

## Appendice D

# Sviluppabilità e sviluppi in serie di Mac-Laurin di alcune funzioni reali.

**Teorema D.1** *Le funzioni*

$$\sin x, \cos x, e^x, \sinh x, \cosh x, \frac{1}{1-x}, \log(1+x), \arctan x, \operatorname{settg} x$$

sono tutte sviluppabili in serie di Mac-Laurin e i relativi sviluppi in serie di Mac-Laurin sono forniti dalle seguenti eguaglianze:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{D.0.1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \dots \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{D.0.2})$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{D.0.3})$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{D.0.4})$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \dots \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{D.0.5})$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + \dots \quad \forall x \in ]-1, 1[ \quad (\text{D.0.6})$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad \forall x \in ]-1, 1] \quad (\text{D.0.7})$$

In particolare risulta:

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots,$$

e cioè il numero  $\log 2$  è la somma della serie armonica a segni alterni.

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots \quad \forall x \in [-1, 1] \quad (\text{D.0.8})$$

$$\text{setttgh } x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \quad \forall x \in ]-1, 1] \quad (\text{D.0.9})$$

**Osservazione 127** Lo sviluppo di Mac-Laurin di  $\sin x$  si ricorda facilmente osservando che la funzione  $\sin x$  è dispari e quindi la serie a secondo membro deve contenere solo le potenze di grado dispari. Con un'osservazione analoga si ricorda facilmente lo sviluppo di Mac-Laurin di  $\cos x$ .

Lo sviluppo di Mac-Laurin di  $e^x$  si ricorda facilmente osservando che le derivate della funzione  $e^x$  nel punto  $x_0 = 0$  sono tutte uguali a 1.

Gli sviluppi di Mac-Laurin di  $\sinh x$  e  $\cosh x$  si ricordano facilmente osservando che le serie a secondo membro non sono altro che le serie che rappresentano  $\sin x$  e  $\cos x$  con i segni  $-$  sostituiti dai segni  $+$ .

Lo sviluppo di Mac-Laurin di  $\frac{1}{1-x}$  si ricorda facilmente osservando che la funzione  $\frac{1}{1-x}$  è la somma della serie geometrica nel campo reale.

Gli sviluppi di Mac-Laurin di  $\log(1+x)$ ,  $\arctan x$  e  $\text{setttgh } x$  si ricordano facilmente ripetendo in modo sintetico (i.e. trascurando i dettagli e le giustificazioni) il procedimento con cui saranno dimostrati; questo procedimento consiste nell'eseguire una derivazione e un'integrazione termine a termine da 0 a  $x$  con  $]-1, 1[$ , e porta alle seguenti eguaglianze:

$$D \log(1+x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

e quindi:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$D \arctan x = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

e quindi:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$D \text{ setttgh } x = \frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots$$

e quindi:

$$\text{setttgh } x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$$

**Osservazione 128** Nelle scienze applicate, quando  $x$  è "vicino" a zero e precisamente quando  $x$  appartiene all'intervallo  $] -1, 1[$ , si fa spesso uso delle eguaglianze approssimate:

$$\sin x \cong x - \frac{x^3}{3!}; \quad \cos x \cong 1 - \frac{x^2}{2!}; \quad e^x \cong 1 + x; \quad \log(1+x) \cong x - \frac{x^2}{2}.$$

**Dimostrazione** — Consideriamo al funzione  $\sin x$ .

Poichè risulta

$$|D^n \sin x| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

la funzione  $\sin x$  ha derivata equilimitata in tutto  $\mathbb{R}$ . Quindi per il secondo criterio di sviluppabilità essa è sviluppabile in tutto  $\mathbb{R}$  in serie di Mac-Laurin. Pertanto, quando  $f(x) = \sin x$ , si ha:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \dots \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Essendo ora  $f(0) = [\sin x]_{x=0} = 0$ ,  $f'(0) = [\cos x]_{x=0} = 1$ ,  $f''(0) = [-\sin x]_{x=0} = 0$ , e così via, l'eguaglianza precedente si riscrive come segue:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Con ciò è dimostrata l'eguaglianza (D.0.1).

Con un ragionamento analogo si dimostra che la funzione  $\cos x$  è sviluppabile in  $\mathbb{R}$  e che vale l'eguaglianza (D.0.2).

Consideriamo ora la funzione  $e^x$ .

Essendo  $|D^n e^x| = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$  e  $\forall n \in \mathbb{N}$ , la funzione  $e^x$  non ha derivate equilimitate in tutto  $\mathbb{R}$ ; tuttavia, poichè, comunque si considera un intervallo compatto del tipo  $[-a, a]$  con  $a > 0$ , risulta

$$|D^n e^x| = e^x \leq e^a \quad \forall x \in [-a, a] \quad \text{e} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

la funzione  $e^x$  ha derivate equilimitate in ogni intervallo compatto del tipo  $[-a, a]$  con  $a > 0$ . Pertanto, per il secondo criterio di sviluppabilità, la funzione  $e^x$  è sviluppabile in serie di Mac-Laurin in ogni intervallo compatto del tipo  $[-a, a]$  con  $a > 0$ . Da ciò segue che la funzione  $e^x$  è sviluppabile in serie di Mac-Laurin in tutto  $\mathbb{R}$ . Pertanto, posto  $f(x) = e^x$ , si ha:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \dots \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Poichè risulta  $f(0) = 1, f'(0) = 1, \dots, f^{(n)}(0) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ , l'eguaglianza precedente si riscrive come segue:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Con ciò è dimostrata l'eguaglianza (D.0.3).

