

Limiti di funzioni. Funzioni continue

Biagio Raucci

Sommario

Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad (1)$$

che è definita per ogni $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. Allo scopo di disegnare il grafico, osserviamo preliminarmente che $-1 \leq \sin x \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$; dividendo tutti i membri di quest'ultima diseuguaglianza per x , otteniamo:

$$-\frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}, \quad \forall x > 0. \quad (2)$$

Osservazione 1 Se $x < 0$ si ottiene la situazione analoga

$$\frac{1}{x} \leq f(x) \leq -\frac{1}{x};$$

comunque, essendo $f(x)$ una funzione pari (i.e. $f(-x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R} - \{0\}$), è sufficiente studiarne le proprietà per $x > 0$, riportando poi il disegno anche per $x < 0$, per simmetria rispetto all'asse y .

Le funzioni $y = -1/x$ e $y = 1/x$, che appaiono nella stima (2), hanno per grafico dei rami di iperbole, come in figura (1). Il disegno è significativo per x sufficientemente

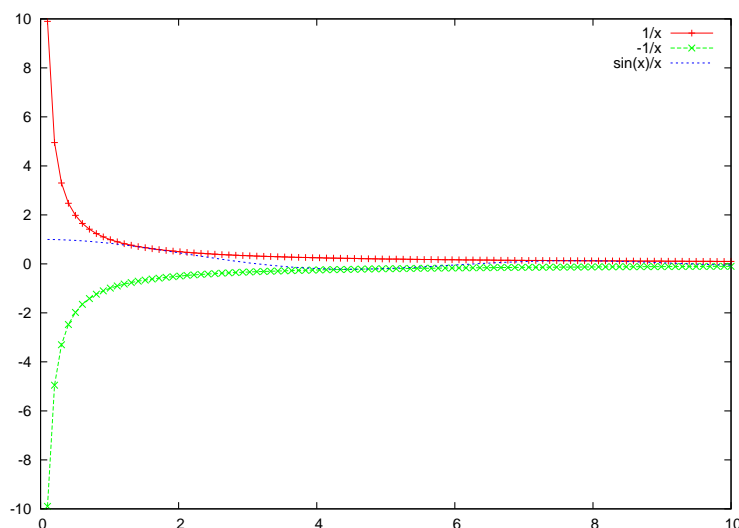


Figura 1. Costruzione del grafico della funzione (2).

grande, è invece indeterminato per x "vicino" a zero.

Una formulazione rigorosa del comportamento di $f(x)$ per x "vicino" ad x_0 si ottiene formalizzando il concetto di limite di funzione.

Key words: Limiti, funzioni, funzioni continue.

VERS: 1.0

1 Punti di accumulazione

Sia A un insieme di numeri reali. Un numero reale x_0 è un punto di accumulazione per l'insieme A se, qualunque sia $\varepsilon > 0$, esiste almeno un numero reale $x \in A$ tale che

$$0 \neq |x - x_0| < \varepsilon.$$

In altre parole, $x_0 \in \mathbb{R}$ è di accumulazione per l'insieme A , se in ogni intorno di x_0 del tipo $(\varepsilon > 0)$:

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon\}$$

cade almeno un punto di A distinto da x_0 .

Teorema 1 *Un numero $x_0 \in \mathbb{R}$ è di accumulazione per un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ se e solo se in ogni intorno di x_0 cadono infiniti punti di A distinti da x_0 .*

Dimostrazione — Proviamo che se in ogni intorno di x_0 cade almeno un punto di A distinto da x_0 allora in ogni intorno di x_0 cadono anche infiniti punti di A distinti da x_0 . Infatti supponiamo **per assurdo** che esista un intorno di x_0 con la proprietà che solo un numero finito di punti di A siano in tale intorno.

Indicando con x_i , per $i = 1, 2, \dots, k$, i punti di A distinti da x_0 che fanno parte dell'intorno di $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ (vedi figura 2) e posto

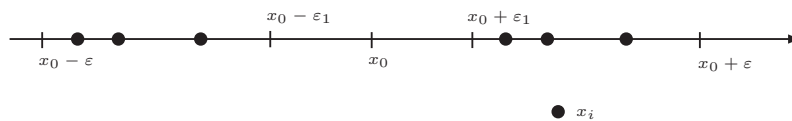


Figura 2. Punto di accumulazione.

$$\varepsilon_1 = \min \{|x_i - x_0| : i = 1, 2, \dots, k\},$$

nell'intorno $(x_0 - \varepsilon_1, x_0 + \varepsilon_1)$ **non cade** alcun punto di A distinto da x_0 , contrariamente all'ipotesi. \square

Email address: raucchi@gmail.com (Biagio Raucchi).

