detta **equazione esponenziale elementare**.

Osserviamo, prima di tutto, che in \mathbb{R} la (E.1) può avere soluzioni solo se $a > 0$ e $b > 0$ ¹; infatti:

- il primo membro della (E.1), che è una potenza a esponente reale, ha significato solo se a è **positivo**;
- inoltre a^x risulta sempre positiva, per *ogni* valore della x : pertanto l'equazione (E.1) può avere soluzioni soltanto se anche b è **positivo**.

Nell'ipotesi $a > 0$, $b > 0$, esaminiamo prima alcuni casi *particolari*:

- (1) Se è: $a = 1$, $b = 1$, l'equazione (E.1), diventa:

$$1^x = 1,$$

che è un'identità.

- (2) Se è: $a = 1$, $b \neq 1$, si ha l'equazione:

$$1^x = b \neq 1$$

¹ Se $a = 0$, allora $0^x = 0$ per ogni $x > 0$. In tal caso, l'equazione $0^x = b$ è **impossibile** se $b \neq 0$, è **indeterminata** se $b = 0$.

che è *impossibile*.

- (3) Se è: $a \neq 1$, $b = 1$, si ha l'equazione: $a^x = 1$, che ammette la soluzione $x = 0$, poichè è $a^0 = 1$.

Per gli altri casi, in cui a e b sono entrambi (positivi e) diversi da 1 sussiste il seguente:

Teorema 5 *Dati due numeri reali positivi a e b , con $a \neq 1$, l'equazione esponenziale:*

$$a^x = b,$$

ammette una e una sola soluzione. Tale soluzione è positiva se a e b sono entrambi maggiori di 1, o entrambi minori di 1; è negativa se dei due numeri a e b uno è maggiore di 1 e l'altro è minore di 1; è uguale a 0, se $b = 1$ e $a > 0$.

Esempio 22 *L'equazione*

$$6^{2-x} \cdot 3^{x+1} = 864$$

per le note proprietà delle potenze, si può scrivere sotto la forma:

$$\frac{6^2}{6^x} \cdot 3^x \cdot 3 = 864$$

ossia:

$$\left(\frac{3}{6}\right)^x \cdot 6^2 \cdot 3 = 864$$

o anche:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot 108 = 864 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = 8,$$

da cui si ricava:

$$x = -3,$$

che è l'unica soluzione dell'equazione data.

Esempio 23 *L'equazione:*

$$7^{x+2} \cdot 7^{x-3} = 343,$$

per note proprietà delle potenze, si può scrivere sotto la forma:

$$7^{x+2+x-3} = 7^3$$

ovvero:

$$7^{2x-1} = 7^3.$$

Dall'eguaglianza delle potenze e delle loro basi, si deduce l'eguaglianza degli esponenti, i.e. si ha:

$$2x - 1 = 3$$

ovvero

$$x = 2.$$

Esempio 24 *L'equazione*

$$5^{x^2-5x+7} = 125,$$

equivale alla:

$$5^{x^2-5x+7} = 5^3,$$

da cui si ricava:

$$x^2 - 5x + 7 = 3$$

ovvero:

$$x^2 - 5x + 4 = 0,$$

le cui soluzioni sono $x_1 = 1$ e $x_2 = 4$.

Esempio 25 *Risolvere l'equazione esponenziale:*

$$\left(3^{x+1}\right)^{x-2} \cdot 9^{3x+2} = 81^{x+2}.$$

Per le note proprietà delle potenze, l'equazione si può scrivere come:

$$3^{(x+1)(x-2)} \cdot 3^{2(3x+2)} = 3^{4(x+2)},$$

ossia:

$$3^{x^2+5x+2} = 3^{4x+8}.$$

Eguagliando gli esponenti, si ottiene l'equazione:

$$x^2 + 5x + 2 = 4x + 8$$

le cui soluzioni sono $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$, che sono anche le soluzioni dell'equazione data.

