

I vettori.

Biagio Raucci

Sommario

In questo fascicolo s'introdurrà l'entità matematica denominata *vettore*; le proprietà del vettore e l'algebra dei vettori saranno brevemente discusse.

Key words: Diseguaglianze.

VERS: 1.0

1 I vettori

Un vettore nello spazio tridimensionale è un segmento orientato. Gli elementi

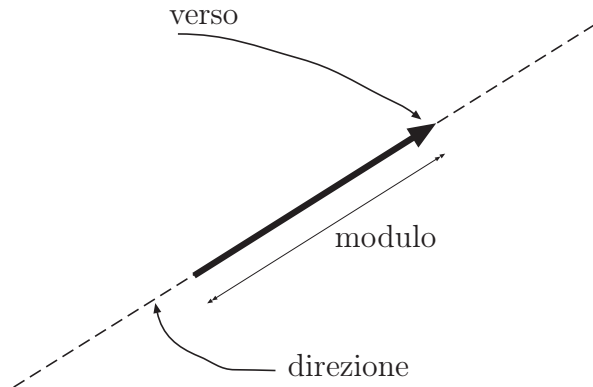


Figura 1. Vettore.

che caratterizzano un vettore sono:

- **direzione:** la retta su cui giace il segmento;
- **verso:** uno dei due possibili versi su questa retta;
- **punto di applicazione:** punto di inizio del segmento, ovvero il punto che precede tutti gli altri punti del segmento;
- **modulo** o **intensità:** lunghezza del segmento.

Email address: raucci@gmail.com (Biagio Raucci).

1 marzo 2007

Un vettore viene normalmente indicato con uno dei seguenti simboli:

$$\vec{v}, \quad \overrightarrow{AB}, \quad \mathbf{v}.$$

Il **modulo del vettore** \mathbf{v} viene indicato con $|\mathbf{v}|$ (ma anche, come chiariremo dopo, con $\|\mathbf{v}\|$) o più semplicemente con v . Il modulo di un vettore, geometricamente, è la *lunghezza* del vettore.

Se prendiamo un qualsiasi vettore del piano $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ quanto varrà la sua lunghezza? Semplicemente:

$$\text{lunghezza di } \mathbf{u} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Questa quantità nel "linguaggio degli spazi vettoriali" si chiama **norma** del vettore e si indica con $\|\mathbf{u}\|$:

$$\|\mathbf{u}\| = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Esempio 1 *Se*

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

allora :

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$$

Se \mathbf{u} è un vettore dello spazio, quindi $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, la sua norma (la sua lunghezza) è:

$$\|\mathbf{u}\| = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Per rappresentare graficamente un vettore entrante o uscente dal foglio il sistema unicode ha previsto i seguenti simboli:

- vettore entrante nel foglio : \otimes
- vettore uscente dal foglio : \odot

1.1 Operazioni con i vettori

1.1.1 Somma vettoriale

La somma di due vettori \mathbf{a} e \mathbf{b} aventi lo stesso punto di applicazione è definita come il vettore $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, diagonale del parallelogramma formato dai vettori \mathbf{a} e \mathbf{b} (vedi figura 2).

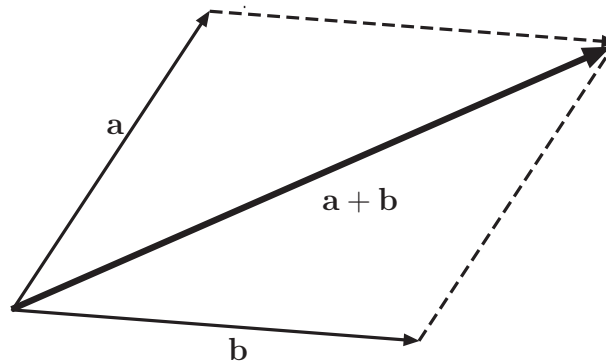


Figura 2. Somma di due vettori: costruzione grafica.

$\mathbf{a} + \mathbf{b}$ appartiene allo stesso piano di \mathbf{a} e \mathbf{b} . La somma gode delle seguenti proprietà:

- $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ è ancora un vettore (cioè " + " è legge di composizione interna);
- $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ (proprietà associativa)
- esiste l' elemento neutro rispetto alla somma; il vettore zero, $\mathbf{0}$ è un segmento degenerare di lunghezza zero, cioè un punto;
- esiste l' elemento opposto rispetto alla somma, cioè un vettore $-\mathbf{a}$ che sommato al vettore \mathbf{a} da il vettore zero; $-\mathbf{a}$ è un vettore che ha lo stesso modulo, punto di applicazione e direzione di \mathbf{a} , ma verso opposto.
- $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ (proprietà commutativa)

Queste proprietà fanno sì che l'insieme dei vettori dello spazio con lo stesso punto di applicazione O sia strutturato come un gruppo abeliano o commutativo.

