Sistemi lineari.

Biagio Raucci

Sommario

In questo fascicolo affronteremo la soluzione dei sistemi di equazioni lineari.

Key words: Sistemi di equazioni.
VERS: 1.0

1 Sistemi lineari di m equazioni in n incognite

Un **sistema lineare** di tipo generale è della forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots & & \ldots \ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases} \tag{1}$$

Il sistema lineare (1) è costituito da m equazioni nelle n incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Il sistema di dice **lineare** perchè le incognite sono legate fra loro da equazioni algebriche di primo grado.
I numeri reali $a_{11}, a_{12}, \ldots$, che compaiono in (1), indicati brevemente con a_{ij}, prendono il nome di **coefficienti** del sistema; invece i numeri reali $b_1, b_2, \ldots, b_m$ prendono il nome di **termini noti**. Se, in particolare, i termini noti sono tutti nulli, il sistema lineare si dice **omogeneo**.
Il sistema (1) si può esprimere in forma compatta utilizzando la **matrice dei**

Email address: raucci@gmail.com (Biagio Raucci).

1 marzo 2007

coefficienti:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

detta anche **matrice del sistema**, ed **i vettori colonna** dei termini noti e delle incognite

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \tag{3}$$

con tali notazioni il sistema lineare (1) prende la **forma matriciale**

$$AX = B \tag{4}$$

dove AX è *il prodotto righe per colonne* della matrice A per la matrice X. Si osservi che si tratta del prodotto di una matrice $m \times n$ per una matrice $n \times 1$, che dà per risultato una matrice $m \times 1$.
Il problema che affronteremo nei paragrafi successivi è quello di stabilire delle condizioni sui coefficienti e sui termini noti affinchè esistano dei valori reali delle incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (in tal caso X è detta una **soluzione**) per i quali **tutte** le equazioni del sistema risultino simultaneamente soddisfatte. In breve, affrontiamo il problema della **risoluzione** del sistema (1). Nel paragrafo che segue cominciamo col caso $m = n$.

2 Il teorema di Cramer

In questo paragrafo proponiamo un metodo di risoluzione del sistema lineare di n equazioni in n incognite:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots & & \cdots\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases} \tag{5}$$

In modo analogo a quanto fatto in precedenza, indichiamo con A, B e X rispettivamente la matrice dei coefficienti, dei termini noti e la matrice delle

incognite.
Indichiamo, inoltre, con B_i, per $i = 1, 2, \ldots, n$, la matrice quadrata ottenuta sostituendo la colonna $i-$esima della matrice dei coefficienti A con la colonna B dei termini noti; cioè:

$$B_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \ldots, B_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{pmatrix}.$$

Traendo spunto dal caso particolare $n = 2$, già studiati nel fascicolo precedente, la soluzione X del sistema si può rappresentare utilizzando le matrici sopra introdotte, nella forma:

$$x_1 = \frac{\det B_1}{\det A}, x_2 = \frac{\det B_2}{\det A}, \ldots, x_n = \frac{\det B_n}{\det A}, \tag{6}$$

purchè il determinante di A non sia nullo. Precisamente vale il seguente

Teorema 1 (Teorema di Cramer) *Se* $\det A \neq 0$*, il sistema lineare (5) ammette una ed una sola soluzione, data dalla (6).*

Dimostrazione — Scriviamo il sistema (5) in forma matriciale:

$$AX = B, \tag{7}$$

dove AX è il prodotto righe per colonne delle matrici A e X. Allo scopo di **provare l'unicità**, supponiamo che il sistema lineare (7) abbia una soluzione X; dato che, per ipotesi, $\det A \neq 0$ allora la matrice A è invertibile. Indichiamo con A^{-1} la matrice inversa di A e moltiplichiamo (a sinistra) entrambi i membri della (7); sviluppando il secondo membro otteniamo:

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B,$$

ovvero:

$$\left(A^{-1} \cdot A\right) \cdot X = A^{-1} \cdot B \Leftrightarrow I \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

e quindi:

$$X = A^{-1} \cdot B;$$

i.e. la soluzione X, dovendo essere necessariamente essere uguale alla matrice colonna $A^{-1} \cdot B$ è unica.
Proviamo ora l'esistenza facendo vedere che effettivamente $X = A^{-1} \cdot B$ è soluzione; risulta infatti:

$$A \cdot \left(A^{-1} \cdot B\right) = \left(A \cdot A^{-1}\right) \cdot B = I \cdot B = B,$$

perciò $A \cdot X = B$ e X è soluzione.
Rimane da provare che l'identità matriciale $X = A^{-1} \cdot B$ in forma esplicita equivale alla (6); a tale scopo ricordiamo che gli elementi della matrice A^{-1} sono espressi nella forma

$$(-1)^{i+j} \frac{\det A_{ji}}{\det A}. \tag{8}$$

Risulta quindi

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{\det A} \left[(-1)^{i+j} \det A_{ji} \right] \cdot (b_j)$$

ovvero:

$$X = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \det A_{11} b_1 + \ldots + (-1)^{1+n} \det A_{n1} b_n \\ (-1)^{2+1} \det A_{12} b_1 + \ldots + (-1)^{2+n} \det A_{n2} b_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (-1)^{n+1} \det A_{1n} b_1 + \ldots + (-1)^{n+n} \det A_{nn} b_n \end{pmatrix}$$

da cui:

$$X = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \det B_1 \\ \det B_2 \\ \ldots \\ \det B_n \end{pmatrix}.$$

Ciò prova la (6) e completa la dimostrazione. □

Esempio 1 *Risolviamo, con la formula di Cramer, il seguente sistema*

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

La matrice del sistema è:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

e si verifica che:

$$\det A = 24;$$

dato che $\det A \neq 0$, *in base al teorema di Cramer, il sistema lineare dato ammette una ed una sola soluzione. Inoltre si ha:*

$$\det B_1 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -27;$$

$$\det B_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 21;$$

$$\det B_3 = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -12.$$

La soluzione (x_1, x_2, x_3) *è quindi fornita dalla regola di Cramer:*

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\det B_1}{\det A} = -\frac{27}{24} = -\frac{9}{8} \\ x_2 = \frac{\det B_2}{\det A} = \frac{21}{24} = \frac{7}{8} \\ x_3 = \frac{\det B_3}{\det A} = -\frac{12}{24} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

3 Il teorema di Rouché-Capelli

Consideriamo di nuovo il sistema lineare di tipo generale, costituito da m equazioni nelle n incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \qquad \ldots\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{9}$$

Come in precedenza consideriamo la matrice dei coefficienti

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

La matrice A viene anche detta **matrice incompleta**, per distinguerla dalla **matrice completa** C del sistema (9), che è la matrice $m \times (n+1)$ definita da

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Il seguente teorema, di cui omettiamo la dimostrazione, fornisce un criterio per stabilire se il sistema (9) ammette o meno soluzioni.

Teorema 2 (teorema di Rouché-Capelli) *Condizione necessaria e sufficiente affinchè il sistema (9) abbia soluzioni è che le matrici completa e incompleta del sistema abbiano la stessa caratteristica.*

Se il sistema ha soluzioni, detta k la caratteristica delle due matrici, per risolvere il sistema stesso si procede nel modo seguente:

(1) si scelgono k delle m equazioni, in modo tale che la matrice dei coefficienti di queste abbia caratteristica uguale a k;
(2) nel nuovo sistema ottenuto, avente k equazioni in n incognite, si scelgono k incognite, in modo tale che il determinante dei loro coefficienti sia non nullo ed alle rimanenti $n-k$ incognite si attribuiscono valori arbitrari;
(3) si risolve questo sistema di k equazioni in k incognite, con determinante non nullo, mediante le regole note;
(4) gli n numeri così trovati, costituiscono una soluzione del sistema (9).