E.3 Equazioni e disequazioni irrazionali

Si considerino innanzitutto equazioni irrazionali del tipo:

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x).$$

Se n è pari, sia la funzione f che la funzione g devono essere positive, la prima in quanto argomento della radice n -esima, la seconda in quanto deve soddisfare l'uguaglianza prevista; una volta che ciò sia stato imposto, si possono elevare primo e secondo membro alla potenza n -esima ed ottenere un'equazione in cui non figura più la radice n -esima. Se n invece è dispari, non è necessario imporre la positività delle funzioni f e g e quindi si possono elevare

direttamente alla potenza n -esima entrambi i membri dell'equazione. Si conclude che l'equazione in esame è equivalente al seguente sistema:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) = [g(x)]^n \end{cases},$$

se n è pari, altrimenti è equivalente all'equazione:

$$f(x) = [g(x)]^n$$

se n è dispari.

Per quanto riguarda le disequazioni irrazionali conviene considerare separatamente i seguenti due casi:

$$\sqrt[n]{f(x)} \leq g(x), \quad f(x) \leq \sqrt[n]{g(x)}.$$

Se n è dispari entrambi i tipi di disequazioni sono equivalenti a quelle che si ottengono elevando entrambi i membri alla potenza n -esima. Se n è pari, con ragionamento analogo a quello svolto per le equazioni, si riconosce che la prima disequazione è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq [g(x)]^n \end{cases},$$

mentre la seconda è equivalente ai due sistemi:

$$\begin{cases} f(x) \leq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ [f(x)]^n \leq g(x) \end{cases}$$

nel senso che le soluzioni della disequazione sono date dall'unione delle soluzioni dei due sistemi.

Esempio 26 *Si consideri la disequazione*

$$\sqrt{x^2 - x - 2} < x + 1.$$

In base alla discussione precedente, essa è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \\ x^2 - x - 2 < x^2 + 2x + 1 \end{cases}$$

denotati con S_1, S_2 e S_3 , rispettivamente, gli insiemi delle soluzioni della prima, seconda e terza disequazione, si ottiene facilmente:

$$S_1 =]-\infty, -1[\cup [2, +\infty[, \quad S_2 = [-1, +\infty[, \quad S_3 =]-\infty, +\infty[$$

e, conseguentemente, la disequazione assegnata è soddisfatta nell'insieme

$$S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 = [2, +\infty[.$$

Al contrario, la disequazione opposta

$$\sqrt{x^2 - x - 2} > x + 1$$

è equivalente ai due sistemi seguenti:

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 \geq 0 \\ x + 1 < 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2 - x - 2 \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \\ x^2 - x - 2 > x^2 + 2x + 1 \end{cases}$$

in base alla discussione precedente, si riconosce facilmente che il primo sistema ha come soluzione l'insieme $S' =]-\infty, -1[$, mentre il secondo sistema non è mai soddisfatto ($S'' = \emptyset$); allora le soluzioni della disequazione sono date da

$$S = S' \cup S'' =]-\infty, -1[.$$

Si osservi che in questo caso alla fine viene considerata l'unione delle soluzioni dei due sistemi.

Esercizio — Risolvere la disequazione:

$$2 - x < \sqrt{x^2 - 1}.$$

■

Risulterà:

$$\begin{cases} 2 - x < 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2 - x \geq 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \\ 4 - 4x - x^2 < x^2 - 1 \end{cases}$$

Per quanto riguarda il primo sistema esso sarà soddisfatto per $S' =]2, +\infty[$. Il secondo sistema, invece, è soddisfatto per $S'' =]5/4, 2[$. Si conclude che le soluzioni della disequazione assegnata sono date dall'insieme:

$$S = S_1 \cup S_2 =]5/4, +\infty[.$$

E.4 Equazioni e disequazioni con valore assoluto

Per ogni $x \in \mathbb{R}$, il valore assoluto $|x|$ di x è definito ponendo:

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$

Un'equazione del tipo:

$$|f(x)| = g(x),$$

con f e g funzioni reali assegnate, può essere ricondotta facilmente ad un sistema di equazioni e disequazioni in cui non compare il valore assoluto. Infatti, tenendo presente che deve essere necessariamente $g(x) \geq 0$, le soluzioni sono date dai due sistemi:

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} ; \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$$

Esempio 27 L'equazione:

$$|x^2 + x + 1| = x^2 - 3x + 2$$

ha come soluzione quelle dei due sistemi:

$$\begin{cases} x^2 + x + 1 \geq 0 \\ x^2 + x + 1 = x^2 - 3x + 2 \end{cases} ; \begin{cases} x^2 + x + 1 \geq 0 \\ x^2 + x + 1 = -(x^2 - 3x + 2) \end{cases}$$

