Disuguaglianze.

Biagio Raucci

Sommario

In questo secondo capitolo discuteremo e dimostreremo alcune disuguaglianze notevoli.

Key words: Diseguaglianze.
VERS: 1.0

1 Valore assoluto

Introdurremo, in questo terzo modulo, alcune disuguaglianze che sono importanti, per così dire, da un punto di vista tecnico, i.e. sono strumenti per ottenere ulteriori risultati.
Introduciamo, subito, la funzione **valore assoluto** o modulo del numero reale x che si indica con $|x|$:

$$|x| : x \in \mathbb{R} \to \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

i.e. il modulo di x è il numero x stesso se x è positivo, lo zero se $x = 0$ e l'opposto di x se x è negativo.
Risulta che se $x, y \in \mathbb{R}$:

$$|xy| = |x|\,|y| \tag{1}$$

$$|x + y| \leqslant |x| + |y| \tag{2}$$

Dimostriamo la (1).
Dalla definizione si ha:

$$x^2 = |x|^2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Email address: raucci@gmail.com (Biagio Raucci).

risulta, allora:

$$(|x| \cdot |y|)^2 = |x|^2 \cdot |y|^2 = x^2y^2 = (xy)^2 = |xy|^2$$

da cui la tesi estraendo la radice quadrata. Infatti:

$$t \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{t^2} = t \quad \text{ se e solo se } t \geqslant 0.$$

Dimostriamo la (2).
Si ha:

$$\begin{aligned}|x+y|^2 &= (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \leqslant |x|^2 + 2\,|xy| + |y|^2 = \\ &= |x|^2 + 2\,|x|\,|y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2\end{aligned}$$

da cui la tesi estraendo la radice quadrata.
Osserviamo che:

$$|x| \geqslant 0, \qquad |-x| = |x|\,, \qquad x \leqslant |x| \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Da queste si trae facilmente che:

$$-\,|x| \leqslant x \leqslant |x| \qquad \forall x \in \mathbb{R} \tag{4}$$

dove, se $x \neq 0$, la doppia disuguaglianza va intesa come uguaglianza alternativa, nel senso che:

$$\begin{aligned} -\,|x| = x < |x| \text{ se } x < 0 \\ -\,|x| < x = |x| \text{ se } x > 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Da (3) e (5) consegue che, qualunque sia $\alpha > 0$ con $\alpha \in \mathbb{R}$, si ha:

$$|x| \leqslant \alpha \qquad \Leftrightarrow \qquad -\alpha \leqslant x \leqslant \alpha.$$

2 La media geometrica e la media aritmetica

La diseguaglianza che vogliamo adesso mostrare riguarda il confronto fra le cosiddette medie: la media geometrica e la media aritmetica.
Siano $x, y \in \mathbb{R}^+$, la *media aritmetica* o *media* è la semisomma dei due numeri:

$$\frac{x+y}{2}$$

mentre la *media geometrica* è:

$$\sqrt{xy}.$$

Risulta:

$$\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2} \tag{6}$$

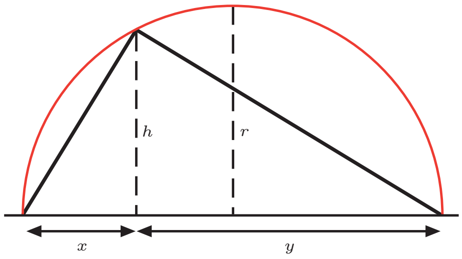

Figura 1. Giustificazione geometrica della (6) .

