Matrici.

Biagio Raucci

Sommario

In questo fascicolo s'introdurrà il concetto di matrice. Impareremo ad eseguire le operazioni con le matrici, a valutare il detrminante e le matrici inverse.

Key words: Matrici.
VERS: 1.0

1 Matrici

Si chiama *matrice* di m righe ed n colonne (o matrice $m \times n$) una figura costituita da $m \cdot n$ numeri, disposti in m righe orizzontali ed in n colonne verticali, racchiusi tra due parentesi tonde:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

I numeri sono indicati mediante una lettera con due indici, il primo dei quali indica la riga, il secondo la colonna a cui il numero appartiene.
Nella matrice (1) si distinguono le m *righe*:

$$\begin{gathered} (a_{11} \;\; a_{12} \;\; \dots \;\; a_{1n}), \\ (a_{21} \;\; a_{22} \;\; \dots \;\; a_{2n}), \\ \dots \;\; \dots \;\; \dots \;\; \dots \\ (a_{m1} \;\; a_{m2} \;\; \dots \;\; a_{mn}), \end{gathered} \tag{2}$$

Email address: raucci@gmail.com (Biagio Raucci).

1 marzo 2007

e le n *colonne*:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Il numero a_{ij} prende il nome di *elemento di posto* i, j della matrice e si trova all'incrocio della riga $i-$esima con la colonna $j-$esima.

Esempio 1 *L'elemento* a_{12} *si trova all'incrocio della prima riga con la seconda colonna.*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \boxed{\mathbf{a_{12}}} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Nel caso particolare che sia $m = n$, la matrice si dice *quadrata*, di ordine $m = n$.

Esempio 2 *La matrice:*

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \\ 8 & 7 & -7 \end{pmatrix}$$

è una matrice quadrata di ordine 3.

Una matrice $1 \times n$ ha la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

e prende il nome di *vettore riga*. Una matrice $m \times 1$ ha la forma

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix}$$

e prende il nome di *vettore colonna*.
Nel seguito indicheremo brevemente con (a_{ij}) la matrice (1) e con a_{ij} il suo elemento di posto i, j.

2 Operazioni con le matrici

Se $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ sono due matrici $m \times n$, si chiama *somma* si A e B e si indica con $C = A + B$, la matrice $m \times n$ il cui elemento c_{ij} è dato da $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.
Se $A = (a_{ij})$ è una matrice $m \times n$, e $\lambda \in \mathbb{R}$, il *prodotto* di λ per A, indicato con λA, è la matrice $m \times n$, il cui elemento di posto i, j è $\lambda \cdot a_{ij}$.
Un'altra operazione importante che s'introduce tra matrici è il *prodotto righe per colonne.*
Per definire tale prodotto premettiamo quanto segue. Il prodotto $A \cdot B$ di un vettore riga A per un vettore colonna B è definito da:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \ldots + a_{1n}b_{n1} \tag{4}$$

Esempio 3 *Risulta:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 4 + 3 \cdot (-7) = 2 - 21 = -19.$$

Per definire il prodotto righe per colonne, cominciamo con il caso particolare di due matrici 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Il loro prodotto righe per colonne AB è la matrice 2×2:

$$AB = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix},$$

dove, per $i, j = 1, 2$, risulta che c_{ij} è il prodotto del vettore riga (a_{i1}, a_{i2}) per il vettore colonna $\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \end{pmatrix}$, i.e.

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j}.$$

Esempio 4 *Il seguente schema è un'utile rappresentazione del prodotto righe per colonne di due matrici* 2×2*:*

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}\ a_{12}} \\ a_{21}\ a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} b_{11} \\ b_{21} \end{matrix}} & \begin{matrix} b_{12} \\ b_{22} \end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{c_{11}} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}\ a_{12}} \\ a_{21}\ a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{matrix} b_{11} \\ b_{21} \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} b_{12} \\ b_{22} \end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \boxed{c_{12}} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} \\ \boxed{a_{21}\ a_{22}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} b_{11} \\ b_{21} \end{matrix}} & \begin{matrix} b_{12} \\ b_{22} \end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ \boxed{c_{21}} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} \\ \boxed{a_{21}\ a_{22}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{matrix} b_{11} \\ b_{21} \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} b_{12} \\ b_{22} \end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & \boxed{c_{22}} \end{pmatrix}.$$