Utile nella definizione di limite di funzione è il seguente

Teorema 2 *Se x_0 è un punto di accumulazione per l'insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, esiste una successione x_n di punti di A , con $x_n \neq x_0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, convergente ad x_0 .*

Dimostrazione — Essendo x_0 di accumulazione per A , qualunque sia $n \in \mathbb{N}$, l'intorno di x_0

$$\left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right) \quad (3)$$

contiene punti di A distinti da x_0 ; precisamente nell'insieme (3) ci sono infiniti punti. Perciò, per ogni $n \in \mathbb{N}$, è possibile scegliere x_n con le proprietà:

$$x_n \in A, \quad x_n \neq x_0, \quad x_0 - \frac{1}{n} < x_n < x_0 + \frac{1}{n}$$

Per $n \rightarrow \infty$ la successione x_n converge a x_0 per il teorema dei carabinieri. \square

2 Definizioni

Supporremo, nelle definizioni che seguono, che le funzioni $f(x)$ siano definite in un intervallo A (o un'unione finita di intervalli) e che x_0 appartiene (o è estremo) ad uno di tali intervalli.

Definizione 1 *Si dice che $f(x)$ ha limite uguale ad ℓ (tende o converge ad ℓ) per x che tende ad x_0 se, qualunque sia la successione $x_n \rightarrow x_0$, con $x_n \in A$ e $x_n \neq x_0$ per ogni n , risulta $f(x_n) \rightarrow \ell$.*

Possiamo formulare la definizione di limite direttamente per mezzo delle disuguaglianze, come già fatto per le successioni. Risulta:

Teorema 3 *Si ha*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

se e soltanto se, qualunque sia $\varepsilon > 0$, esiste un numero $\delta > 0$ in modo tale che

$$\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$$

per ogni $x \in A - \{x_0\}$, tale che $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$.

In simboli:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |f(x) - \ell| < \varepsilon, \forall x \in A : 0 \neq |x - x_0| < \delta.$$

Dimostrazione — Vogliamo far vedere che le seguenti relazioni sono fra loro equivalenti ($x_0, \ell \in \mathbb{R}$):

$$\forall x_n \rightarrow x_0, x_n \in A - \{x_0\} \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(x_n) \rightarrow \ell \quad (4)$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in A : 0 \neq |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon \quad (5)$$

Proviamo, preliminarmente, che (5) implica (4): per ogni $\varepsilon > 0$, sia $\delta > 0$ il numero reale per cui vale l'ipotesi (5); consideriamo poi una generica successione x_n , di punti di A , convergente ad x_0 , con $x_n \neq x_0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Per la definizione di limite di successione, esiste un indice ν per cui $|x_n - x_0| < \delta$ per ogni $n > \nu$; inoltre, essendo $x_n \neq x_0$, in definitiva si ha:

$$x_n \in A, \quad 0 \neq |x_n - x_0| < \delta, \quad \forall n > \nu.$$

Per l'ipotesi (5) segue allora

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon, \quad \forall n > \nu,$$

che, in base alla definizione di limite di successione, significa che $f(x_n) \rightarrow \ell$ per $n \rightarrow +\infty$.

Proviamo ora, per assurdo, che (4) implica (5): contraddire la (5) equivale ad affermare che:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0, \exists x \in A : 0 \neq |x - x_0| < \delta, |f(x) - \ell| \geq \varepsilon_0 \quad (6)$$

Poniamo $\delta = 1/n$, con $n \in \mathbb{N}$ e indichiamo con $x = x_n$ il valore di x che compare in (6) in dipendenza da $\delta = 1/n$:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in A : 0 \neq |x - x_0| < \frac{1}{n}, |f(x) - \ell| \geq \varepsilon_0. \quad (7)$$

