

Limiti di successioni.

Biagio Raucci

Sommario

Uno dei problemi che affronteremo nel fascicolo sugli integrali sarà il calcolo delle aree di figure piane. Tale calcolo fa uso in modo essenziale del concetto di limite. Per mostrare ciò, consideriamo un metodo per il calcolo dell'area di un cerchio, simile al metodo che Archimede usò nel III secolo a.C.

Si tratta di "approssimare" un cerchio di raggio 1 (potremmo scegliere anche un diverso valore per il raggio) con figure che "differiscono di poco" dal cerchio, e di cui sia possibile agevolmente calcolare l'area. Nel fascicolo sugli integrali vedremo che è comodo considerare, come figure approssimanti, unioni di rettangoli. Qui, per ogni $n \geq 3$ considereremo P_n , un poligono regolare di n lati inscritto al cerchio di raggio 1, i.e. per $n = 3$ consideriamo un triangolo equilatero ($= P_3$) inscritto nel cerchio, per $n = 4$ un quadrato ($= P_4$), e così via (vedi figura 1).

Agli n lati del poligono P_n corrispondono n angoli al centro uguali fra di loro, che sono l' n -esima parte dell'angolo giro e che quindi misurano $2\pi/n$ radianti. Quindi l'angolo α indicato in figura vale $\alpha = \pi/n$ radianti. Dato che i cateti del triangolo rettangolo in figura misurano $\sin \alpha$ e $\cos \alpha$, la sua area vale

$$\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{2}.$$

Per ottenere l'area del poligono P_n occorre moltiplicare l'ultimo risultato per il numero dei triangoli rettangoli in cui è composto P_n , i.e. per $2n$. Quindi l'area di P_n , che indichiamo con a_n , vale:

$$a_n = \text{area}(P_n) = 2n \cdot \frac{1}{2} \sin \alpha \cos \alpha$$

Usando le formule di duplicazione e ricordando il valore di α otteniamo:

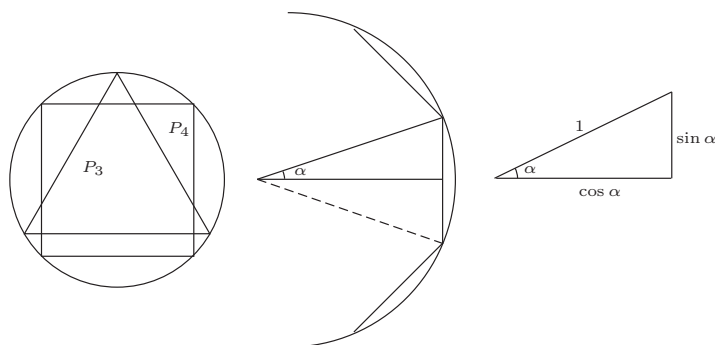


Figura 1. Il metodo di Archimede.

$$a_n = \frac{n}{2} \sin \frac{2\pi}{n}. \quad (1)$$

Se riportassimo a_n per alcuni valori di n ci accorgeremmo che per n molto grande, i valori di a_n si avvicinano a $\pi = 3.14159265\dots$. Archimede, partendo dall'esagono e raddoppiando per 4 volte il numero dei lati, considerò un poligono regolare a 96 lati e riuscì a calcolare le prime due cifre decimali di π .

Dimostreremo in una sezione di queste note, tramite la (1), che l'area del cerchio di raggio 1 vale π . Però la (1) non è utile per calcolare numericamente π , perchè π entra nella definizione stessa di a_n .

Qui desideriamo sottolineare lo schema di procedimento: abbiamo introdotto una *successione* di numeri reali

$$a_3, a_4, a_5, \dots, a_n, \dots$$

Di tale successione ci interessa il comportamento per n grande. Infatti il numero a_n rappresenta l'area del poligono regolare di n lati inscritti al cerchio, ed è tanto più vicino all'obiettivo area del cerchio, quanto più grande è n . Se avesse un senso, diremmo che ci interessa "l'ultimo" termine della successione a_n ; però ciò non ha senso perchè non esiste l'ultimo termine della successione.