Consideriamo la funzione:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Osserviamo che si ha:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Sottraendo membro a membro e dividendo per 2 si ha:

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Per il teorema di unicità dello sviluppo in serie di potenze, l'eguaglianza stabilita dimostra che la funzione  $\sinh x$  è sviluppabile in tutto  $\mathbb{R}$  in serie di Mac-Laurin e fornisce lo sviluppo di Mac-Laurin di  $\sinh x$ . Con ciò è dimostrata anche l'eguaglianza (D.0.4).

Con un ragionamento analogo si dimostra che la funzione  $\cosh x$  è sviluppabile in tutto  $\mathbb{R}$  in serie di Mac-Laurin e che vale la (D.0.5).

Consideriamo, adesso, la funzione  $\frac{1}{1-x}$ . Per le proprietà della serie geometrica nel campo reale si ha:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + \dots \quad \forall x \in ]-1, 1[$$

Questa eguaglianza, per il teorema di unicità dello sviluppo in serie di potenze, dimostra che la funzione  $\frac{1}{1-x}$  è sviluppabile in serie di Mac-Laurin in  $] -1, 1[$  e fornisce lo sviluppo in serie di Mac-Laurin di  $\frac{1}{1-x}$ .

Con ciò è dimostrata l'eguaglianza (D.0.6).

Consideriamo la funzione  $\log(1+x)$  (che è definita in  $] -1, +\infty[$ ). Osserviamo che si ha:

$$D \log(1+x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^{n-1} x^{n-1} + \dots \quad \forall x \in ]-1, 1[ \tag{D.0.10}$$

Fissiamo ora a piacere un punto  $x \in ]-1, 1[$ . La serie al secondo membro dell'eguaglianza (D.0.10), per il teorema sulla convergenza totale di una serie di

potenze converge totalmente, e quindi anche uniformemente, nell'intervallo compatto di estremi 0 e  $x$ . Pertanto possiamo applicare a tale intervallo il teorema d'integrazione termine a termine, e ciò facendo si ha:

$$\int_0^x D \log(1+x) dx = \int_0^x 1 dx - \int_0^x x dx + \int_0^x x^2 dx + \dots + (-1)^{n-1} \int_0^x x^{n-1} dx + \dots$$

e cioè si ha:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

Poichè  $x$  è stato fissato a piacere in  $] -1, 1[$ , si ha:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad (\text{D.0.11})$$

Per dimostrare la (D.0.7) dobbiamo far vedere che l'eguaglianza (D.0.11) vale anche per  $x = 1$ . A tale scopo osserviamo che dall'eguaglianza (D.0.11) si deduce che:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \log(1+x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left( x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \right)$$

Si ha che

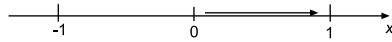


Figura D.1:  $x$  tendente, da sinistra, verso 1.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \log(1+x) = \log 2$$

perchè la funzione  $\log(1+x)$  è continua;

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left( x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots \quad (\text{D.0.12})$$

perchè la serie

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

converge nel punto  $x = 1$  in virtù del criterio di Leibniz, e quindi la sua somma è continua nel punto 1 per il teorema sulla continuità della somma di una serie di potenze. Pertanto si ha:

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots$$

Quest'eguaglianza ci dice che l'eguaglianza (D.0.11) vale anche per  $x = 1$ .  
 Risulta pertanto:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad \forall x \in ]-1, 1]$$

Questa eguaglianza, per il teorema di unicità dello sviluppo in serie di potenze, dimostra che la funzione  $\log(1+x)$  è sviluppabile in  $]-1, 1]$  in serie di Mac-Laurin e fornisce lo sviluppo di Mac-Laurin di  $\log(1+x)$ .

Con ciò è dimostrata anche l'eguaglianza (D.0.7).

Le eguaglianze (D.0.8) e (D.0.9) si dimostrano con un ragionamento perfettamente analogo a quello fatto per  $\log(1+x)$ , e cioè si parte dalle eguaglianze:

$$D \arctan x = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^{n-1} x^{2n-2} + \dots \quad \forall x \in ]-1, 1[ \quad (\text{D.0.13})$$

$$D \operatorname{setttgh} x = \frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n-2} + \dots \quad \forall x \in ]-1, 1[,$$

e poi si effettua l'integrazione termine a termine tra 0 e  $x$  con  $x \in ]-1, 1[$ .  $\square$

**Osservazione 129** Dall'eguaglianza

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad \forall x \in ]-1, 1]$$

si deduce l'eguaglianza:

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} + \dots \quad \forall x \in [-1, 1[$$

Da questa si deduce l'eguaglianza:

$$-\log(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \quad \forall x \in [-1, 1[$$