La definizione di opposto di un vettore permette di definire la differenza tra due vettori $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ come somma di \mathbf{a} con l'opposto di \mathbf{b} .

1.1.2 Prodotto per uno scalare (o prodotto esterno)

Il prodotto di un vettore \mathbf{a} per uno scalare N (numero reale) è un vettore \mathbf{b} che ha lo stesso punto di applicazione, verso e direzione di \mathbf{a} e modulo uguale a Na . Se $N > 1$ il vettore viene dilatato, se $N < 1$ il vettore viene contratto.

Il prodotto per uno scalare gode delle seguenti proprietà: (definendo N e M come numeri reali ed \mathbf{a} e \mathbf{b} come vettori)

- $N\mathbf{a}$ è ancora un vettore (cioè il prodotto per uno scalare è legge di composizione interna);
- $(NM)\mathbf{a} = N(M\mathbf{a})$ (proprietà associativa)
- esiste l' elemento neutro rispetto al prodotto ed è il numero 1;
- $(N + M)\mathbf{a} = N\mathbf{a} + M\mathbf{a}$ (proprietà distributiva rispetto alla somma di numeri);
- $N(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = N\mathbf{a} + N\mathbf{b}$ (proprietà distributiva rispetto alla somma di vettori);

Esempio 2 *Come facciamo a trovare un vettore parallelo al vettore*

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

che sia lungo 1 (di norma 1)?

Se siamo fortunati magari già \mathbf{u} ha lunghezza 1. In questo caso sarebbe facile rispondere. Proviamo a calcolare la lunghezza di \mathbf{u} :

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14};$$

siamo stati sfortunati! E allora? Si ricordi che sappiamo modificare la lunghezza di un vettore lasciandone invariata la direzione: basta moltiplicare il vettore per uno scalare. Lo scalare giusto per risolvere il nostro problema è $1/\sqrt{14}$: in tal caso il vettore risultante avrà lunghezza uguale a $1/\sqrt{14}$ volte la lunghezza di \mathbf{u} , i.e. 1. Il vettore che cercavamo è:

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{14}}\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{14} \\ 2/\sqrt{14} \\ -3/\sqrt{14} \end{pmatrix}$$

ed è facile verificare (usando la definizione) che questo vettore ha norma 1.

Esercizio — Trovare un vettore parallelo al vettore $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \frac{1}{2}\mathbf{v}$ di lunghezza 2, dove

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

■

Il vettore \mathbf{w} si calcola nel modo seguente:

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La norma di \mathbf{w} è $\sqrt{2}$.

Il vettore che cerchiamo è:

$$\frac{2}{\sqrt{2}}\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

1.1.3 Prodotto scalare (o prodotto interno)

Il prodotto scalare tra due vettori \mathbf{u} e \mathbf{v} aventi lo stesso punto di applicazione è definito nel modo seguente:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = uv \cos(\widehat{\mathbf{u}\mathbf{v}})$$

Il prodotto scalare non è una legge di composizione interna, perché associa a due vettori un numero reale. Non ha quindi senso parlare di associatività, di elemento neutro, oppure di elemento opposto; il prodotto scalare risulta invece commutativo : $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$.

Il prodotto scalare è nullo se uno o entrambi i vettori son nulli, oppure se i vettori sono tra loro perpendicolari.

1.1.4 Prodotto vettoriale

Si dice prodotto vettoriale dei vettori \mathbf{v} e \mathbf{u} il vettore libero \mathbf{w} avente:

- la direzione della retta perpendicolare al piano individuato da \mathbf{v} e \mathbf{u} ;
- il verso quello di una persona che percorre l'angolo θ tra \mathbf{v} e \mathbf{u} in senso antiorario. Per il verso si utilizza anche la regola della mano destra; disponendo pollice, indice e medio perpendicolari tra loro, se il pollice indica la direzione di \mathbf{v} e l'indice la direzione di \mathbf{u} , allora il medio indica la direzione di \mathbf{w} . In maniera equivalente si può affermare che il verso di \mathbf{w} è tale che la terna $(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w})$ sia una terna levogira.
- il modulo di \mathbf{w} è definito dalla formula:

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = uv \sin(\widehat{\mathbf{u}\mathbf{v}})$$

Il prodotto vettoriale gode delle seguenti proprietà:

- è associativo
- è anticommutativo: $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -\mathbf{u} \times \mathbf{v}$
- è nullo se uno o entrambi i vettori sono nulli, oppure se i vettori sono tra loro paralleli.

1.1.5 Scomposizione di un vettore

Scomporre un vettore significa trovare altri due (nel piano) o tre (nello spazio) vettori, la cui somma sia uguale al vettore dato. Mentre la somma vettoriale è un'operazione univoca, un vettore può essere scomposto in infiniti modi. Anche la scomposizione è univoca se si specificano le direzioni lungo cui avviene la scomposizione.