Ciò che realmente c'interessa è il *limite* della successione a_n , i.e. un numero $a \in \mathbb{R}$ che sia "vicino" ai termini della successione che hanno l'indice n "grande". Ciò si esprime più precisamente così: a , limite della successione a_n , è un numero reale tale che comunque si scelga un intervallo di numeri intorno ad a , diciamo

$$]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$$

con $\varepsilon > 0$, allora esiste un indice ν tale che, per $n > \nu$, a_n sta in questo intervallo, i.e.

$$a_n \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[.$$

L'intervallo $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ considerato in precedenza e definito, in formula, da

$$]a - \varepsilon, a + \varepsilon[= \{x \in \mathbb{R} : a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\},$$

è detto **intorno del numero a** , di raggio ε .

Key words: Limiti, successioni.

VERS: 1.0

1 Definizioni e prime proprietà

Una **successione** è una legge che ad ogni numero naturale n fa corrispondere uno ed un solo numero reale a_n . Ricordando la definizione di funzione si può dire che *una successione è una funzione da \mathbb{N} in \mathbb{R}* . Indichiamo una successione con a_n , o per esteso con

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \quad (2)$$

Esempio 1 *Esempi di successioni sono:*

$$\begin{aligned} a_n = \frac{1}{n} &\Leftrightarrow 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \\ a_n = \frac{n-1}{n} &\Leftrightarrow 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n-1}{n}, \dots \\ a_n = \frac{(-1)^n}{n} &\Leftrightarrow -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{(-1)^n}{n}, \dots \\ a_n = (-1)^n &\Leftrightarrow -1, 1, -1, 1, \dots, (-1)^n, \dots \\ a_n = n^2 &\Leftrightarrow 1, 4, 9, 16, \dots, n^2, \dots \end{aligned}$$

Definizione 1 *Un numero reale a è il limite della successione a_n (si dice che a_n tende o converge ad a), e si scrive:*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$$

se, qualunque sia $\varepsilon > 0$, esiste un numero ν_ε tale che $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ per ogni $n > \nu$.

La relazione $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ si può anche scrivere

$$-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$$

ovvero:

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Quindi possiamo ripetere la definizione precedente in simboli:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \nu : |a_n - a| < \varepsilon, \forall n > \nu. \quad (3)$$

Osservazione 1 *Osserviamo, perchè ci sarà utile nel seguito, che la (3) è equivalente a:*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \Leftrightarrow \exists c > 0 : \forall \varepsilon > 0, \exists \nu : |a_n - a| < c\varepsilon, \forall n > \nu; \quad (4)$$

Email address: raucchi@gmail.com (Biagio Raucchi).

infatti dalla (4) si riottiene la (3) cambiando ε con ε/c .

Esercizio — Usando la definizione, verifichiamo che:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Risulta

$$|a_n - a| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n}.$$

Dato che $1/n < \varepsilon$ equivale a $n > 1/\varepsilon$, basta scegliere $\nu = 1/\varepsilon$. Cioè abbiamo verificato che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu = 1/\varepsilon$ per cui

$$|a_n - a| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

per ogni $n > \nu$.

■

Esercizio — Verifichiamo ora che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{n} = 1.$$

Risulta:

$$|a_n - a| = \left| \frac{n-1}{n} - 1 \right| = \left| -\frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n};$$

in questo esempio si vede l'importanza di considerare il valore assoluto di $|a_n - a|$; si trova

$$|a_n - a| = \frac{1}{n}$$

e poi si procede come nel caso precedente. ■

Esercizio — Naturalmente, nei due esempi precedenti, non abbiamo scelto a caso i due valori, $a = 0$ e $a = 1$. Proviamo a vedere che succede se invece tentassimo di dimostrare che:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 1$$

Avremmo:

$$|a_n - a| = \left| \frac{1}{n} - 1 \right| = 1 - \frac{1}{n} < \varepsilon, \text{ i.e. } \frac{1}{n} > 1 - \varepsilon.$$

Questa relazione non crea problemi se ε è grande, ad esempio se $\varepsilon = 1$ è verificata da ogni $n \in \mathbb{N}$. Ma se ε è più piccolo, ad esempio se $\varepsilon = 1/2$, allora

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{2}$$

è verificata solo se $n < 2$. Cioè solo a_1 verifica la relazione data, e non a_n con $n > \nu$. Ciò prova che $a = 1$ **non** è il limite della successione $1/n$. ■

con un ragionamento simile verifichiamo il seguente teorema:

Teorema 1 (Unicità del limite) *Una successione convergente non può avere due limiti distinti.*