In generale siano:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mr} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{r1} & b_{r2} & \dots & b_{rn} \end{pmatrix},$$

due matrici, di cui la prima $m \times r$ e la seconda $r \times n$, i.e. il numero delle *colonne della prima* è uguale al numero di *righe della seconda*.
Formiamo il prodotto di ognuna delle m righe di A per ognuna delle n colonne di B. Ad esempio il prodotto della prima riga di A per la prima colonna di B

è la matrice

$$(c_{11}) = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1r} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{r1} \end{pmatrix} = (a_{11}b_{11} + \ldots + a_{1r}b_{r1})$$

quello dell'$i-$esima riga di A per la $j-$esima colonna di B è:

$$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{i1} \dots a_{ir} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{rj} \end{pmatrix} = (a_{i1}b_{1j} + \ldots + a_{ir}b_{rj})$$

e l'indice i varia tra 1 ed m, mentre l'indice j varia tra 1 ed n.
La matrice $m \times n$ il cui elemento di posto (i,j) è c_{ij}, prende il nome di *prodotto righe per colonne di A per B.*

Osservazione 1 *Per poter moltiplicare (righe per colonne) la matrice A per la matrice B, occorre che il numero di colonne della matrice A coincida con il numero di righe della matrice B. Il risultato è una matrice C che ha lo stesso numero di righe della prima e lo stesso numero di colonne della seconda. Potremo perciò scrivere:*

$$(matrice\ m \times r)\,(matrice\ r \times n) = (matrice\ m \times n)\,.$$

SI verifica facilmente che il prodotto righe per colonne gode della proprietà associativa, i.e.

$$A\,(BC) = (AB)\,\mathbf{C} \tag{5}$$

ma **non gode** della proprietà commutativa; i.e., in generale, risulta

$$AB \neq BA$$

per A, B matrici quadrate di ordine n.

Esempio 5 *Siano:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

allora si ha:

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}, \qquad BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3 Determinante di una matrice 2×2

Considerata la matrice quadrata 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

si chiama *determinante* di A il numero:

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Il determinante della matrice data si indica anche con il simbolo:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Esempio 6 *Risulta:*

$$\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 40 - 12 = 28.$$

L'uso del determinante è frequente nella risoluzione di sistemi di due equazioni lineari in due incognite x, y del tipo

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

Per *soluzione di tale sistema* s'intende una coppia ordinata (x, y) di numeri reali che verifica simultanemanete le due equazioni precedenti.
Volendo risolvere tale sistema, moltiplichiamo la prima equazione per a_{22} e la seconda equazione per $-a_{12}$. In tal modo otteniamo:

$$\begin{cases} a_{11}a_{22}x + a_{12}a_{22}y &= b_1a_{22} \\ -a_{12}a_{21}x - a_{12}a_{22}y &= -b_2a_{12} \end{cases}$$

Addizionando membro a membro tali relazioni, si ha:

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\, x = b_1a_{22} - b_2a_{12}.$$

Indicando con A la *matrice dei coefficienti* del sistema dato, i.e.:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

e supposto

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$$

risulta:

$$x = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{\det A}.$$

Con analoghi passaggi, si ottiene la formula risolutiva per y:

$$y = \frac{a_{11} b_2 - a_{21} b_1}{\det A}.$$

Pertanto, la nozione di determinante si rivela utile per ottenere l'espressione della risoluzione (x, y) del sistema dato. Con simboli ancora più compatti, per mezzo delle matrici B_1 e B_2 definite da:

$$B_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}$$

le formule risolutive del sistema si scrivono equivalentemente nella forma:

$$x = \frac{\det B_1}{\det A}, \qquad y = \frac{\det B_2}{\det A}.$$

Una generalizzazione di queste formule verrà data, con il teorema di Cramer, in un prossimo paragrafo.

4 Determinante di una matrice 3×3

Data la matrice 3×3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

e fissati due indici $i, j \in \{1, 2, 3\}$, indichiamo con A_{ij} la matrice ottenuta da A eliminando la riga $i-$esima e la colonna $j-$esima.

Esempio 7 *Ad esempio, considerata la matrice* 3×3*:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

si ha:

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_{12} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Il determinante della matrice A è definito dalla posizione:

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13} = \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Esempio 8 *Nel caso dell'esempio precedente si ha:*

$$\det A = 1\,(2-1) - 2\,(-6-0) = 13$$

Se i, j sono due indici compresi fra 1 e 3, il determinante $\det A_{ij}$ prende il nome di **minore complementare** dell'elemento a_{ij} della matrice A, mentre il numero $(-1)^{i+j} \det A_{ij}$ è il **complemento algebrico di** a_{ij}.
Dalla definizione di $\det A$ segue la seguente:

Definizione 1 *il determinante di A è la somma dei prodotti degli elementi della prima riga* a_{11}, a_{12}, a_{13} *di A per i rispettivi complementi algebrici* $\det A_{11}$, $-\det A_{12}$, $\det A_{13}$.