Un vettore \mathbf{v} può essere scomposto lungo le direzioni r ed s conducendo dalla punta del vettore le parallele alle

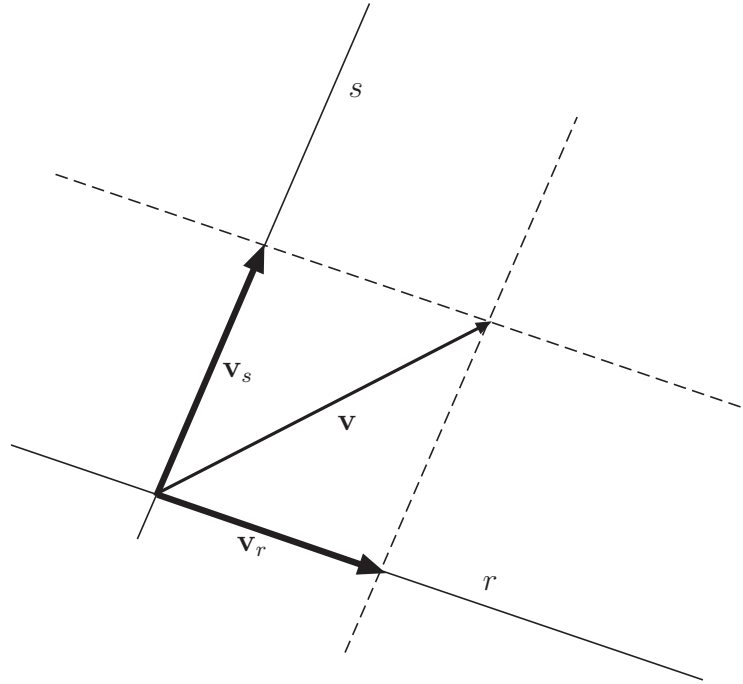


Figura 3. Scomposizione di un vettore lungo due direzioni: costruzione grafica.

rette r ed s . Le intersezioni di tali parallele con r ed s definiscono le componenti di \mathbf{v} lungo r e lungo s ,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_s$$

(si veda la figura 3).

La scomposizione di vettori è una procedura molto utilizzata in fisica, in particolare in statica per scomporre le forze lungo direzioni particolari (ad esempio parallele e perpendicolari a determinati vincoli).

1.1.6 Componenti cartesiane di un vettore

Se si scelgono come direzioni di scomposizione di un vettore \mathbf{v} gli assi cartesiani x e y , allora le componenti del vettore sono dette componenti cartesiane. I moduli di tali componenti sono detti rispettivamente *componente x* e *componente y* e vengono di solito indicate con \mathbf{v}_x e \mathbf{v}_y .

Per dare una rappresentazione algebrica ai vettori appartenenti ad un piano vengono inoltre definiti i versori degli assi cartesiani

$$\hat{\mathbf{i}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\mathbf{j}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vettori di modulo uno, rispettivamente paralleli all'asse x e all'asse y .

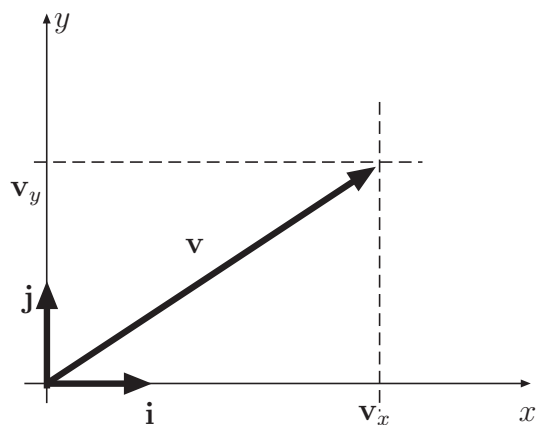


Figura 4. Scomposizione di un vettore lungo gli assi cartesiani ortogonali: i versori.

Un generico vettore \mathbf{v} viene quindi rappresentato come

$$\mathbf{v} = v_x \hat{\mathbf{i}} + v_y \hat{\mathbf{j}}$$

Il vettore \mathbf{v} viene anche associato alle sue componenti e viene quindi identificato con la coppia di valori v_x e v_y :

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}.$$

Se i vettori appartengono a tutto lo spazio tridimensionale occorre definire tre versori degli assi,

$$\hat{\mathbf{i}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\mathbf{j}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

per cui

$$\mathbf{w} = w_x \hat{\mathbf{i}} + w_y \hat{\mathbf{j}} + w_z \hat{\mathbf{k}} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$$

1.1.7 Operazioni tra vettori mediante le componenti

Utilizzando le componenti cartesiane v_x e v_y è possibile ridefinire le operazioni tra vettori in modo algebrico.