Dimostrazione — supponiamo per assurdo che esistano due limiti distinti, i.e. supponiamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = b$$

con $a \neq b$. Poniamo

$$\varepsilon = \frac{|a - b|}{2} > 0.$$

Si ha:

$$\exists \nu_1 : |a_n - a| < \varepsilon, \forall n > \nu_1; \quad \exists \nu_2 : |a_n - b| < \varepsilon, \forall n > \nu_2.$$

Ponendo $\nu = \max\{\nu_1, \nu_2\}$, le relazioni sopra scritte valgono contemporaneamente e si ha (usando la disuguaglianza triangolare):

$$\begin{aligned} |a - b| &= |(a - a_n) + (a_n - b)| \leq |a - a_n| + |a_n - b| = \\ &= |a_n - a| + |a_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = |a - b| \end{aligned}$$

Abbiamo così provato che

$$|a - b| < |a - b|$$

che è assurdo. L'assurdo a cui siamo pervenuti dimostra la tesi. \square

Definizione 2 *Una successione a_n ha limite uguale a $+\infty$ (si dice anche che a_n tende o diverge a $+\infty$) e si scrive:*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \tag{5}$$

se, qualunque sia $M > 0$, esiste un numero ν tale che $a_n > M$, per ogni $n > \nu$.

Osservazione 2 *Si dà una definizione analoga nel caso di limite uguale a $-\infty$. In particolare si scriverà:*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \nu : \forall n > \nu \Rightarrow a_n < -M.$$

Come detto, una successione si dice **convergente** se ammette limite finito, mentre si dice **divergente** se ammette limite uguale a¹ ∞ . Le successioni convergenti o divergenti si dicono **regolari**, mentre le successioni che non ammettono limite si dicono **non regolari**.

Infine, una successione che converge a zero si dice **infinitesima**, mentre una successione divergente si dice **infinita**.

¹ Indicheremo con ∞ uno dei due seguenti casi possibili: $+\infty$ o $-\infty$.

2 Successioni limitate

Abbiamo detto nel paragrafo precedente che una successione si dice *regolare* se ammette limite (finito o infinito). Invece una successione a_n si dice **limitata** se esiste un numero reale M tale che:

$$|a_n| \leq M \Leftrightarrow -M \leq a_n \leq M.$$

Esistono delle successioni limitate ma non regolari; un esempio è fornito dalla successione $a_n = (-1)^n$ che è limitata (perchè $|a_n| = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$) ma che, come faremo vedere, non ammette limite.

Esercizio — Proviamo che la successione:

$$a_n = (-1)^n$$

non ammette limite.

Supponiamo, per assurdo, che esista il limite:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n.$$

Se $a \geq 0$, consideriamo $|a_n - a|$ con n dispari. Allora $a_n = -1$ e quindi

$$|a_n - a| = |-1 - a| = 1 + a \geq 1.$$

Perciò, se $\varepsilon < 1$, non risulta mai $|a_n - a| < \varepsilon$ per n dispari. Si procede in modo analogo per il caso $a \leq 0$ prendendo i termini con indice pari. ■

Viceversa, ogni successione che ammette limite finito è limitata, come mostrato dal seguente:

Teorema 2 *Ogni successione convergente è limitata.*

Dimostrazione — Supponiamo che a_n converga ad a e scegliamo $\varepsilon = 1$. In base alla definizione di limite esiste un indice ν per cui $|a_n - a| < 1$ per ogni $n > \nu$. Quindi:

$$|a_n| = |(a_n - a) + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|, \quad \forall n > \nu$$

Ma allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha:

$$|a_n| \leq M = \max \{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_\nu|, 1 + |a|\}.$$

□

3 Operazioni con i limiti

Valgono le seguenti regole di calcolo:

Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$, con $a, b \in \mathbb{R}$, si ha:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b. \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b. \quad (7)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{a}{b} \quad (\text{con } b_n, b \neq 0). \quad (8)$$

Dimostriamo la (6) con il segno $+$: per ipotesi, per ogni $\varepsilon > 0$,

$$\exists \nu_1 : |a_n - a| < \varepsilon, \forall n > \nu_1; \exists \nu_2 : |b_n - b| < \varepsilon, \forall n > \nu_2. \quad (9)$$

Ponendo $\nu = \max\{\nu_1, \nu_2\}$, per ogni $n > \nu$ si ha:

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < 2\varepsilon.$$

La prova è completa.