(dove l'uguaglianza vale se e solo se $x = y$).
Infatti, osservando la costruzione di figura 1, abbiamo:

$$r = \frac{x+y}{2};$$

risulta quindi:

$$\frac{x}{h} = \frac{h}{y} \Rightarrow xy = h^2 \Rightarrow \sqrt{xy} = h \leqslant r = \frac{x+y}{2}.$$

Algebricamente, invece:

$$0 \leqslant \sqrt{xy} \overset{?}{\leqslant} \frac{x+y}{2}$$

ovvero:

$$4xy \overset{?}{\leqslant} (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

ossia:

$$0 \overset{?}{\leqslant} x^2 + 2xy + y^2 - 4xy = x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$$

e quindi la (6) è dimostrata perchè $(x-y)^2$ è una quantità sempre positiva.
La cosa interessante, però, è che la (6) è vera anche per n numeri.
Se abbiamo n numeri non negativi

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \qquad \text{con } n \geqslant 2$$

la **media geometrica** degli n numeri, i.e.

$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

non supera la **media aritmetica** degli n numeri

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

ovvero:

$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = A. \tag{7}$$

(dove il segno di uguaglianza vale solo se i numeri sono tutti uguali fra di loro).
Se uno degli x_i è nullo, allora la $G = 0$ mentre la quantità A è maggiore di zero.
La (7) si dimostra per induzione con base d'induzione $n = 2$. Il passo induttivo

consiste nel mostrare che se la (7) è vera per n allora sarà necessariamente vera anche per $n+1$.

Teorema 1 *Se $n \in \mathbb{N}^+$ e se $x_1, \ldots, x_n$ sono n numeri non negativi, allora:*

$$G = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k = A$$

inoltre vale il segno di uguaglianza se e solo se gli x_k sono tutti uguali fra loro.

Dimostrazione — Se x_k sono tutti uguali fra loro allora $G = A$.
Mostreremo allora che se gli x_k non sono uguali fra loro allora $G < A$; ciò è ovvio se qualche x_k è nullo, perchè in tal caso si ha $G = 0 < A$.
Possiamo dunque supporre $x_k > 0, \qquad \forall k \in \{1, \ldots, n\}$ e non tutti uguali fra di loro. Proveremo che $G < A$ per induzione.
Per $n = 2$ si ha:

$$\sqrt{x_1 \cdot x_2} \overset{?}{<} \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \Leftrightarrow 4(x_1 \cdot x_2) \overset{?}{<} (x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$$

ovvero:

$$0 \overset{?}{<} x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 - x_2)^2$$

che è chiaramente vera perchè, per ipotesi, è $x_1 \neq x_2$.
Supponiamo che $G < A$ per ogni $n-$pla di numeri non tutti uguali, e dimostriamola nel caso di $n+1$ numeri.
Prendiamo, dunque, $n+1$ numeri positivi non tutti uguali: allora ce ne sarà almeno uno diverso da A; per definizione stessa di media aritmetica di numeri diversi da A ce ne saranno almeno due, x_i e x_j, dei quali uno sarà maggiore ed uno sarà minore di A. Quindi, a meno di riordinare gli x_k, non è restrittivo supporre:

$$x_n < A < x_{n+1}.$$

Risulta:

$$\sum_{k=1}^{n+1} x_k = (n+1)A \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n-1} x_k + x_n + x_{n+1} = nA + A \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n-1} x_k + x_n + x_{n+1} - A = nA$$

ovvero:

$$\frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n-1} x_k + (x_n + x_{n+1}) - A\right] = A$$

quindi A è *anche* la media geometrica degli n numeri non negativi:

$$\underbrace{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n + x_{n+1} - A}_{n \text{ numeri}}$$

Per ipotesi induttiva è:

$$\sqrt[n]{(x_n + x_{n+1} - A) \prod_{k=1}^{n-1} x_k} \leqslant A$$

ovvero:

$$(x_n + x_{n+1} - A) \prod_{k=1}^{n-1} x_k \leqslant A^n$$

e quindi:

$$A\,(x_n + x_{n+1} - A) \prod_{k=1}^{n-1} x_k \leqslant A^{n+1}.$$

D'altra parte risulta:

$$x_n x_{n+1} < A\,(x_n + x_{n+1} - A)$$

in quanto:

$$\begin{aligned} A\,(x_n + x_{n+1} - A) - x_n x_{n+1} &= A x_n + A x_{n+1} - A^2 - x_n x_{n+1} \\ &= (A - x_n)\,(x_{n+1} - A) > 0. \end{aligned}$$