- Somma:

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x + v_x \\ u_y + v_y \end{pmatrix}$$

- Prodotto per uno scalare:

$$a \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au_x \\ au_y \end{pmatrix}$$

- Prodotto scalare:

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = u_x v_x + u_y v_y$$

- Prodotto vettoriale tra due vettori del piano xy (il risultato è parallelo all'asse z):

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_x v_y - v_x u_y \end{pmatrix}$$

Nello spazio tridimensionale il prodotto vettoriale si può facilmente calcolare facendo il determinante simbolico della matrice avente come prima riga i versori degli assi cartesiani, come seconda e terza riga le componenti dei vettori.

$$\mathbf{v} \times \mathbf{u} = \det \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ v_x & v_y & v_z \\ u_x & u_y & u_z \end{pmatrix}$$

A Funzioni numeriche

Diremo *funzione numerica* ogni funzione definita in un sottoinsieme A di \mathbb{R} e che assume valori in \mathbb{R} :

$$f : x \in A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow f(x) \in \mathbb{R}.$$

Si dirà che f è *limitata superiormente* [risp. *limitata inferiormente*] se tale è il suo codominio $f(A)$ e si scriverà:

$$\sup f(A) = \sup_{x \in A} f(x) \quad \left[\text{risp. } \inf f(A) = \inf_{x \in A} f(x) \right]$$

Se il codominio $f(A)$ è dotato di massimo [risp. minimo] si dice che f ha *massimo* [risp. *minimo*] in A e si scrive:

$$\max f(A) = \max_{x \in A} f(x) \quad \left[\text{risp. } \min f(A) = \min_{x \in A} f(x) \right]$$

Si dice che f è *monotona* in A se si verifica una delle seguenti eventualità:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad [\text{funzione strettamente crescente}]$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad [\text{funzione crescente}]$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \quad [\text{funzione strettamente decrescente}]$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \quad [\text{funzione decrescente}]$$

Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme tale che se $x \in A$ allora $-x \in A$; diremo che f , definita in A è *pari* se

$$f(x) = f(-x) \quad \forall x \in A,$$

che f è *dispari* se

$$f(x) = -f(-x) \quad \forall x \in A.$$

Infine, se $T > 0$, sia A un sottoinsieme di \mathbb{R} tale che, se $x \in A$ allora $x+T \in A$; una funzione f definita in A si dice *periodica* di periodo T se:

$$f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in A.$$

B Funzioni invertibili

Supponiamo che la corrispondenza tramite la funzione f tra due insiemi A e B sia *biunivoca*. Cioè supponiamo che f non solo faccia corrispondere ad ogni $x \in A$ uno ed un solo valore $y \in B$, ma anche che per ogni $y \in B$ esista un solo $x \in A$ tale che $f(x) = y$. In tali condizioni diciamo che f è *invertibile*. La funzione da B ad A che ad ogni $y \in B$ fa corrispondere l'unico $x \in A$ per cui $f(x) = y$, si chiama *funzione inversa* e si indica con f^{-1} . Si ha:

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad \forall x \in A; \quad f(f^{-1}(y)) = y, \quad \forall y \in B.$$

In figura B.1 è riportato il grafico di una funzione $f : A \rightarrow B$ invertibile e della sua inversa $f^{-1} : B \rightarrow A$.

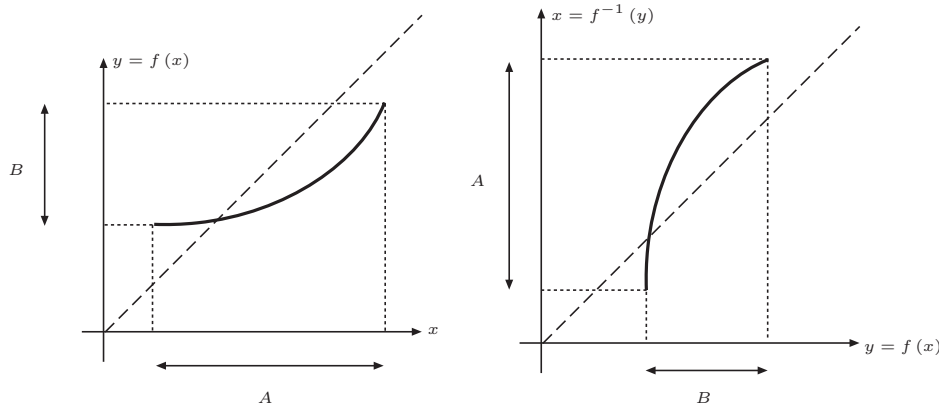


Figura B.1. Grafico di una funzione $f : A \rightarrow B$ invertibile e della sua inversa $f^{-1} : B \rightarrow A$.