Dimostriamo la formula (7) relativa al limite di un prodotto con due metodi, il primo dei quali non fa uso del concetto di successione limitata.

primo metodo: utilizziamo l'identità

$$\begin{aligned} a_n b_n - ab &= (a_n - a)(b_n - b) + a_n b + a b_n - 2ab = \\ &= (a_n - a)(b_n - b) + (a_n - a)b + a(b_n - b). \end{aligned}$$

Nell'ipotesi (9) risulta quindi:

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &\leq |a_n - a| \cdot |b_n - b| + |a_n - a| \cdot |b| + |a| \cdot |b_n - b| < \\ &< \varepsilon^2 + \varepsilon |b| + |a| \varepsilon \end{aligned}$$

per ogni $n > \nu = \max\{\nu_1, \nu_2\}$.

secondo metodo: per un teorema precedente la successione a_n è limitata, i.e. esiste un numero reale $M(> 0)$ tale che:

$$|a_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (10)$$

Dall'ipotesi (9), per ogni $n > \nu = \max\{\nu_1, \nu_2\}$ si ottiene:

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| = |a_n (b_n - b) + b (a_n - a)| \leq \\ &\leq |a_n| |b_n - b| + |b| |a_n - a| < M\varepsilon + |b| \varepsilon = (M + |b|) \varepsilon. \end{aligned}$$

La prova che il limite di un quoziente è uguale al quoziente dei limiti è simile alla prova della relazione per il limite di un prodotto. Infatti, consideriamo le successioni a_n e b_n , convergenti, rispettivamente, ad $a, b \in \mathbb{R}$. Per ipotesi

$b \neq 0$. Supponendo che risulti $b > 0$ (il caso $b < 0$ è analogo), posto $\varepsilon = b/2$ esiste un indice ν_1 tale che $b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon$ per ogni $n > \nu_1$; in particolare:

$$b_n > b - \varepsilon = b - \frac{b}{2} = \frac{b}{2}, \quad \forall n > \nu_1$$

Per ipotesi, per ogni $\varepsilon > 0$ esistono ν_2 e ν_3 tali che

$$|a_n - a| < \varepsilon, \forall n > \nu_2; \quad |b_n - b| < \varepsilon, \forall n > \nu_3$$

Posto $\nu = \max \{\nu_1, \nu_2, \nu_3\}$, per ogni $n > \nu$ si ha:

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} \right| &= \left| \frac{a_n b - a b_n}{b b_n} \right| = \frac{1}{|b b_n|} |(a_n - a) b + a (b - b_n)| \leq \\ &\leq \frac{1}{(b/2) \cdot b} (|a_n - a| \cdot b + |a| \cdot |b_n - b|) < \varepsilon \frac{2(b + |a|)}{b^2} \end{aligned}$$

Esempio 2 *Esaminiamo due esempi di applicazioni delle operazioni con i limiti. Avendo già verificato che la successione $1/n$ converge a zero per $n \rightarrow +\infty$, dal limite del prodotto con $a_n = b_n = 1/n$ si deduce che*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

e, iterando il procedimento,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{-b} = 0, \quad \forall b \in \mathbb{N}.$$

Mediante le operazioni con i limiti si calcola, ad esempio, il seguente limite, dividendo numeratore e denominatore per n^2 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 5n - 5}{3n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{5}{n} - \frac{4}{n^2}}{3 + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{3}$$

4 Forme indeterminate

Si prova che valgono le operazioni con limiti infiniti nei casi seguenti:

$$a_n \rightarrow a \quad b_n \rightarrow \pm\infty \Rightarrow a_n + b_n \rightarrow \pm\infty$$

$$a_n \rightarrow \pm\infty \quad b_n \rightarrow \pm\infty \Rightarrow a_n + b_n \rightarrow \pm\infty$$

$$a_n \rightarrow a \neq 0 \quad b_n \rightarrow \pm\infty \Rightarrow |a_n b_n| \rightarrow +\infty$$

$$a_n \rightarrow \pm\infty \quad b_n \rightarrow \pm\infty \Rightarrow |a_n b_n| \rightarrow +\infty$$

$$a_n \rightarrow a \quad b_n \rightarrow \pm\infty \Rightarrow a_n/b_n \rightarrow 0$$

$$a_n \rightarrow a \quad b_n \rightarrow \pm\infty \Rightarrow |b_n/a_n| \rightarrow +\infty$$

$$a_n \rightarrow a \neq 0 \quad b_n \rightarrow 0 \Rightarrow |a_n/b_n| \rightarrow +\infty$$