Quindi è:

$$\prod_{k=1}^{n+1} x_n = (x_n x_{n+1}) \prod_{k=1}^{n-1} x_n < A\,(x_n + x_{n+1} - A) \prod_{k=1}^{n-1} x_n \leqslant A^{n+1}$$

La disuguaglianza per $n+1$ numeri è dunque stretta se non sono tutti uguali. Per induzione la tesi è provata. □

Dalla disuguaglianza della media segue subito l'importante disuguaglianza:

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \qquad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Infatti, scegliendo

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n &= \prod_{k=1}^{n+1} x_k < \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} x_k\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{n+1}\left[n\left(1 + \frac{x}{n}\right) + 1\right]\right)^{n+1} \\ &= \left(\frac{n+x+1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

Esempio 1 *Sia $a > 1$. Ci proponiamo di trovare una maggiorazione per $\sqrt[n]{a}$, i.e. una quantità che è maggiore di $\sqrt[n]{a}$.*
Risulta:

$$1 < \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{n-1 \text{ volte}}} \leqslant \frac{a+n-1}{n} = 1 + \frac{a-1}{n}.$$

Quindi, ad esempio:

$$1 < \sqrt[3]{1.2} < 1 + \frac{0.2}{3} = 1 + \frac{2}{30}.$$

3 Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

Un'altra importante diseguaglianza che, come si vedrà, ha un rilevante significato geometrico è la seguente:

Teorema 2 *Fissato $n \in \mathbb{N}$, siano $a_1, \ldots, a_n$ e $b_1, \ldots, b_n$ numeri reali. Allora si ha:*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}. \tag{8}$$

Dimostrazione — Fissato $t \in \mathbb{R}$, consideriamo la quantità, certamente non negativa:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + tb_i)^2.$$

Si ha:

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \sum_{i=1}^{n} (a_i + tb_i) &= \sum_{i=1}^{n} \left(a_i^2 + 2a_i t b_i + t^2 b_i^2\right) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2t \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + t^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \qquad \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Quest'espressione è un trinomio di secondo grado nella variabile reale t. Il fatto che esso sia non negativo iplica che il discriminante sia non positivo:

$$\Delta = 4 \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - 4 \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leqslant 0$$

d'onde la tesi. □

4 Disuguaglianza di Bernoulli

Per ogni $x \in [-1, +\infty[$ e $\forall n \in \mathbb{N}$, vale la seguente minorazione per la radice $n-$ma:

$$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx \tag{9}$$

Per $n = 0$ e $n = 1$ la (9) è vera.
Scegliamo:

$$x_1 = 1 + nx$$

(che possiamo supporre positivo perchè altrimenti la (9) è ovviamente vera) e

$$\underbrace{x_2 = \ldots = x_n}_{n-1} = 1.$$

Si ha:

$$\sqrt[n]{1+nx} \leqslant \frac{(1+nx)+(n-1)}{n} = x+1$$

da cui:

$$1+nx \leqslant (1+x)^n .$$

Esercizio — Si dimostri, per induzione, la (9). ■

Vogliamo mostrare che:

$$P(n) := 1+nx \leqslant (1+x)^n .$$

Per $n=0$ si ha che $P(0)$ è vera; supponiamo che $P(k)$ sia vera (con $k \in \mathbb{N}$) e mostriamo che:

$$P(k) \Rightarrow P(k+1)$$

Si ha:

$$\begin{aligned}(1+x)^k \cdot (1+x) &\geqslant (1+kx)\cdot(1+x) \\ &\geqslant 1+x+kx+kx^2 \geqslant 1+(k+1)x\end{aligned}$$

così facendo abbiamo dimostrato, per induzione, la disuguaglianza di Bernoulli.