Nel caso $k < n$, si suole dire che il sistema ammette ∞^{n-k} soluzioni. Nel caso $k = n$, il sistema ha una sola soluzione, in base al teorema di Cramer.
Ad esempio, sia $k < n$ la caratteristica di A e di C e supponiamo che abbia caratteristica k la matrice $\bar{A}$ costituita dalle prime k righe e dalle prime k

colonne. Cioè, posto

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix},$$

risulti in particolare $\det \bar{A} \neq 0$. Trascurando le eventuali altre $m-k$ righe, consideriamo il sistema nelle incognite $x_1, \ldots, x_k$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1k}x_k &= b_1 - a_{1k+1}x_{k+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ \qquad\cdots \qquad\qquad \cdots & \qquad\qquad \cdots \\ a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kk}x_k &= b_k - a_{kk+1}x_{k+1} - \ldots - a_{kn}x_n \end{cases} \tag{10}$$

Poichè $\det \bar{A}$, qualunque siano i valori attribuiti alle $x_{k+1}, \ldots, x_n$, per il teorema di Cramer, il sistema (10) ammette una ed una sola soluzione. In definitiva il sistema (9) ammette infinite soluzioni, ciascuna delle quali si ottiene fissando arbitrariamente $x_{k+1}, \ldots, x_n$ e ricavando, con la regola di Cramer, i valori di $x_1, \ldots, x_k$.

Esercizio — Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = \ \ 2 \\ \\ x_2 - x_3 = -4 \end{cases}. \tag{11}$$

La matrice incompleta A e quella completa C sono

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

ed hanno caratteristica 2. La matrice

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ha anch'essa caratteristica 2, in quando $\det \bar{A} = 1$. Si considera allora il sistema:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = \qquad 2 \\ \\ \qquad x_2 \quad = -4 + x_3 \end{cases}.$$

Per ogni $x_3 \in \mathbb{R}$ tale sistema ammette la soluzione $x_1 = -2+x_3$ e $x_2 = -4+x_3$. Perciò il sistema (11) ammette infinite soluzioni al variare di x_3 in $\mathbb{R}$. ■

Esercizio — Come ulteriore esempio consideriamo i due sistemi lineari

$$\begin{cases} 3x - 3y = \ \ 1 \\ 2x - 2y = 2/3 \end{cases}, \qquad \begin{cases} 3x - 3y = 1 \\ 2x - 2y = 2 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

ha determinante nullo; pertanto il teorema di Cramer non è applicabile. La matrice A ha caratteristica 1.
Le matrici complete dei due sistemi sono date rispettivamente da:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 2/3 \end{pmatrix}; \qquad C_2 = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix};$$

la matrice C_1 ha caratteristica 1, mentre la matrice C_2 ha caratteristica 2. In base al teorema di Rouché-Capelli il primo sistema ammette soluzioni, mentre il secondo sistema non ha soluzioni. Osserviamo come sia semplice verificare direttamente che il secondo sistema non ha soluzioni, dato che equivale alle due equazioni in contraddizione fra loro: $x - y = 1/3$ e $x - y = 1$. ■

4 Sistemi omogenei

Un sistema lineare con secondo membro nullo, i.e. del tipo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \qquad \ldots & & \ldots \ \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{cases} \tag{12}$$

prende il nome di **sistema omogeneo**. Tale sistema ha sempre la **soluzione banale** $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (0, 0, \ldots, 0)$. Diremo che $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ è una **soluzione non banale**, detta anche **soluzione propria**, se almeno uno dei suoi numeri reali $x_1, x_2, \ldots, x_n$ non è nullo.

Se il sistema (12) ammette una soluzione propria $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ allora ammette infinite soluzioni, della forma

$$(ax_1, ax_2, \ldots, ax_n)$$

qualunque sia $a \in \mathbb{R}$.
Con l'intento di stabilire delle condizioni affinchè il sistema lineare omogeneo (12) ammetta soluzioni proprie, ci limitiamo a considerare il caso $m = n$.

Teorema 3 *Sia A la matrice quadrata dei coefficienti del sistema lineare omogeneo (12), con $m = n$. Il sistema ammette una soluzione non banale (e perciò infinite) se e solo se risulta* $\det A = 0$.