Esempio 3 *La funzione*

$$f(x) = 2x + 1$$

è invertibile; infatti, fissato $y = f(x)$, risulta $x = (y - 1)/2$. La funzione inversa della funzione data è:

$$f^{-1}(x) = \frac{x - 1}{2}$$

C Richiamo di trigonometria e funzioni trigonometriche

Si premettono alcuni richiami di trigonometria elementare. Per *circonferenza trigonometrica* s'intende una circonferenza nel piano cartesiano avente centro nell'origine degli assi e raggio uguale a uno; tale circonferenza, inoltre, viene dotata di un verso positivo che per convenzione è quello antiorario e di un punto iniziale, che per convenzione è il punto A d'intersezione di tale circonferenza con il semiasse positivo delle ascisse (vedi figura C.1). Inoltre, si denota con π la lunghezza della semicirconferenza unitaria (risulta all'incirca $\pi = 3.14159265\dots$; si dimostra, però, che π è un numero irrazionale uguale anche all'area del cerchio unitario).

Definizione 1 Per *misura in radianti* di un arco di circonferenza (o dell'angolo al centro corrispondente) intendiamo il rapporto tra l'arco rettificato e il raggio, i.e.:

$$\text{arco in radianti} = \frac{\text{arco}}{\text{raggio}}.$$

Esiste la proporzione:

$$\alpha : 2\pi = \alpha^\circ : 360^\circ$$

Il fatto di aver fissato un punto iniziale, un verso sulla circonferenza trigonometrica ed un'unità di misura permette di far corrispondere ad ogni numero

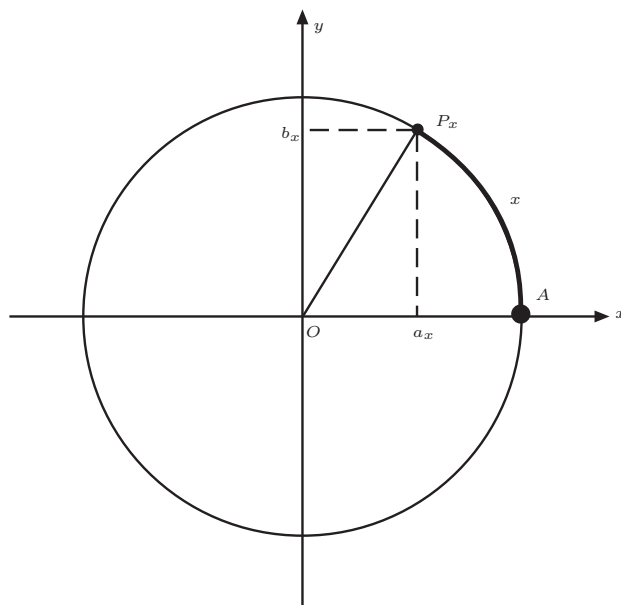


Figura C.1. Circonferenza trigonometrica.

reale un elemento della circonferenza trigonometrica. Precisamente, assegnato un numero reale x , si può considerare l'arco di circonferenza che ha un estremo nel punto iniziale A , lunghezza uguale al valore assoluto di x e verso antiorario se x è positivo, altrimenti orario. Si può quindi individuare il punto P sulla circonferenza trigonometrica che rappresenta il secondo estremo dell'arco suddetto (se il numero reale assegnato è maggiore di 2π in valore assoluto, la circonferenza trigonometrica viene ripercorsa più volte). Ora, assegnato il numero reale x , si consideri il punto P sulla circonferenza trigonometrica costruito come sopra descritto.

Si definisce **seno** di x , e lo si indica con $\sin(x)$, l'ordinata del punto P , mentre si definisce **coseno** di x , e lo si denota con $\cos(x)$, l'ascissa del punto P ; se non vi è possibilità di equivoci, le parentesi che racchiudono la x vengono omesse e si scrive semplicemente $\sin x$ e $\cos x$.

Poichè i numeri reali $\sin x$ e $\cos x$ sono stati definiti per qualsiasi valore di x , si possono ora considerare la *funzione seno* e la *funzione coseno*, che verranno denotate rispettivamente con :

$$\sin : x \in \mathbb{R} \rightarrow \sin x \in [-1, 1]$$

e

$$\cos : x \in \mathbb{R} \rightarrow \cos x \in [-1, 1].$$

In particolare, quindi, le funzioni seno e coseno sono limitate. Inoltre, utilizzando il teorema di Pitagora, si ricava la seguente relazione tra il seno ed il coseno, valida per ogni $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Osservazione 1 Il simbolo $\sin^2 x$ è da intendersi come $(\sin x)^2$; la stessa con-

venzione vale per il coseno e, più in generale, per tutte le funzioni trigonometriche definite in seguito.

Si descrivono ora alcune proprietà del seno e del coseno di un qualsiasi numero reale x la cui dimostrazione è un'immediata conseguenza delle definizioni adottate.

- Per ogni $x \in \mathbb{R}$: $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.
Tale proprietà esprime il fatto che le funzioni seno e coseno sono periodiche di periodo 2π .
- Per ogni $x \in \mathbb{R}$: $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$, $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$.
- Per ogni $x \in \mathbb{R}$: $\sin(x + \pi) = -\sin x$, $\cos(x + \pi) = -\cos x$.

