

# Appendice A

## Infinitesimi ed infiniti

Un **infinitesimo** [**infinito**] in un punto  $x_0$  è una funzione  $f$ , definita in un insieme per il quale  $x_0$  sia di accumulazione (al finito o all'infinito), tale che:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \quad \left[ \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty \right]$$

Il concetto di infinitesimo [infinito] è dunque inseparabile dalle nozioni di variabilità e di tendenza al limite.

Non avrebbe perciò alcun senso dire che un numero reale fisso è un infinitesimo [infinito], per quanto piccolo [grande] possa essere il numero considerato.

### A.0.2 Confronto di infinitesimi

Le nozioni più importanti sugli infinitesimi sono quelle relative al confronto fra due infinitesimi.

Le due funzioni reali  $f(x)$  e  $g(x)$  siano definite nel dominio  $D \subseteq \mathbb{R}$  e siano infinitesime per  $x \rightarrow x_0$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0,$$

ed esista un intorno  $H$  del punto  $x_0$  tale che in tutti i punti dell'insieme  $D \cap H$ , diversi da  $x_0$ , sia  $g(x) \neq 0$ . Il rapporto:

$$\frac{f(x)}{g(x)},$$

si può calcolare per ogni  $x \neq x_0$  dell'insieme  $D \cap H$ , e supponiamo che esista il

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Si possono presentare i tre casi seguenti:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda \neq 0 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

Nel primo caso dicesi che  $f(x)$  è un **infinitesimo di ordine superiore rispetto a  $g(x)$** .

Nel secondo caso dicesi che  $f(x)$  e  $g(x)$  sono **infinitesimi dello stesso ordine**.

Nel terzo caso dicesi che  $f(x)$  è un **infinitesimo di ordine inferiore rispetto a  $g(x)$** .

In altre parole, possiamo dire, con linguaggio impreciso ma suggestivo, che nel primo caso la  $f(x)$  tende a zero più rapidamente della  $g(x)$ , nel secondo caso  $f(x)$  e  $g(x)$  tendono a zero con la stessa rapidità, mentre nel terzo caso la  $f(x)$  tende a zero meno rapidamente della  $g(x)$ .

Quando poi non esiste il limite per  $x \rightarrow x_0$  del rapporto  $\frac{f(x)}{g(x)}$ , si dice che gli infinitesimi  $f(x)$  e  $g(x)$  **non sono fra loro paragonabili**.

### A.0.3 Ordine di un infinitesimo.

Nel numero precedente abbiamo dato un senso preciso a frasi quali " $f(x)$  è un infinitesimo d'ordine superiore rispetto a  $g(x)$ " ma non abbiamo con ciò detto cosa s'intende per **ordine** di un infinitesimo. Cercheremo ora di fissare, numericamente, nei limiti del possibile, questo concetto.

A questo scopo, sia  $g(x)$  una funzione reale definita in un insieme  $D \subseteq \mathbb{R}$ , infinitesima per  $x \rightarrow x_0$ ; supponiamo inoltre che esista un intorno  $H$  del punto  $x_0$  tale che per ogni  $x$  dell'insieme  $D \cap H$ , diverso da  $x_0$ , risulti  $g(x) > 0$ .

Questo infinitesimo  $g(x)$  sarà il **campione** di riferimento o, come suol anche dirsi, sarà **l'infinitesimo principale**.

le potenze  $[g(x)]^n$ , con  $n$  numero reale positivo, sono altrettanti infinitesimi per  $x \rightarrow x_0$ ; e  $[g(x)]^m$ , è di ordine superiore rispetto a  $[g(x)]^n$  se è  $m > n$ <sup>1</sup>. E' naturale perciò dire che  $n$  è **l'ordine** di  $[g(x)]^n$  rispetto a  $g(x)$ . Dopo di ciò viene spontanea la seguente:

**Definizione 98** Se  $n$  è un numero reale **positivo** qualsiasi, diremo che  $f(x)$  è un *infinitesimo*, per  $x \rightarrow x_0$ , d'**ordine  $n$**  rispetto all'*infinitesimo principale*  $g(x)$ , quando risulta:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{[g(x)]^n} = \lambda \neq 0,$$

i.e. quando  $f(x)$  è dello stesso ordine di  $[g(x)]^n$ .

<sup>1</sup>Infatti, si ha:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{[g(x)]^m}{[g(x)]^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} [g(x)]^{m-n} = 0$$

perchè è  $m > n$ .

Se invece è  $m < n$  risulta:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{[g(x)]^m}{[g(x)]^n} = \infty$$

e quindi  $g^m$  è di ordine inferiore rispetto a  $g^n$ .