Dimostrazione — Se $\det A \neq 0$, per il teorema di Cramer il sistema ammette una sola soluzione; dato che il sistema ha la soluzione banale $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (0, 0, \ldots, 0)$, non esistono pertanto soluzioni non banali.
Supponiamo ora che $\det A = 0$. Dato che la matrice completa

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 \end{pmatrix}$$

si ottiene dalla matrice incompleta A aggiungendo una colonna di zeri, le due matrici A e C hanno la stessa caratteristica, che è un numero k inferiore di n, date che $\det A = 0$. Per il teorema di Rouché-Capelli il sistema (12) ammette ∞^{n-k} soluzioni. □

5 Autovalori di una matrice

Sia $A = (a_{ij})$ una matrice quadrata $n \times n$. Si chiama **autovalore** di A ogni soluzione λ dell'equazione

$$\det(A - \lambda I) = 0, \tag{13}$$

ove I è la matrice identica di ordine n. L'equazione (13) può essere scritta esplicitamente sotto la forma:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{14}$$

Ad esempio, per $n = 2$ si ha l'equazione

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

ovvero:

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\,\lambda + \det A = 0 \tag{15}$$

che è un'equazione di secondo grado in λ.
In generale il determinante a primo membro della (14) è un polinomio di grado n in λ, detto **polinomio caratteristico** della matrice A; si può dimostrare che ha la forma:

$$\lambda^n - (a_{11} + \ldots + a_{nn})\,\lambda^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det A = 0.$$

Tale polinomio **ammette radici reali** nel caso che la matrice A sia **simmetrica**, i.e. risulti $a_{ij} = a_{ji}$.
Verifichiamo tale affermazione nel caso particolare $n = 2$. Il discriminante dell'equazione (14) è, in tal caso:

$$\Delta = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geqslant 0$$

Pertanto l'equazione (15) ammette radici reali.
Osserviamo che, se $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore della matrice $A = (a_{ij})$, il sistema omogeneo:

$$(A - \lambda I)\,u = 0$$

con $u = (x_1, \ldots, x_n)$ e I matrice identica, ha almeno una soluzione u diversa da quella banale. Una tale soluzione u dicesi **autovettore** di A corrispondente all'autovalore λ.
Si verifica immediatamente che se u è un autovettore allora anche $a \cdot u$ lo è qualunque sia $a \in \mathbb{R} - \{0\}$; infatti

$$(A - \lambda I)\,au = a\,(A - \lambda I)\,u = a \cdot 0 = 0.$$

Risulta facile dimostrare il seguente:

Teorema 4 *Se A è una matrice simmetrica, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ sono due autovalori di A e u_1 e u_2 due corrispondenti autovettori, allora:*

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow u_1 \cdot u_2 = 0,$$

i.e. i due autovettori corrispondenti ad autovalori diversi sono fra loro ortogonali.

Dimostrazione — Omessa. □

Esercizio — Risolvere mediante la regola di Cramer il sistema

$$\begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ x + y + z \quad = 1 \\ x + y + 2z \ = 0 \end{cases}$$

■

$x = 1$, $y = 1$ e $z = -1$.

Esercizio — Risolvere il sistema

$$\begin{cases} 6x + y + 4z = 5 \\ 8x + 3y - z = 5 \\ 3x - 2y + z = 5 \end{cases}$$

■

$x = 1$, $y = -1$ e $z = 0$.

Esercizio — Utilizzando il teorema di Rouché-Capelli, studiare il sistema

$$\begin{cases} x + 2y = \ \ 3 \\ 2x - y = \ \ 4 \\ x + 5y = -1 \end{cases}$$

■

Essendo

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 26 \neq 0,$$

il sistema non ha soluzioni, in quanto la caratteristica della matrice completa è 3, mentre quella della matrice incompleta è 2.

Esercizio — Risolvere mediante il teorema di Rouché-Capelli il seguente sistema

$$\begin{cases} 2x + y &= 4 \\ x + 6y &= -1 \\ 19y + 5x &= 1 \end{cases}$$

■

La matrice incompleta

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \\ 5 & 19 \end{pmatrix}$$

ha caratteristica 2 in quanto, ad esempio,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 11.$$

La matrice completa:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & -1 \\ 5 & 19 & 1 \end{pmatrix}$$

ha anch'essa caratteristica 2 (si osservi che la terza riga è la somma della prima con la seconda moltiplicata per 3). Si verifica facilmente che il sistema costituito dalle prime due equazioni

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + 6y = -1 \end{cases}$$

ammette la soluzione $x = 25/11$ e $y = -6/11$. Si osservi che questa soluzione soddisfa anche la terza equazione del sistema dato.