Si dimostra che, anche partendo da un'altra riga, eseguendo la somma dei prodotti dei suoi elementi per i rispettivi complementi algebrici, si ottiene come risultato ancora il determinante di A, infatti vale il seguente risultato:

Teorema 1 *Il* $\det A$ *è uguale alla somma dei prodotti degli elementi di una riga (o di una colonna) per i rispettivi complementi algebrici.*

Dimostrazione — Omessa. □

In ogni caso il determinante della matrice 3×3 è dato, in forma esplicita, da:

$$\begin{aligned} \det A = {} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} + \\ & - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \end{aligned}$$

5 Determinante di una matrice $n \times n$

Se A è una matrice $n \times n$, con $n \geqslant 2$, data da

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

il **determinante** di A, denotato con il simbolo $\det A$, è definito dalla posizione:

$$\det A = (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} + \ldots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n} = \\ = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j},$$

ove con A_{1j} indichiamo la matrice $(n-1) \times (n-1)$ ottenuta da A eliminando la prima riga e la colonna $j-$esima.
Si suole anche indicare il determinante con la seguente notazione:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Notiamo che la definizione precedente riconduce la nozione di determinante di una matrice $n \times n$ a quella di determinante delle n matrici $(n-1) \times (n-1)$: $A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{1n}$.
Se i, j sono due indici compresi fra 1 e n, il determinante $\det A_{ij}$ è il **minore complementare** di a_{ij}, mentre il numero $(-1)^{i+j} \det A_{ij}$ è il **complemento algebrico** di a_{ij}; pertanto il determinate della matrice A è la somma dei prodotti degli elementi della riga $(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$ per i rispettivi complementi algebrici.
Consideriamo ora una qualunque altra riga $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ della matrice A ed eseguiamo la somma dei prodotti dei suoi elementi per i rispettivi complementi algebrici:

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}; \tag{6}$$

in modo analogo a come si è visto in precedenza per $n = 3$, si può dimostrare che tale numero coincide con $\det A$ qualunque sia l'indice i, e si suol dire che (6) è lo **sviluppo** del determinante di A secondo la riga $i-$esima.
Un altro metodo per ottenere il determinante di A è quello di considerare una

colonna della matrice $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj})$ della matrice A ed eseguire la somma dei prodotti dei suoi elementi per i rispettivi complementi algebrici:

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}; \tag{7}$$

in tal caso si dice che (7) è lo **sviluppo** del determinante di A secondo la colonna $j-$esima.
Le principali proprietà dei determinanti sono le seguenti:

- Se la matrice A' si ottiene da A scambiando le righe con le colonne, allora $\det A = \det A'$.
- Se la matrice A' si ottiene da A scambiando fra loro due righe o due colonne, allora $\det A = -\det A'$.
- Se la matrice A' si ottiene da A moltiplicando tutti gli elementi di una riga (o di una colonna) per una costante $\lambda \in \mathbb{R}$, allora $\det A' = \lambda \det A$.
- Se due righe (o due colonne) della matrice A sono uguali, allora è $\det A = 0$. Più in generale, se gli elementi di una riga (o di una colonna) sono proporzionali a quelli di un'altra riga (o di un'altra colonna), allora il determinante è nullo.
- La somma dei prodotti degli elementi di una riga (o di una colonna) per i complementi algebrici degli elemnti analoghi di un'altra riga (o di un'altra colonna) è uguale a zero.

Osservazione 2 *Se una matrice di ordine n ha uno riga (o una colonna) ad elementi tutti nulli, allora il suo determinante è zero.*

Se A è una matrice *diagonale*, i.e. se risulta:

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

allora, è semplice dimostrare che è $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$.

Esempio 9 *Diamo un esempio di applicazione delle precedenti proprietà al calcolo di determinanti.*

Calcoliamo il determinante del quarto ordine:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Addizionando alla terza riga la somma delle prime due, si ha:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

e, sviluppando secondo la terza riga, si ha:

$$A = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 7.$$

6 Matrici inverse

Sia A una matrice quadrata di ordine n. Diremo che A è *invertibile* se esiste una matrice A^{-1} di ordine n tale che:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I,$$

ove I è la *matrice identica*, i.e.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

In tal caso la matrice A^{-1} si chiama **inversa** di A. Si può verificare che, se esiste, l'inversa di una matrice è unica.
Sussiste il seguente

Teorema 2 *Se $A = (a_{ij})$ è una matrice di ordine n con $\det A \neq 0$, allora A è invertibile e gli elementi b_{ij} della matrice inversa A^{-1} sono dati da:*

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det A_{ji}}{\det A} \tag{8}$$

ove $\det A_{ji}$ è il minore complementare di a_{ji}.