Accanto alla proprietà di periodicità del seno e del coseno conviene tener presente anche che la funzione seno è una funzione dispari mentre la funzione coseno è una funzione pari (infatti, per ogni $x \in \mathbb{R}$, $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$). Le proprietà precedenti discendono tutte dalle seguenti *formule di addizione* del seno e coseno. La dimostrazione di tali formule per brevità verrà omessa. Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, si ha:

- $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$
- $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$

Considerando, in particolare, $x = y$ nelle proprietà precedenti (col segno +) si ottengono le seguenti ulteriori formule, note con il nome di *formule di moltiplicazione*:

- Per ogni $x \in \mathbb{R}$: $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$;
- per ogni $x \in \mathbb{R}$: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$.

Considerando $x/2$ al posto di x nell'ultima uguaglianza, si ottiene

$$\cos x = 2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1,$$

dalla quale si ottengono le seguenti *formule di bisezione*:

- per ogni $x \in \mathbb{R}$: $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$;
- per ogni $x \in \mathbb{R}$: $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$

Valgono, com'è semplice dimostrare, le cosiddette *formule di prostaferesi* che consentono di esprimere il prodotto di due funzioni seno e/o coseno nella somma di due di tali funzioni:

$$\sin(x + y) + \sin(x - y) = 2 \sin x \cos y,$$

$$\sin(x + y) - \sin(x - y) = 2 \cos x \sin y,$$

$$\cos(x + y) + \cos(x - y) = 2 \cos x \cos y$$

e

$$\cos(x + y) - \cos(x - y) = -2 \sin x \sin y.$$

Si passo ora ad elencare alcuni valori delle funzioni seno e coseno in alcuni archi particolari che si possono dedurre facilmente da proprietà geometriche sulla circonferenza trigonometrica. In base a tali valori ed alle proprietà precedenti, si potrà poi tracciare il grafico delle funzioni seno e coseno con sufficiente precisione:

$$\sin 0 = 0, \quad \cos 0 = 1$$

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1, \quad \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

Usando poi la periodicità delle funzioni seno e coseno si ricavano archi noti non appartenenti a $[0, 2\pi[$.

Il grafico delle funzioni seno e coseno è tracciato approssimativamente in figura C.2. A questo punto si possono definire ulteriori funzioni trigonometriche.

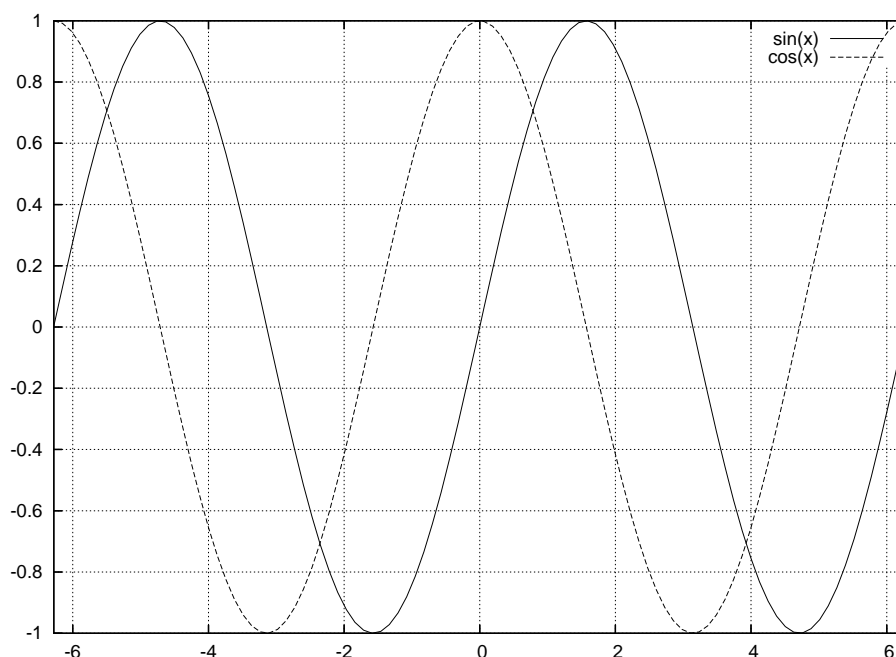


Figura C.2. Funzioni seno e coseno.

Si osserva che la funzione coseno si annulla nell'insieme

$$\left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

e quindi la funzione quoziente tra le funzioni seno e coseno è definita in

$$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Tale funzione quoziente prende il nome di *funzione tangente* e viene denotata con il simbolo \tan ; dunque:

$$\tan : \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$$

è definita ponendo, per ogni $x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$,

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Utilizzando la figura C.1, la tangente di x può essere interpretata geometricamente come la lunghezza relativa del segmento congiungente il punto A e l'intersezione della retta passante per l'origine ed il punto P_x con la retta verticale passante per A .