Risultano esclusi dalla tabella alcuni casi che schematizziamo nelle forme seguenti, dette **forme indeterminate**:

$$\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty/\infty, \quad 0/0$$

Dire che un limite è una forma indeterminata non significa dire che il limite non esiste, ma significa semplicemente che occorre preliminarmente eseguire trasformazioni, o semplificazioni, per togliere, se possibile, l'indeterminazione.

Esempio 3 *La successione:*

$$(n+1)^2 - (n-1)^2$$

è una forma $+\infty - \infty$. Però svolgendo i quadrati si trova che la successione vale $4n$ e quindi tende a $+\infty$.

Esempio 4 *Il limite:*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \cdot (n+1)$$

è una forma $0 \cdot \infty$, ma si può anche scrivere come:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = 0$$

5 Teoremi di confronto

Studiamo in questo paragrafo alcune relazioni tra limiti e ordinamento.

Teorema 3 (della permanenza del segno) — Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a > 0$, esiste un numero ν tale che $a_n > 0$ per ogni $n > \nu$.

Osservazione 3 Prima di proporre la dimostrazione del teorema della permanenza del segno sottolineiamo che, se una successione a_n converge ad un numero reale positivo a , **non** si può affermare in generale che **tutti** i termini della successione a_n sono positivi. Ad esempio la successione $a_n = (n - 7) / n$ converge al numero 1 per $n \rightarrow \infty$, però i primi termini della successione (da a_1 fino ad a_6) sono negativi; il numero ν , nella tesi del teorema della permanenza del segno, in questo caso è uguale a 7.

Dimostrazione — Dato che $a > 0$, possiamo scegliere $\varepsilon = a/2$. Esiste quindi un numero ν per cui $|a_n - a| < a/2$ per ogni $n > \nu$. Ciò equivale a:

$$-\frac{a}{2} < a_n - a < \frac{a}{2}.$$

In particolare abbiamo:

$$a_n > a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} > 0, \quad \forall n > \nu.$$

□

Corollario 1 Se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$$

e se $a_n \geq 0$ per ogni n , allora anche $a \geq 0$.

Dimostrazione — Se per assurdo fosse $a < 0$, il teorema della permanenza del segno, applicato alla successione $-a_n$, comporterebbe che $a_n < 0$ per n grande. □

Corollario 2 Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$, e se $a_n \geq b_n$ per ogni n , allora $a \geq b$.

Dimostrazione — Per ottenere la dimostrazione di quest'ultimo corollario, basta applicare il corollario precedente alla successione $a_n - b_n$. □

Teorema 4 (dei carabinieri) — Siano a_n , b_n e c_n tre successioni tali che

$$a_n \leq c_n \leq b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = a$ allora anche la successione c_n è convergente e risulta:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = a.$$

Dimostrazione — Per ipotesi, per ogni $\varepsilon > 0$

$$\exists \nu_1 : |a_n - a| < \varepsilon, \forall n > \nu_1; \quad \exists \nu_2 : |b_n - a| < \varepsilon, \forall n > \nu_2.$$

Ricordiamo che le disuguaglianze col valore assoluto si possono anche scrivere nel modo seguente:

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \quad ; \quad a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon.$$

Quindi, se $n > \nu = \max \{ \nu_1, \nu_2 \}$, risulta:

$$a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon.$$

Perciò

$$|c_n - a| < \varepsilon$$

per ogni $n > \nu$, come volevasi dimostrare. □

6 Altre proprietà dei limiti di successioni

Riportiamo, in questa sezione, due ulteriori proprietà dei limiti; in particolare la seconda, enunciata sotto forma di teorema, è importante per le applicazioni.