Dalla definizione data segue ovviamente che se  $f(x)$  è un infinitesimo di ordine  $p$  e  $\varphi(x)$  di ordine  $q$  rispetto a  $g(x)$ , allora  $f(x)$  è rispetto a  $\varphi(x)$  dello stesso ordine o di ordine superiore o inferiore secondo che è:

$$p = q \quad , \quad p > q \quad , \quad p < q.$$

E' facile inoltre riconoscere che l'ordine di infinitesimo ha carattere logaritmico, nel senso che, se  $f$  e  $\varphi$  hanno ordini  $p$  e  $q$  rispetto a  $g$ , il prodotto  $f \cdot \varphi$  ha ordine  $p + q$ , il quoziente  $f/\varphi$  ha ordine  $p - q$ , quando è  $p > q$ , e la potenza  $f^m$  ( $m > 0$ ) ha ordine  $mp$ .

**Osservazione 125** La definizione di ordine di un infinitesimo non sempre attribuisce un "ordine" ad ogni infinitesimo rispetto all'infinitesimo fissato come campione.

**Esempio 55** Provare che  $x \log x$  è un infinitesimo del quale non esiste l'ordine rispetto ad  $x$ , per  $x \rightarrow 0^+$ .

Si osservi anzitutto che  $x \log x$  è un infinitesimo per  $x \rightarrow 0^+$ . Infatti:

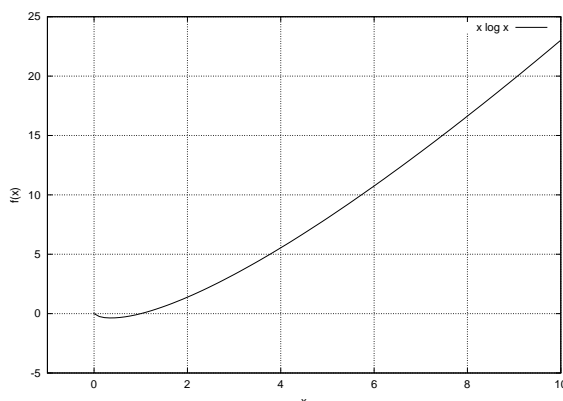


Figura A.1: Diagramma della funzione  $x \log x$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \log x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0.$$

Premesso ciò, proviamo intanto che  $x \log x$  è un infinitesimo d'ordine **inferiore** rispetto ad  $x$ . Infatti, risulta:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \log x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \log x = -\infty.$$

Indicato ora con  $n$  un qualsiasi numero reale positivo minore di 1, dimostriamo che  $x \log x$  rispetto ad  $x$ , è di ordine superiore rispetto ad  $x^n$ . Infatti, risulta:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \log x}{x^n} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{x^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{(n-1)x^{n-2}} = \\ &= \frac{1}{n-1} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{n-1}} = \frac{1}{n-1} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1-n} = 0 \end{aligned}$$

Dunque, ai fini della determinazione dell'ordine di  $x \log x$ , rispetto ad  $x$ , si vede che 1 è troppo grande ed ogni numero positivo minore di 1 è troppo piccolo, sicchè l'ordine non può definirsi secondo il criterio che abbiamo dato precedentemente.

#### A.0.4 Infiniti e loro confronto.

Considerazioni analoghe a quelle fatte per gli infinitesimi si possono svolgere per gli **infiniti**, ossia per le funzioni che in un punto  $x_0$  hanno per limite l'infinito.

Siano  $f(x)$  e  $g(x)$  due infiniti per  $x \rightarrow x_0$ , i.e. sia:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty,$$

e supponiamo che esista il limite del loro rapporto. Si possono allora presentare i tre casi seguenti:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda \neq 0 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty.$$

Nel primo caso dicesi che  $f(x)$  è un infinito d'ordine **inferiore** rispetto a  $g(x)$ ; nel secondo caso dicesi che  $f(x)$  e  $g(x)$  sono due infiniti dello **stesso** ordine; nel terzo caso dicesi che  $f(x)$  è un infinito d'ordine **superiore** rispetto a  $g(x)$ .

Se invece il limite in discorso non esiste, dicesi che gli infiniti  $f(x)$  e  $g(x)$  non sono fra loro paragonabili.

Si dice poi che  $f(x)$  è un infinito d'ordine  $n$ , con  $n > 0$ , rispetto all'infinito principale  $g(x)$ , supposto positivo, quando è:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{[g(x)]^n} = k,$$

con  $k$  numero reale diverso da zero.