A Rette nel piano

Definizione 1 (Retta) *Una **retta** è il luogo dei punti del piano tali che $ax+by+c=0$ ossia:*

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : ax+by+c=0 \ \text{con } a,b,c \in \mathbb{R}\}.$$

L'equazione

$$ax+by+c=0$$

*è **l'equazione generale della retta**.*

A.1 Disegnare una retta data che sia la sua equazione

Per due punti distinti passa una e una sola retta sicchè, per disegnare una retta, è sufficiente trovare due punti distinti della retta stessa.

Esempio 2 *Disegnare la retta di equazione:*

$$3x-4y+1=0.$$

Osserviamo che l'equazione data può scriversi come:

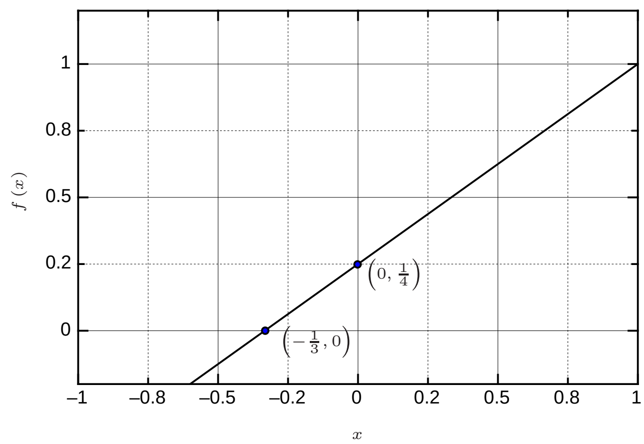

Figura A.1. Grafico della retta di equazione $y = f(x)$.

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$$

da cui è chiaro che i punti:

$$\left(0, \frac{1}{4}\right) \quad ; \quad \left(-\frac{1}{3}, 0\right)$$

sono due punti della retta.

A.2 Casi particolari

$$a = 0 \Rightarrow by + c = 0 \Rightarrow y = -\tfrac{c}{b}$$
$$b = 0 \Rightarrow ax + c = 0 \Rightarrow x = -\tfrac{c}{a}$$

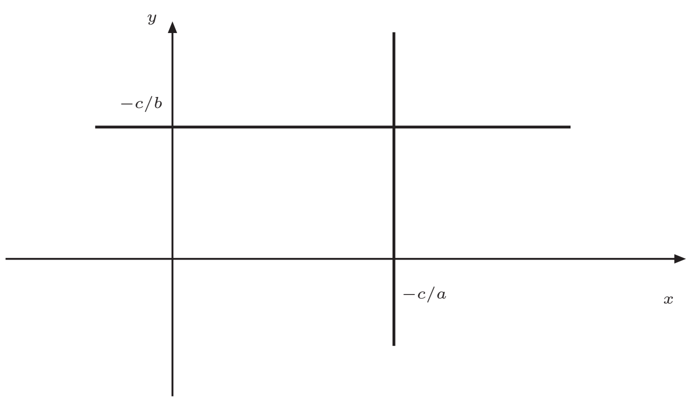

Figura A.2. Rette parallele agli assi coordinati.

Se $b \neq 0$, allora è:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

Posto $m = -\frac{a}{b}$, $q = -\frac{c}{b}$, abbiamo:

$$y = mx + q. \tag{A.1}$$

La (A.1) è l'**equazione esplicita della retta**; m è il **coefficiente angolare** della retta mentre q è l'**ordinata all'origine**.

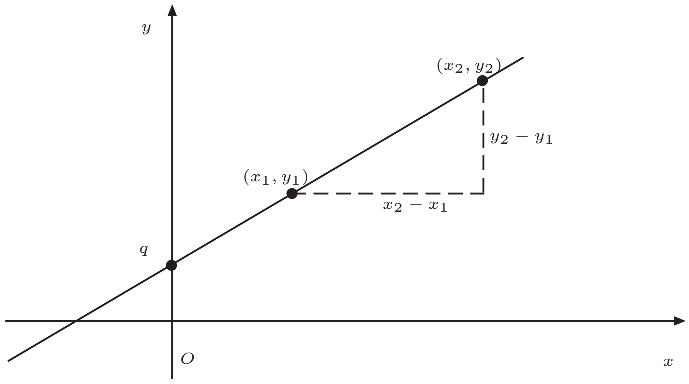

Figura A.3. Retta: nomencatura.