Proposizione 1 *a_n converge a zero se e soltanto se $|a_n|$ converge a zero.*

Dimostrazione — Posto $b_n = |a_n|$, in base alla definizione (3), b_n converge a zero se e solo se:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu : |b_n| < \varepsilon$$

Dato che:

$$|b_n| = \|a_n\| = |a_n|, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

la proposizione resta dimostrata. □

Osservazione 4 *Si noti che, nella proposizione precedente, è importante considerare non solo successioni convergenti, ma più in particolare successioni **convergenti a zero**. Ad esempio, se $a_n = (-1)^n$, allora a_n non è convergente, mentre la $b_n = |a_n|$ è la successione costante $b_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$, che ovviamente converge ad 1.*

Ricordiamo che una successione a_n è limitata se esiste un numero $M > 0$ tale che

$$|a_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ricordiamo, inoltre, che una successione che converge a zero è detta *infinitesima*.

Teorema 5 (successione limitata per una infinitesima) — Se a_n è una successione limitata e b_n è una successione che converge a zero, allora la successione prodotto $a_n \cdot b_n$ converge a zero

Dimostrazione — Risulta:

$$|a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq M \cdot |b_n|, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ovvero, per la proprietà del valore assoluto, risulta:

$$-M \cdot |b_n| \leq a_n b_n \leq M \cdot |b_n|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Poichè, per ipotesi, $b_n \rightarrow 0$, per la proposizione precedente anche la successione $|b_n|$ converge a zero. Per il teorema dei carabinieri deduciamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n = 0.$$

□

Esempio 5 A titolo di esempio verifichiamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n (n+5)}{3n^2+1} = 0;$$

infatti si tratta del limite del prodotto della successione limitata $a_n = (-1)^n$ per la successione infinitesima

$$b_n = \frac{n+5}{3n^2+1} = \frac{1/n + 5/n^2}{3 + 1/n^2}.$$

Esempio 6 Verifichiamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n} = 0.$$

Il limite è zero perchè limite del prodotto della successione limitata $a_n = \sin n$ per la successione infinitesima $b_n = 1/n$.

7 Alcuni limiti notevoli

In questo paragrafo esaminiamo alcuni esempi di limiti particolarmente importanti. Cominciamo con ($a \in \mathbb{R}$ fissato):

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ 0 & \text{se } a \in]-1, 1[\\ \text{non esiste} & \text{se } a \leq -1 \end{cases}$$

Se $a > 1$ è possibile utilizzare la diseguglianza di Bernoulli:

$$a^n \geq 1 + n(a - 1).$$

Poichè $a > 1$, il secondo membro tende a $+\infty$ se $n \rightarrow +\infty$; per il teorema di confronto anche $a^n \rightarrow +\infty$.

I casi $a = 1$ e $a = 0$ sono ovvi.

Se a è diverso da zero e compreso tra -1 e 1 , risulta

$$\frac{1}{|a|} > 1$$

e quindi dal caso già trattato otteniamo:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |a^n| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1/|a|)^n} = 0.$$

Se $a < -1$, si vede che la successione con esponenti pari tende a $+\infty$, mentre la successione con esponenti dispari tende a $-\infty$. Perciò non esiste il limite per $n \rightarrow \infty$ di a^n .

Tenendo conto che

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n} \rightarrow a^0 = 1$$

risulta:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$$

Risulta, ancora:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a^b} = 1.$$

Per le funzioni trigonometriche si ha:

$$\text{Se } a_n \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin a_n = 0;$$

$$\text{Se } a_n \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos a_n = 1;$$

e, ancora:

$$\text{Se } a_n \rightarrow 0, a_n \neq 0, \quad \forall n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1.$$

8 Successioni monotòne. Il numero e

Definizione 3 Si dice che una successione a_n è:

- *strettamente crescente* se : $a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$;
- *crescente* se : $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$;
- *strettamente decrescente* se : $a_n > a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$;
- *decrescente* se : $a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$;

Una successione a_n è **monotòna** se verifica una delle quattro condizioni sopra scritte. Quando sono verificate le condizioni di stretta crescita o decrescenza si dirà, anche, che la successione è *strettamente monotòna*.

Una successione $a_n = a$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, con a numero reale fissato, è una *successione costante*. Le successioni costanti sono allo stesso tempo crescenti e decrescenti.

Enunceremo, senza dimostrare, il seguente:

Teorema 6 *Ogni successione monotòna ammette limite. In particolare, ogni successione monotòna e limitata è convergente, i.e. ammette limite finito.*

Dimostrazione — Omessa. □

Il teorema sulle successioni monotòne è utile per definire il *numero di Nepero* e, come limite di una particolare successione monotona e limitata. Introduciamo tale numero studiando un modello di crescita di una popolazione.