Le proprietà della funzione tangente derivano facilmente da quelle del seno e del coseno; ad esempio, per ogni $x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$, si ottiene:

$$\tan(x + \pi) = \tan(x) = \tan(x - \pi)$$

ovvero la funzione tangente è periodica di periodo π . Inoltre:

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

e quindi la funzione tangente è dispari. Il grafico della funzione tangente è approssimativamente quello tracciato nella figura C.3.

In modo analogo a quanto visto per la funzione tangente, si può procedere considerando il rapporto tra la funzione coseno e quella del seno. Poichè la funzione seno si annulla nell'insieme $\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, tale rapporto è definito in $\mathbb{R} - \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Si ottiene pertanto la *funzione cotangente*:

$$\cot : \mathbb{R} - \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$$

definita ponendo, per ogni $x \in \mathbb{R} - \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$,

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Le proprietà della cotangente si discutono in maniera analoga a quanto svolto per la tangente e dipendono ancora una volta da quelle delle funzioni seno e coseno.

Si richiama solamente l'attenzione sul fatto che la funzione cotangente è anch'essa periodica di periodo π . Il grafico della funzione cotangente è approssimativamente quello tracciato nella figura C.4

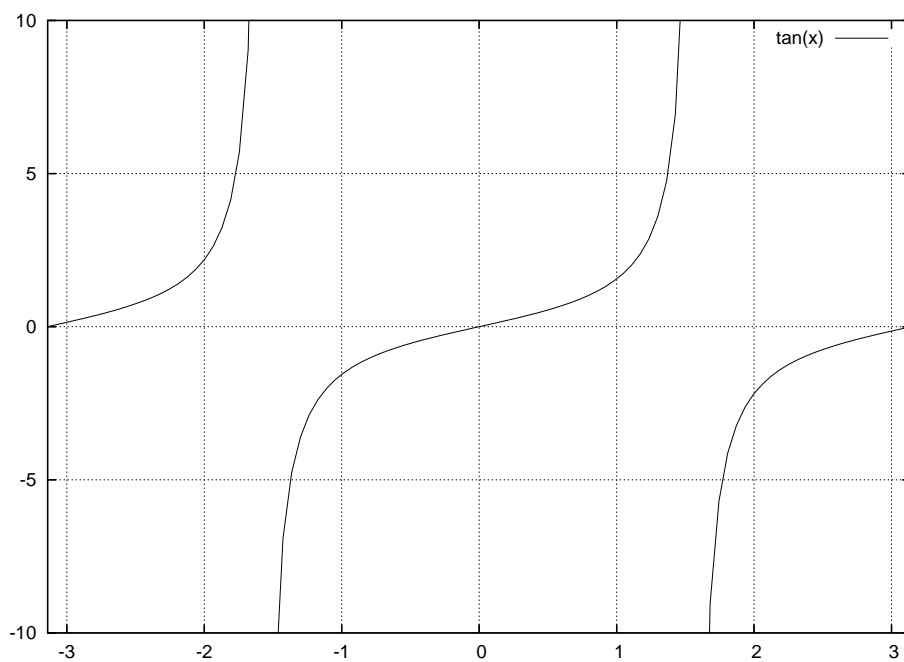


Figura C.3. Funzione tangente.

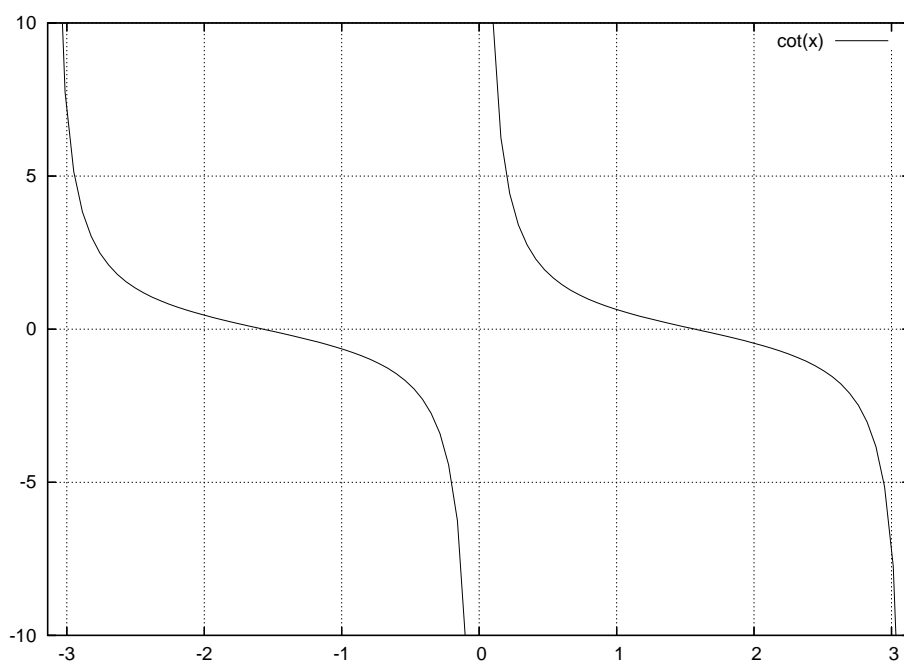


Figura C.4. Funzione cotangente.