A.3.1 Significato geometrico del coefficiente angolare

Siano (x_1, y_1) e (x_2, y_2) due punti sulla retta di equazione (A.1). Allora:

$$\begin{cases} y_1 = mx_1 + q \\ y_2 = mx_2 + q \end{cases} \Rightarrow y_1 - y_2 = m\,(x_1 - x_2)$$

allora:

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

ovvero: m è la pendenza della retta.

B Logaritmi

Quando abbiamo parlato di equazioni esponenziali abbiamo detto che dati due numeri positivi a e b, con $a \neq 1$, l'equazione $a^x = b$ ammette una e una sola soluzione. Tale soluzione si chiama *logaritmo di b di base a* e si indica come:

$$x = \log_a b.$$

Si pone, cioè, la seguente definizione:

Definizione 2 *Dati due numeri a e b, con $a \neq 1$, si chiama logaritmo in base a del numero b, l'unica soluzione dell'equazione $a^x = b$, i.e. quell'unico numero α che dato per esponente ad a rende la potenza $a^\alpha = b$.*

Pertanto le scritture:

$$\alpha = \log_a b \quad \text{e} \quad a^\alpha = b, \quad \text{i.e.} \quad a^{\log_a b} = b$$

sono equivalenti.
Il numero b si chiama *argomento* del logaritmo e, per quanto detto, dev'essere un numero **positivo**.

Osservazione 1 *La definizione di logaritmo permette di affermare che: ogni numero reale positivo b si può scrivere, in modo unico, come potenza di un altro qualsiasi numero a positivo, diverso da 1.*
É infatti:

$$b = a^{\log_a b}.$$

Non esiste il logaritmo di un numero negativo.

L'insieme dei logaritmi di tutti i numeri positivi, rispetto a una base a, si chiama **sistema dei logaritmi a base** a.
Esistono, naturalmente, infiniti sistemi di logaritmi, perchè infinite sono le possibili basi (i.e. tutti i numeri *positivi, diversi da a.*
Tra questi infiniti sistemi di logaritmi, due sono quelli che comunemente si considerano, e precisamente:

- quella a base e, numero irrazionale cha vale, a meno di 10^{-5}, 2.71828.
  Tale sistema è detto **sistema dei logaritmi naturali o nepriani**. Il logaritmo naturale di un numero positivo N, viene indicato con:

  $$\ln N,$$

  invece che $\log_e N$.
- Quello a base 10, detto **sistema dei logaritmi decimali**.
  Il logaritmo decimale di un numero positivo N, viene indicato con:

  $$\log N,$$

  invece che $\log_{10} N$, omettendo l'indicazione della base 10.

B.1 Proprietà dei logaritmi

Il calcolo dei logaritmi si fonda su alcune importanti proprietà valide **qualunque** sia la base a positiva e diversa da 1.
Il lettore tenga presente che, negli enunciati di tali proprietà, i logaritmi sono sempre riferiti alla stessa base.
Qualunque sia la base a positiva, diversa da 1, si ha:

(1) Il logaritmo del prodotto di due (o più) numeri positivi b e c è uguale alla somma dei logaritmi dei singoli fattori; i.e.:

$$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c \tag{B.1}$$

Infatti, posto:

$$x = \log_a b \quad \text{e} \quad y = \log_a c,$$

si ha, per definizione di logaritmo:

$$a^x = b \quad \text{e} \quad a^y = c.$$

Moltiplicando, membro a membro le equazioni precedenti, si ha:

$$a^x \cdot a^y = b \cdot c \Leftrightarrow a^{x+y} = b \cdot c$$

e ricordando la definizione di logaritmo:

$$\log_a (b \cdot c) = x + y \Leftrightarrow \log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