Il primo di essi è soddisfatto in $S_1 = (]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[) \cap \{1/4\} = \{1/4\}$; il secondo invece non ha soluzioni in quanto l'equazione

$$x^2 + x + 1 = -(x^2 - 3x + 2) \Leftrightarrow 2x^2 - 2x + 3 = 0$$

non è mai soddisfatta. Si conclude che l'equazione assegnata ammette come unica soluzione il punto $x = \{1/4\}$.

Si considerano ora le disequazioni che coinvolgono il valore assoluto. Anche in questo caso conviene considerare separatamente quelle che si presentano nella forma:

$$|f(x)| \leq g(x),$$

da quelle del tipo:

$$f(x) \leq |g(x)|$$

(nel caso di disuguaglianze strette i metodi di risoluzione sono del tutto analoghi e pertanto per brevità vengono omissi).

Tenendo presente che la disequazione $|x| \leq a$ non è mai soddisfatta se $a < 0$ ed è soddisfatta per $x \in [-a, a]$ se $a \geq 0$, la prima disequazione è equivalente al seguente sistema:

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ -g(x) \leq f(x) \\ f(x) \leq g(x) \end{cases}$$

in cui non è più coinvolto il valore assoluto.

Analogamente, tenendo presente che la disequazione $a \leq |x|$ è sempre soddisfatta se $a < 0$ ed è soddisfatta sia per $x \geq a$ che per $x \leq -a$ se $a \geq 0$, allora la seconda disequazione in esame è equivalente ai seguenti tre sistemi (nel senso che l'insieme delle soluzioni è dato dall'unione degli insiemi delle soluzioni dei tre sistemi)

$$\begin{cases} f(x) < 0 \\ x \in X_g \end{cases} ; \quad \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq f(x) \end{cases} ; \quad \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \leq -f(x) \end{cases}$$

dove nel primo sistema si è denotato con X_g l'insieme di definizione della funzione g (infatti la condizione $f(x) < 0$ assicura la validità di $f(x) \leq |g(x)|$ purchè anche la funzione g sia definita in x).

Esempio 28 *Si consideri la disequazione:*

$$|x^2 - 9x + 7| \leq 7.$$

Da quanto osservato, essa si riconduce al sistema:

$$\begin{cases} 7 \geq 0 \\ x^2 - 9x + 7 \leq 7 \\ -7 \leq x^2 - 9x + 7 \end{cases}$$

La prima disequazione è sempre soddisfatta ($S_1 = \mathbb{R}$). La seconda si può scrivere come:

$$x^2 - 9x \leq 0$$

che è soddisfatta in $S_2 = [0, 9]$, mentre la terza disequazione, che si può scrivere come:

$$x^2 - 9x + 14 \geq 0$$

poichè è $\Delta = 25$, si hanno due radici $x_1 = 2$ e $x_2 = 7$ e la disequazione è soddisfatta per $x \leq 2$ o per $x \geq 7$, i.e. in $S_3 =]-\infty, 2] \cup [7, +\infty[$. Quindi la

disequazione assegnata ha come soluzione l'insieme

$$S = [0, 2] \cup [7, 9].$$

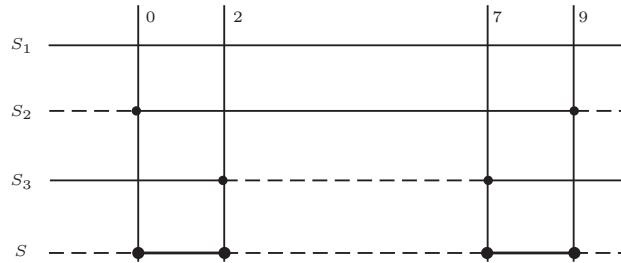


Figura E.3. Determinazione delle soluzioni della disequazione data.