Risulta in particolare

$$x_n \neq x_0, x_0 - \frac{1}{n} < x_n < x_0 + \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N};$$

perciò $x_n \in A - \{x_0\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ e $x_n \rightarrow x_0$ (per il teorema dei carabinieri); però $f(x_n)$ non converge ad ℓ perchè la disuguaglianza $|f(x) - \ell| \geq \varepsilon_0, \forall n \in \mathbb{N}$, contrasta con la definizione di limite di successione. \square

3 Funzioni continue

Sia $f(x)$ una funzione definita in A , un intervallo o un'unione finita di intervalli, con x_0 punto di A o punto estremo ad uno degli intervalli costituenti A . Abbiamo introdotto i limiti di funzioni per descrivere il comportamento di

funzioni nelle vicinanze di loro punti singolari. Naturalmente possiamo calcolare il limite, per $x \rightarrow x_0$, anche se la funzione non presenta alcuna singolarità in x_0 . Ad esempio sappiamo che per i limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0 = \sin 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 = \cos 0$$

il valore limite, per $x \rightarrow 0$, è uguale al valore che si ottiene calcolando la funzione per $x = 0$. Si dice che le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ sono **continue** per $x = 0$ (ed in realtà sono continue per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$) in accordo con la:

Definizione 2 Una funzione $f(x)$ è continua in un punto x_0 se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0); \quad (8)$$

una funzione è continua in un intervallo $[a, b]$ se è continua in ogni punto $x_0 \in [a, b]$.

Dato che il limite di somma, differenza, prodotto è uguale rispettivamente alla somma, differenza, prodotto dei limiti, risulta che *la somma, la differenza, il prodotto di funzioni continue è una funzione continua*. Anche il quoziente di funzioni continue è una funzione continua, ma come al solito, occorre fare attenzione ai punti dove il denominatore di annulla.

Utilizzando la proprietà relativa ai limiti di funzioni composte si verifica che *la funzione composta mediante funzioni continue è continua*.

L'importanza delle funzioni continue è anche nel fatto che molte funzioni elementari sono continue nel loro insieme di definizione.

Esempio 1 Controlliamo la continuità della funzione

$$f(x) = x^3$$

nel punto $x = 0$. Si ha:

$$f(0) = 0^3 = 0.$$

Assegnamo ora un valore positivo qualsiasi a ε , per esempio $\varepsilon = \frac{1}{1000}$. Dobbiamo far vedere che, dando a x valori abbastanza vicini a $x_1 = 0$, i corrispondenti valori di $f(x)$ non differiranno da 0 per più di $1/1000$, i.e. saranno compresi tra $-\frac{1}{1000}$ e $\frac{1}{1000}$. Si vede immediatamente che questo margine non è superato se ci si limita a valori che differiscano da $x_1 = 0$ per meno di

$$\delta = \sqrt[3]{\frac{1}{1000}} = \frac{1}{10};$$

infatti se

$$|x| < \frac{1}{10},$$

allora

$$|f(x)| = x^3 < \frac{1}{1000}.$$

Si noti che $\delta = \sqrt[3]{\varepsilon}$ soddisferà sempre alla condizione, poichè, se è

$$|x| < \sqrt[3]{\varepsilon},$$

allora

$$|f(x)| = x^3 < \varepsilon.$$

4 Alcuni teoremi sulle funzioni continue

Valgono i seguenti teoremi:

Teorema 4 (della permanenza del segno) — Sia $f(x)$ una funzione definita in un intorno di x_0 e sia continua in x_0 . Se $f(x_0) > 0$, esiste un numero $\delta > 0$ con la proprietà che $f(x) > 0$ per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Teorema 5 (di Bolzano) — Sia $f(x)$ una funzione continua in un intervallo $[a, b]$. Se $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$, allora esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = 0$.

Osservazione 2 Il teorema di Bolzano¹ corrisponde perfettamente alla nostra idea intuitiva di curva continua, che, per passare da un punto al disotto dell'asse x a un punto al disopra, deve tagliare in qualche luogo l'asse.

Dimostrazione — Omessa. □

Teorema 6 (primo teorema dell'esistenza dei valori intermedi) — Una funzione continua in un intervallo $[a, b]$ assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$.

Dimostrazione — Per semplificare le notazioni consideriamo il caso in cui $f(a) \leq f(b)$. La tesi consiste nel provare che, qualunque sia $y_0 \in [f(a), f(b)]$, esiste $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = y_0$.