(2) Il logaritmo di una potenza ad esponente reale e base positiva, è uguale al prodotto dell'esponente della potenza per il logaritmo della base della potenza, i.e.:

$$\log_a b^c = c \log_a b \tag{B.2}$$

Infatti, posto $x = \log_a b$, i.e. $a^x = b$, si ottiene:

$$(a^x)^c = b^c, \quad \text{ossia} \quad a^{cx} = b^c.$$

Da quest'ultima eguaglianza, per definizione di logaritmo, si ha:

$$\log_a b^c = cx$$

ossia, tenendo conto che $x = \log_a b$, si ottiene:

$$\log_a b^c = c \log_a b,$$

come volevamo provare.

(3) Il logaritmo del quoziente di due numeri positivi b e c è uguale alla differenza fra il logaritmo del dividendo e del divisore, i.e.

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c.$$

Infatti, si ha:

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a \left(b \cdot c^{-1}\right) = \log_a b + \log_a c^{-1} = \log_a b + (-1)\log_a c = \\ = \log_a b - \log_a c.$$

(4) Il logaritmo di un radicale è uguale al quoziente del logaritmo del radicando per l'indice del radicale, i.e.:

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n}\log_a b$$

Infatti, si ha successivamente:

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \log_a b^{1/n} = \frac{1}{n}\log_a b.$$

B.2 Passaggio da un sistema di logaritmi a un altro

Siccome esistono infiniti sistemi di logaritmi, è naturale chiedersi come sia possibile passare da un sistema di logaritmi a un altro.
In altre parole, supposto conosciuto il logaritmo di un numero positivo N, rispetto a una base a, vogliamo trovare il logaritmo dello stesso numero, rispetto a un'altra base b. A tale scopo, posto:

$$x = \log_b N, \quad \text{cioè :} \quad b^x = N$$

da cui, tenendo presente che $x = \log_b N$, si ottiene:

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$$

i.e.: *il logaritmo di un numero positivo N, rispetto a una nuova base b, è uguale al quoziente del logaritmo (noto) rispetto alla base a e il logaritmo, in base a, della nuova base.*

B.3 Equazioni logaritmiche

Un'equazione si dice **logaritmica** quando in essa compare il logaritmo dell'incognita, o di qualche espressione contenente l'incognita.

Per risolvere un'equazione logaritmica si cerca di trasformare l'equazione sotto forma:

$$\log_a A(x) = \log_a B(x) \tag{B.3}$$

dove $A(x)$ e $B(x)$ sono espressioni algebriche contenenti l'incognita x.
Da qui segue che i valori della x che soddisfano la (B.3), devono anche soddisfare l'equazione:

$$A(x) = B(x)\,. \tag{B.4}$$

Si noti però che non vale la proprietà inversa, i.e. una soluzione della (B.4) può non soddisfare la (B.3) e ciò capita quando tale soluzione fa perdere di significato ad almeno un logaritmo della (B.3).
Perciò, dopo aver risolto la (B.4), bisogna verificare se le soluzioni trovate soddisfano o no l'equazione data.

Esempio 3 *Risolvere l'equazione logaritmica:*

$$\log(x+1) + \log(x-1) - \log(x-2) = \log 8.$$

Si osservi, prima di tutto, che i logaritmi contenuti nell'equazione data avranno significato soltanto se alla x attribuiamo valori tali da rendere positivi, simultaneamente, i tre polinomi: $x+1$, $x+2$ e $x-1$, i.e. tale da aversi:

$$\begin{cases} x+1>0 \\ x-1>0 \\ x-2>0 \end{cases}$$

Premesso ciò, l'equazione data può essere scritta nella forma:

$$\log\frac{(x+1)(x-1)}{x-2} = \log 8,$$

da cui, passando dai logaritmi ai numeri:

$$\frac{(x+1)(x-1)}{x-2} = 8 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 8x + 15 = 0,$$

le cui soluzioni sono $x_1 = 5$ e $x_2 = 3$, che sono entrambe accettabili, com'è facile verificare.