Esercizio — Si risolva la disequazione:

$$x + 1 < |x^2 - 3x - 8|$$

■

Si tenga presente che la disequazione data si riconduce ai tre sistemi:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 1 < 0 \\ x^2 - 3x - 8 < -x - 1 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} x + 1 \geq 0 \\ x^2 - 3x - 8 < -x - 1 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} x + 1 \geq 0 \\ x + 1 < x^2 - 3x - 8 \end{array} \right.$$

Risulta che le soluzioni della disequazione sono date dall'insieme:

$$S =]-\infty, 1 + 2\sqrt{2}[\cup]2 + \sqrt{13}, +\infty[.$$

F Chi era ... ?

F.1 Niccolò Tartaglia

Nacque da una famiglia poverissima. Durante la presa di Brescia da parte dei francesi nel 1512 il padre fu ucciso e lui stesso ferito alla mandibola e al palato. Dato per morto, sopravvisse grazie alle cure della madre, ma gli rimase una evidente difficoltà ad articolare le parole. Per questo ebbe il soprannome Tartaglia che accettò e lui stesso utilizzò tutta la vita per firmare le sue opere.

Non poté frequentare alcuna scuola da giovane ed era molto fiero di essere autodidatta. Nei suoi scritti, si vanta infatti di essere andato a scuola di scrittura



Figura F.1. Niccolò Fontana, detto Tartaglia.

solo per 15 giorni, all'età di 14 anni. Grazie alla sua abilità, poté comunque guadagnarsi da vivere a Verona risolvendo l'equazione cubica o equazione di terzo grado. In realtà la formula era stata trovata, ma non pubblicata, da Scipione Dal Ferro nei primi del 1500, e fu nuovamente inventata dal Tartaglia una ventina di anni dopo, mentre sullo stesso problema lavoravano anche il professore Gerolamo Cardano e al suo discepolo Ludovico Ferrari più o meno nello stesso periodo.

A Tartaglia dobbiamo tra l'altro la prima traduzione italiana degli Elementi di Euclide (1543).

In un trattato *Quesiti e inventioni diverse* si interessa anche di balistica e di fortificazioni.

F.2 Blaise Pascal

Blaise Pascal (Clermont-Ferrand, Puy-de-Dôme, Francia, 19 giugno 1623 - Parigi, 19 agosto, 1662) fu un matematico, fisico, filosofo e religioso francese. I suoi contributi alle scienze naturali comprendono: la costruzione di calcolatori meccanici, considerazioni sulla teoria della probabilità, studi sui fluidi, e la chiarificazione di concetti come pressione e vuoto. Seguendo una profonda



Figura F.2. Blaise Pascal.

esperienza religiosa, nel 1654, Pascal abbandonò la matematica e la fisica per la filosofia e la teologia.

Gli storici dell'informatica riconoscono il suo contributo in questo campo quando, appena diciottenne, iniziò a costruire calcolatori meccanici capaci di addizioni e sottrazioni (il Museo Zwinger di Dresda in Germania mostra uno dei suoi calcolatori originali). All'età di sedici anni elaborò anche un trattato sulle sezioni coniche. Nel 1654, spinto dall'interesse di un amico in problemi legati alle scommesse, avviò una corrispondenza con Fermat e stese un piccolo saggio sulle probabilità.

Più tardi formulò *la Scommessa di Pascal*, un'argomentazione per la fede in Dio basata sulle probabilità (ma i misteri della Divinità - ebbe a dire - sono troppo sacri per essere profanati dalle nostre dispute; e chissà se Einstein pensasse a lui nell'affermare che Dio non gioca a dadi).

Il *Triangolo di Pascal*, un modo di presentare i coefficienti binomiali, porta il suo nome, anche se i matematici conoscevano tali coefficienti già da tempo.



Figura F.3. Isaac Newton.

F.3 Isaac Newton

Sir Isaac Newton, (25 dicembre 1642 - 20 marzo 1727 del calendario giuliano; 4 gennaio 1643 - 31 marzo 1727 del calendario gregoriano) fu un alchimista, matematico, fisico, scienziato e filosofo inglese.

Pubblicò la *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1687), dove descrisse la legge di gravitazione universale e, attraverso le sue leggi del moto, creò i fondamenti per la meccanica classica. Newton inoltre condivise con Gottfried Wilhelm Leibniz la paternità dello sviluppo del calcolo differenziale. Fu Presidente della Royal Society.