Se $y_0 = f(a)$ si può porre $x_0 = a$; analogamente se $y_0 = f(b)$, allora basta prendere $x_0 = b$. Per trattare il caso $y_0 \in (f(a), f(b))$ consideriamo la

¹ Bernhard Bolzano (1781 – 1848) fu un prete cattolico studioso della filosofia scolastica. Introdusse per primo nell'analisi matematica il concetto di rigore. Il suo importante opuscolo, *Paradoxien des Unendlichen*, apparve nel 1850. In esso per la prima volta si riconosceva ce di molte affermazioni apparentemente ovvie, riguardanti le funzioni continue, si può e si deve dimostrare se possono essere usate in piena generalità.

funzione

$$g(x) = f(x) - y_0, \quad \forall x \in [a, b];$$

essendo

$$f(a) < y_0 < f(b),$$

risulta:

$$g(a) = f(a) - y_0 < 0, \quad g(b) = f(b) - y_0 > 0.$$

Per il teorema di Bolzano esiste un numero $x_0 \in (a, b)$ tale che $g(x_0) = 0$, i.e. $f(x_0) = y_0$. \square

Teorema 7 (di Weierstrass) — Sia $f(x)$ una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Allora $f(x)$ assume massimo e minimo in $[a, b]$, i.e. esistono in $[a, b]$ x_1 e x_2 tali che:

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \quad \forall x \in [a, b].$$

I numeri x_1 e x_2 sono detti rispettivamente punti di minimo e punti di massimo per $f(x)$ nell'intervallo $[a, b]$; i corrispondenti valori $m = f(x_1)$ e $M = f(x_2)$ sono detti minimo e massimo di $f(x)$ in $[a, b]$ (vedi figura 3).

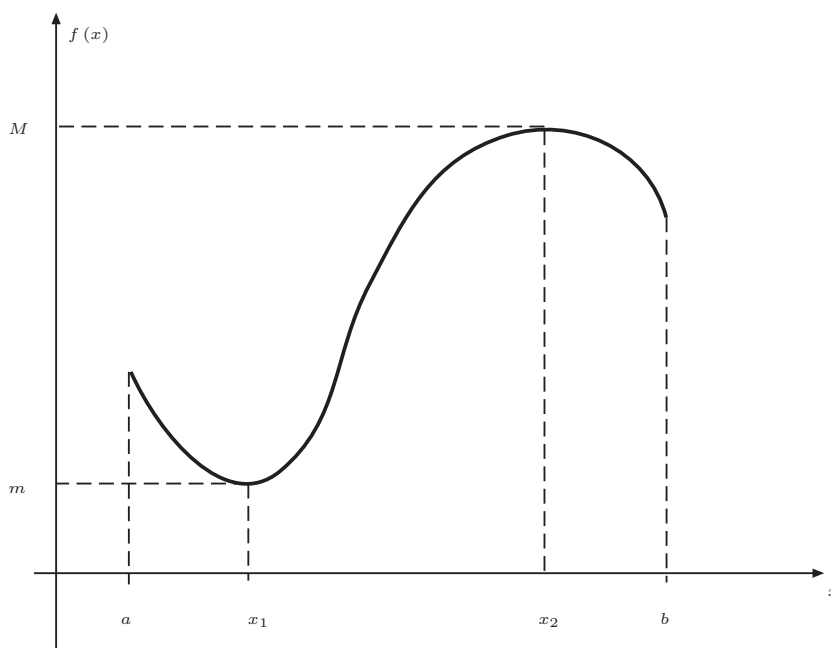


Figura 3. Teorema di Weierstrass.

Dimostrazione — Omessa. \square

Teorema 8 (dei valori intermedi) — Una funzione continua in un intervallo $[a, b]$ assume tutti i valori compresi tra il minimo ed il massimo.

Dimostrazione — I valori di massimo M e di minimo m sono assunti in base al teorema di Weierstrass; rimane da provare che, qualunque sia $y_0 \in (m, M)$, esiste $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = y_0$.