Esempio 4 *Risolvere l'equazione logaritmica:*

$$\frac{1}{2}\log x + \frac{1}{2}\log(3x+5) = 1.$$

Innanzitutto dev'essere $x > 0$. Premesso ciò e ricordando che $\log 10 = 1$, l'equazione data può scriversi come:

$$\log\sqrt{x} + \log\sqrt{3x+5} = \log 10$$

ovvero:

$$\log \sqrt{x\,(3x+5)} = \log 10.$$

Passando dai logaritmi ai numeri si ottiene l'equazione:

$$\sqrt{x\,(3x+5)} = 10$$

ossia:

$$3x^2 + 5x - 100 = 0$$

le cui soluzioni sono:

$$x_1 = 5, \quad x_2 = -\frac{20}{3},$$

e soltanto quella positiva è accettabile.

Esercizio — Risolvere l'equazione logaritmica:

$$\frac{\log x + 5}{\log x + 2} - \frac{2}{5}\,(\log x + 5) = -\frac{2}{5}.$$

■

Innanzitutto dev'essere $x > 0$. Premesso ciò l'equazione data può essere trasformata nel seguente modo:

$$5 \log x + 25 - 2\,(\log x + 5)\,(\log x + 2) = -2\,(\log x + 2)\,,$$

ossia, dopo facili calcoli:

$$2\,(\log x)^2 + 7 \log x - 9 = 0,$$

che è un'equazione di secondo grado nell'incognita $\log x$, che, risolta, dà:

$$\log x = 1 \text{ e } \log x = -\frac{9}{2}.$$

Da $\log x = 1$, segue $x = 10$; e da $\log x = -\frac{9}{2}$ segue:

$$x = 10^{-\frac{9}{2}} = \frac{1}{10^4 \sqrt{10}}$$

ed entrambi le soluzioni sono accettabili, perchè positive.

B.4 Disequazione logaritmiche

Per risolvere una disequazione logaritmica, i.e. una disequazione in cui compare il logaritmo dell'incognita, occorre tener presente che:

- la funzione logaritmica è **biettiva**;

- la funzione logaritmica è monotona:
  · **crescente** se $a > 1$;
  · **decrescente** se $0 < a < 1$.

Per risolvere quindi una disequazione logaritmica si cerca, servendosi dei teoremi sui logaritmi, di scrivere le disequazioni sotto la forma:

$$\log_a A(x) > b \tag{B.5}$$

oppure sotto la forma:

$$\log_a A(x) < b. \tag{B.6}$$

- Se $a > 1$, la (B.5) equivale a :

$$A(x) > a^b$$

  mentre la (B.6) equivale al sistema:

$$\begin{cases} A(x) > \ 0 \\ \\ A(x) < \ a^b \end{cases}$$

- Se $0 < a < 1$, la (B.5) equivale al sistema:

$$\begin{cases} A(x) > \ 0 \\ \\ A(x) < \ a^b \end{cases}$$

  mentre la (B.6) equivale a:

$$A(x) > a^b.$$

Esempio 5 *Risolvere la disequazione:*

$$\log\left(2x^3 - 7x + 103\right) > 2.$$

La disequazione data è equivalente alla:

$$2x^3 - 7x + 103 > 2^2$$

che è soddisfatta per:

$$x < \frac{1}{2} \quad \textit{e per} \quad x > 3.$$

Esercizio — Risolvere la disequazione:

$$\log\left(x^2 - 7x + 11\right) < 0.$$

■

Questa disequazione è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x^2 - 7x + 11 > & 0 \\ \\ x^2 - 7x + 11 < & 10^0 = 1 \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema si trova che è soddisfatto per:

$$x \in \left]2, \frac{7-\sqrt{5}}{2}\right[\quad \text{e per} \quad x \in \left]\frac{7+\sqrt{5}}{2}, 5\right[$$

C Chi era ...?