Dimostrazione — Indichiamo con $C = (c_{ij})$ la matrice prodotto

$$C = (a_{ij}) \cdot (b_{ij})$$

e dimostriamo che risulta $c_{ij} = 1$ per $i = j$, $c_{ij} = 0$ per $i \neq j$.
Infatti:

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \sum_{h=1}^{n} a_{ih} b_{hj} = \sum_{h=1}^{n} (-1)^{h+j} a_{ih} \frac{\det A_{jh}}{\det A} = \\ &= (\det A)^{-1} \sum_{h=1}^{n} (-1)^{h+j} a_{ih} \det A_{jh}. \end{aligned}$$

La conclusione segue dal fatto che

$$\sum_{h=1}^{n} (-1)^{h+j} a_{ih} \det A_{jh} = 0$$

se $i \neq j$ perchè la somma dei prodotti degli elementi di una riga (o colonna) per i complementi algebrici degli elementi analoghi di un'altra riga (o colonna) è uguale a zero; mentre per $i = j$:

$$\sum_{h=1}^{n} (-1)^{h+j} a_{ih} \det A_{ih} = \det A.$$

□

7 Caratteristica di una matrice

Nei paragrafi precedenti ci siamo sostanzialmente dedicati allo studio di matrici quadrate; il motivo è che non si definisce il determinante di una matrice $m \times n$ quando $m \neq n$. comunque, da una matrice rettangolare

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

si possono estrarre delle matrici quadrate i cui determinanti si dicono **minori estratti** dalla matrice A. Il numero di righe (o colonne) della matrice estratta si chiama **ordine del minore**.
Si chiama **caratteristica** (o **rango**) della matrice A l'ordine massimo dei minori non tutti nulli che si possono estrarre da A, i.e. l'intero positivo

$$k \leqslant \min\{m, n\}$$

è il rango di A se:

(1) dalla matrice A si può estrarre almeno un minore non nullo di ordine k;
(2) tutti i minori di ordine maggiore di k, che si possono estrarre da A, sono nulli.

Esempio 10 *La matrice,*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

può avere al massimo rango 3*, in quanto tale è l'ordine massimo delle matrici quadrate in essa contenute.*
Si verifica facilmente che i minori di ordine 3 *sono tutti nulli e perciò la caratteristica sarà minore di* 3*. Poichè tra i minori del second'ordine ve ne sono alcuni non nulli, quale ad esempio:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

ne segue che la matrice ha rango uguale a 2*.*

A Esercizi

Esercizio — Calcolare il prodotto $A \cdot B$ righe per colonne delle matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

■

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 5 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esempio 11 *Verificare con un esempio, che il prodotto di due matrici non nulle può essere uguale alla matrice nulla, i.e. alla matrice i cui elementi sono tutti nulli.*

Posto, ad esempio

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

risulta:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio — Calcolare il determinante delle seguenti matrici quadrate:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} a & a \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 9 & 1 & 1 \\ -3 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

■

$\det A = -2$; $\det B = 0$; $\det C = -2$; $\det D = 0$; $\det E = 2$ e $\det F = 12$

Esercizio — Calcolare il determinante della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

■

$\det A = 6$

Esercizio — Determinare il minore complementare ed il complemento algebrico dell'elemento a_{21} nella matrice:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

■

Il minore complementare è:

$$c = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

mentre il complemento algebrico è $-c$

Esercizio — Determinare l'inversa della matrice

$$A = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

■

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Esercizio — Indicando con A^{-1} la matrice inversa della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

verificare che risulta $A^{-1} = A$. ■

Esercizio — Siano a, b, c numeri reali non nulli. Verificare che la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

è invertibile e calcolare la matrice inversa. ■

Risulta $\det A = a \cdot b \cdot c \neq 0$, pertanto la matrice A è invertibile.
Risulta inoltre:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 1/b & 0 \\ 0 & 0 & 1/c \end{pmatrix}$$

Esercizio — Calcolare il rango della matrice:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 6 & 6 & 10 & 2 \end{pmatrix}$$

■