D Valori notevoli delle funzioni trigonometriche

Generalmente il valore di una funzione trigonometrica dato un angolo α è un numero reale che non ammette una scrittura semplificata in termini di quantità comunemente note.

Vi sono però alcuni valori per gli angoli che fanno eccezione a questa regola generale e per i quali si può esprimere in modo semplice il valore delle funzioni trigonometriche ad essi associati.

Per ricavare tali valori basta rifarsi alla circonferenza trigonometrica (di raggio $R = 1$), come quella in figura C.1 e al teorema di Pitagora applicato al triangolo in essa evidenziato. La tabella che si ricava è la tabella D.1 dove sono stati specificati i valori per sin, cos, tan e cot. Si noti che nella tabella

Angoli/funzioni	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3/2\pi$	2π
sin	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1	0	1
tan	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$	0	$-\infty$	0
cot	$+\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	$-\infty$	0	$+\infty$

Tabella D.1

Tabella degli angoli notevoli

D.1 per chiarezza sono riportati sia il valore 0 che il valore 2π per l'angolo anche se questa dicitura è sovrabbondante dato che 0 e 2π sono equivalenti ai fini delle funzioni trigonometriche riportate.

E Funzioni trigonometriche inverse

Si considera ora la possibilità di determinare una funzione inversa per le funzioni trigonometriche introdotte in precedenza.

Si considera innanzitutto la funzione seno. Al fine di ottenere una funzione iniettiva, si considera la restrizione della funzione seno all'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$; in tal caso è possibile considerare la funzione inversa di tale restrizione, che viene denominata *funzione arcoseno* e denotata con arcsin. Tenendo presente che l'immagine di sin è $[-1, 1]$, la funzione arcoseno è definita in $[-1, 1]$; quindi

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

è definita ponendo, per ogni $x \in [-1, 1]$, $\arcsin x = y$ dove y è l'unico elemento dell'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$ tale che $\sin y = x$.

Il grafico della funzione arcoseno (che è una funzione strettamente crescente) è approssimativamente quello tracciato in figura E.1.

Si procede ora in modo analogo con la funzione coseno. Questa volta si considera la restrizione della funzione coseno nell'intervallo $[0, \pi]$, la quale è strettamente decrescente. Con lo stesso procedimento adottato per la funzione arcoseno si può definire la *funzione arcocoseno*

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

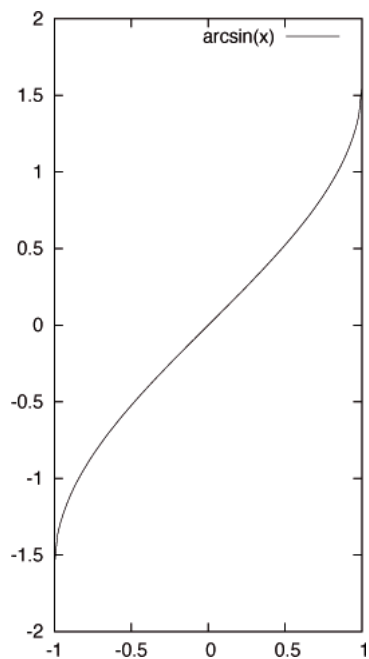


Figura E.1. Funzione arcseno.

ponendo, per ogni $x \in [-1, 1]$, $\arccos x = y$ dove y è l'unico elemento dell'intervallo $[0, \pi]$ tale che $\cos y = x$.

Si verifica facilmente che la funzione arcocoseno è strettamente decrescente. Il grafico della funzione arcocoseno è approssimativamente quello tracciato nella figura E.2.

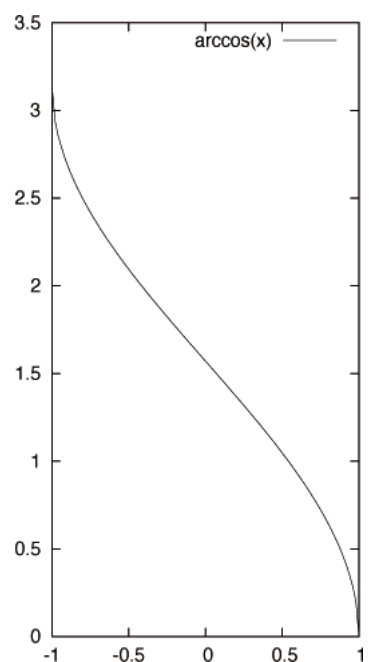


Figura E.2. Funzione arcocoseno.