Indichiamo con x_1 e x_2 i punti di minimo e di massimo di $f(x)$, i.e. tali che $f(x_1) = m, f(x_2) = M$ e consideriamo la funzione:

$$g(x) = f(x) - y_0, \quad \forall x \in [a, b]. \quad (9)$$

Essendo $f(x_1) = m < y_0 < M = f(x_2)$, risulta:

$$g(x_1) < 0 \quad , \quad g(x_2) > 0;$$

per il teorema di Bolzano esiste un numero x_0 , appartenente all'intervallo aperto di estremi x_1, x_2 , tale che $g(x_0) = 0$, i.e. tale che $f(x_0) = y_0$. \square

5 Punti di discontinuità per una funzione

Sia $f(x)$ una funzione definita in un intervallo $[a, b]$, escluso al più un punto c di questo. Se essa non è continua in c , il punto c si dice **punto singolare** o **di discontinuità** della $f(x)$, e questa dicesi **discontinua** in c .

Prima di procedere alla classificazione dei punti di discontinuità forniamo le definizioni di **limite destro** e **limite sinistro** di una funzione.

Può accadere che non esista il limite di $f(x)$ per $x \rightarrow c$, ma un tale limite esista quando si considerino soltanto i valori di $f(x)$ che appartengono ad un **intorno destro** del punto c (i.e. $c < x < c + \delta$), oppure ad un **intorno sinistro**: $c - \delta < x < c$. Si dà, in tal caso, la definizione seguente: si dice che il numero l è il **limite destro** della funzione $f(x)$, per $x \rightarrow c$, e si scrive:

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = l,$$

quando, in corrispondenza a un arbitrario numero positivo ε , si può sempre determinare un intorno destro del punto c , tale che per ogni x di tale intorno, escluso eventualmente c , risulti soddisfatta la disequazione:

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

Se l'intorno del punto c è, invece, un intorno sinistro del punto c , allora si dice che il numero l è il **limite sinistro** di $f(x)$, per $x \rightarrow c$, e si scrive:

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = l$$

Osservazione 3 Si può dimostrare che se i limiti destro, l_1 , e sinistro, l_2 , esistono e sono eguali, i.e.:

$$l_1 = l_2 = l,$$

allora l è il limite di questa funzione (per $x \rightarrow c$).

Viceversa, se una funzione ha per limite l , per $x \rightarrow c$, allora i limiti destro e sinistro di questa funzione (per $x \rightarrow c^\pm$) esistono e sono eguali.

5.1 Punti di discontinuità

I punti di discontinuità si dividono in tre specie:

- Punti di discontinuità **di prima specie** — si dice che nel punto c la funzione $f(x)$ ha una discontinuità di **prima specie**, se in tale punto **esistono finiti** il limite destro e sinistro e sono fra loro diversi. La differenza:

$$\left| \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \right|,$$

dicesi il **salto** della $f(x)$ in c .

- Punti di discontinuità **di seconda specie** — si dice che il punto c è, per la funzione $f(x)$, di discontinuità di **seconda specie** quando in c o **non esiste** uno dei due limiti destro o sinistro, oppure quando **almeno** uno di questi due limiti vale infinito.
- Punti di discontinuità **di terza specie** — si ha una discontinuità di **terza specie** nel punto c , se esiste **finito** il

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x)$$

ma il valore di $f(x)$ o **non esiste** in c , oppure **esiste ma risulta**:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) \neq f(c).$$

In questo caso si dice anche che nel punto c si presenta per $f(x)$ una **discontinuità eliminabile**. Si dice eliminabile, perchè si può stabilire per la $f(x)$ la continuità nel punto c , o completando la definizione di $f(x)$ in c ponendo:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c),$$

se in c la $f(x)$ non è definita, o cambiandola sostituendo al valore $f(c)$, già attribuito alla funzione nel punto c , il valore del suo limite, i.e.

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x).$$

Esempio 2 Studiare i punti singolari della funzione:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + x - 2}.$$

Il denominatore si annulla per $x = -2$ e $x = 1$, perciò per tali valori non esiste la $f(x)$.

Essendo:

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + x - 2} = \infty,$$

perchè il numeratore ha per limite 15 ed il denominatore zero, allora il punto -2 è un punto di discontinuità di seconda specie per $f(x)$.

Essendo, invece:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 3)(x - 1)}{(x + 2)(x - 1)} = -\frac{2}{3},$$

il punto 1 è una discontinuità eliminabile per $f(x)$.

Per eliminare la discontinuità pongo:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + x - 2} & \forall x \in \mathbb{R} - \{1\} \\ -\frac{2}{3} & \text{per } x = 1 \end{cases}$$