C.1 Augustin Louis Cauchy

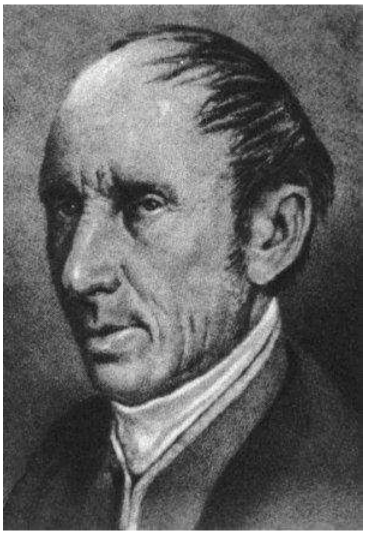

Figura C.1. Augustin Louis Cauchy.

Augustin Louis Cauchy (Parigi 21 agosto 1789 - Sceaux, Seine 23 maggio 1857), matematico francese, ha avviato il progetto della formulazione e dimostrazione rigorosa dei teoremi dell'analisi infinitesimale basato sull'utilizzo delle nozioni di limite e di continuità. Ha dato anche importanti contributi alla teoria delle funzioni di variabile complessa e alla teoria delle equazioni differenziali. La sistematicità e il livello di questi suoi lavori lo collocano tra i padri dell'Analisi matematica.

A Cauchy si devono alcuni dei primi studi sui gruppo di permutazioni e per questi viene considerato anche uno dei fondatori della teoria dei gruppi. Egli ottenne anche importanti risultati nella teoria dei numeri. Ottenne inoltre dei notevoli risultati nella teoria degli errori. In astronomia ottenne una trattazione più semplice del moto dell'asteroide Pallade. Infine va ricordata una sua impostazione dell'ottica favorevole alla teoria ondulatoria, successivamente però risultata fisicamente insoddisfacente.

Cauchy è stato un autore molto prolifico: la raccolta di tutte le sue opere ha richiesto 27 volumi e portano il suo nome vari enti matematici, ad es. successione di Cauchy, e numerosi teoremi dell'analisi. Il complesso delle sue attività lo collocano tra i più grandi matematici.

C.2 Jakob Bernoulli

Figura C.2. Jakob Bernoulli.

Jakob Bernoulli, matematico e scienziato svizzero, 27 dicembre 1654 - 16 agosto 1705. Fratello maggiore di Johann Bernoulli, zio di Daniel Bernoulli. Viene chiamato pure Jacques Bernoulli.

Nato a Basilea (Svizzera) nel 1654, Jakob Bernoulli seguì la volontà di suo padre cominciando gli studi in teologia, ma nel 1676 incontrò Robert Boyle durante un viaggio in Inghilterra, e si dedicò così alle scienze e alla matematica. Nel 1682 divenne lettore all'Università di Basilea e nel 1687 professore di matematica. Sviluppò il calcolo infinitesimale.

Ha tenuto una corrispondenza con Gottfried Leibniz dai cui primi scritti sull'argomento apprese il calcolo differenziale che sviluppò nei decenni successivi, con la collaborazione del fratello, Johann, e sempre sotto la supervisione dello stesso Leibniz. I suoi primi scritti sulle curve trascendentali (1696) e isoperimetria (1700, 1701) sono i primi esempi di tali applicazioni.

La sua opera principale è *Ars Conjectandi* del 1713, un lavoro fondamentale della teoria delle probabilità. I concetti campionamento bernoulliano, teorema di Bernoulli, variabile casuale Bernoulliana e numeri di Bernoulli sono legati ai suoi lavori e nominati in suo onore.

Inoltre il primo teorema del limite centrale, ovvero la legge dei grandi numeri, venne formulata da Jakob.