Un modello non lontano dalla realtà è il seguente: si suppone che, in un piccolo intervallo di tempo, l'aumento del numero degli individui sia proporzionale al tempo trascorso ed al numero stesso degli individui. Se indichiamo con $p(t)$ la popolazione (numero degli individui) al tempo t , e se poniamo per semplicità uguale a 1 la costante di proporzionalità, abbiamo per due tempi t_1 e t_2 distinti:

$$p(t_2) - p(t_1) = (t_2 - t_1) p(t_1). \quad (11)$$

Nella relazione precedente $p(t_2) - p(t_1)$ è *l'incremento di popolazione*, mentre $(t_2 - t_1)$ è *l'incremento di tempo* trascorso.

Supposta nota la popolazione $p(t_1)$ al tempo $t = t_1$ è quindi possibile, tramite la (11) ricavare la popolazione al tempo $t = t_2$. Assumendo convenzionalmente $t_1 = 0$ e $t_2 = 1$, dalla (11) è possibile determinare $p(1)$ in funzione di $p(0)$. Si ottengono però dei risultati più aderenti alle misure sperimentali applicando la legge (11) ad un intervallo di tempo di "piccola lunghezza"; per ottenere ciò si divide l'intervallo di tempo $[0, 1]$ in n parti uguali di ampiezza $1/n$ (vedi figura 2). Dalla (11) si ottiene:

$$t_1 = 0, \quad t_2 = \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad p\left(\frac{1}{n}\right) - p(0) = \frac{1}{n} p(0),$$

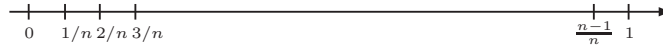


Figura 2. Suddivisione dell'intervallo $[0, 1]$ in n parti uguali.

se

$$t_1 = \frac{1}{n}, \quad t_2 = \frac{2}{n} \quad \Rightarrow \quad p\left(\frac{2}{n}\right) - p\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}p\left(\frac{1}{n}\right),$$

se

$$t_1 = \frac{2}{n}, \quad t_2 = \frac{3}{n} \quad \Rightarrow \quad p\left(\frac{3}{n}\right) - p\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{1}{n}p\left(\frac{2}{n}\right),$$

e così via. Ricavando poi $p(1/n)$, $p(2/n)$, \dots ,

$$\begin{aligned} p\left(\frac{1}{n}\right) &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)p(0) \\ p\left(\frac{2}{n}\right) &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)p\left(\frac{1}{n}\right) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 p(0) \\ p\left(\frac{3}{n}\right) &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)p\left(\frac{2}{n}\right) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 p(0) \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \end{aligned}$$

e dopo n passi

$$p(1) = p\left(\frac{n}{n}\right) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n p(0).$$

Al limite per $n \rightarrow +\infty$ otteniamo

$$p(1) = p(0) \cdot e$$

dove si è posto:

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \quad (12)$$

La (12) è la definizione del **numero di Nepero** e . Si noti che la successione

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

è strettamente crescente e limitata; quindi esiste, ed è un numero reale, il limite per $n \rightarrow \infty$ di a_n e vale circa:

$$e = 2.71828182846$$

8.1 Utilizzo del numero e in matematica finanziaria

In un'operazione finanziaria indichiamo con P il capitale iniziale e con M il capitale finale alla scadenza di un anno. Il rapporto:

$$i = \frac{M - P}{P}$$

prende il nome di *tasso annuo d'interesse* prodotto da un euro.
Dopo n anni, l'interesse totale sarà:

$$I = nPi$$

ed il capitale finale (o *montante*) sarà:

$$M = P + nPi = P(1 + ni). \quad (13)$$

In tal caso si parla di *capitalizzazione semplice*.

Tuttavia vi è un'altra forma di operazione, detta *capitalizzazione composta*, nella quale gli interessi vengono aggiunti periodicamente al capitale per essere reinvestiti e produrre, a loro volta, interessi.

Ad esempio, se una somma di 1000 euro viene investita al tasso i del 10% e capitalizzata una volta l'anno, allora:

- essa produce 100 euro a fine del primo anno e tale cifra viene aggiunta al capitale;
- il capitale, all'inizio del secondo anno, è di 1100 euro e produce, alla fine del secondo anno, 110 euro e tale cifra viene aggiunta al capitale;
- il capitale, all'inizio del terzo anno, diviene 1210 euro e produce, a fine del terzo anno 121 euro e così via.

Volendo esprimere in formule la capitalizzazione composta, consideriamo dapprima il caso in cui la capitalizzazione si verifica una volta all'anno. ci chiediamo a quale valore ammonta un capitale P impiegato ad interesse composto durante n anni, al tasso annuo pari a i per 1 euro.

Alla fine del primo anno, il capitale P produce $P \cdot i$ euro d'interesse, divenendo:

$$P + P \cdot i = P(1 + i);$$

durante il primo anno, il capitale impiegato è $P(1 + i)$ e a fine anno diviene:

$$P(1 + i) + P(1 + i) \cdot i = P(1 + i)(1 + i) = P(1 + i)^2;$$

alla fine dell' n -esimo anno, il capitale ammonta a euro:

$$P(1 + i)^n. \quad (14)$$

Consideriamo ora il caso in cui la frequenza delle operazioni di capitalizzazione viene aumentata.

Ad esempio, supponiamo di investire $P = 1000$ euro, al tasso annuo del 10%. Se la capitalizzazione fosse annuale si avrebbe dopo n anni un montante dato dalla (14) pari a:

$$1000 \left(1 + \frac{1}{10}\right)^n.$$

Se la capitalizzazione è, invece, semestrale, i.e. se le operazioni si effettuano due volte all'anno, con tasso annuo del 10%, si dovrà aggiungere un 5% ogni

semestre. In altre parole, alla fine del semestre, il capitale avrà prodotto 50 euro che, essendo a loro volta reinvestite, produrranno interesse nel corso dei successivi semestri.

Pertanto il capitale ammonta:

- alla fine del primo semestre, a

$$P \left(1 + \frac{5}{100} \right) = P \left(1 + \frac{1}{2} \frac{10}{100} \right)^{2 \times \frac{1}{2}};$$

- alla fine del primo anno, a

$$P \left(1 + \frac{5}{100} \right)^2 = P \left(1 + \frac{1}{2} \frac{10}{100} \right)^{2 \times 1};$$

- alla fine del terzo semestre, a

$$P \left(1 + \frac{5}{100} \right)^3 = P \left(1 + \frac{1}{2} \frac{10}{100} \right)^{2 \times \frac{3}{2}};$$

- alla fine del secondo anno a:

$$P \left(1 + \frac{5}{100} \right)^4 = P \left(1 + \frac{1}{2} \frac{10}{100} \right)^{2 \times 2};$$

e così via; alla fine dell' m -esimo anno il capitale ammonta a

$$P \left(1 + \frac{5}{100} \right)^{2m} = P \left(1 + \frac{1}{2} \frac{10}{100} \right)^{2m} = P \left(1 + \frac{i}{2} \right)^{2m},$$

essendo $i = 10/100 = 10\%$.

In altre parole, se il numero delle capitalizzazioni effettuate ogni anno è n , dopo m periodi si ha il montante

$$M = P \left(1 + \frac{i}{n} \right)^{n \cdot m}. \quad (15)$$

Si può dimostrare che, se si aumenta la frequenza delle operazioni di capitalizzazione, fino ad avere una *capitalizzazione continua*, la crescita del capitale rivela un andamento di tipo esponenziale con base e . Infatti, la (15) può essere riscritta nel modo seguente:

$$M = P \left[\left(1 + \frac{i}{n} \right)^{n/i} \right]^{im} \quad (16)$$

e, posto $\frac{n}{i} = k$, si ha:

$$M = P \left[\left(1 + \frac{1}{k} \right)^k \right]^{im}.$$

da cui:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} P \left[\left(1 + \frac{1}{k} \right)^k \right]^{im} = P e^{im} .$$

i.e. facendo tendere all'infinito la frequenza n delle capitalizzazioni annue otteniamo che:

$$M = P e^{im} . \tag{17}$$

Tale relazione esprime il fatto che gli interessi capitalizzano istante per istante. Naturalmente, nella realtà non si può avere la capitalizzazione continua, ma la formula (17) fornisce un'approssimazione assai utile, allorchè la frequenza della capitalizzazione è abbastanza alta.