Appendice E

Gli spazi vettoriali $C^n(I)$, $D^n(I)$, $F(I)$ e $C^\infty(I)$

Sia I un integrale reale e sia $n \in N_0 \equiv N \cup \{0\}$.

Definizione 99 *Il simbolo $C^n(I)$ indica per definizione l'insieme delle funzioni reali definite in I, derivabili n volte in I e con derivata $n-$ma continua in I.*

Per esprimere che una funzione appartiene a $C^n(I)$, si dice che essa è di classe C^n in I.

Definizione 100 *Il simbolo $D^n(I)$ indica per definizione l'insieme delle funzioni reali definite in I e derivabili n volte in I, con derivata $n-$ma non necessariamente continua in I.*

Definizione 101 *Il simbolo $F(I)$ indica l'insieme delle funzioni reali definite in I*

Definizione 102 *Il simbolo $C^\infty(I)$ indica l'insieme delle funzioni reali definite in I e indefinitivamente derivabili in I.*

Osservazione 130 In base alla definizione precedente il simbolo $C^0(I)$ indica l'insieme delle funzioni reali continue in I.
Spesso tale simbolo è sostituito dal simbolo $C(I)$.

Osservazione 131 Si verifica facilmente che l'insieme $C^n(I)$ è uno spazio vettoriale nel campo reale $\mathbb{R}$ rispetto alle due operazioni seguenti:

$$(f, g) \in C^n(I) \times C^n(I) \quad \to \quad f + g \in C^n(I)$$

$$(\alpha, f) \in \mathbb{R} \times C^n(I) \quad \to \quad \alpha f \in C^n(I)$$

Una proprietà analoga vale per gli insiemi $D^n(I), F(I), C^\infty(I)$.
Ricordiamo che dire, per esempio, che l'insieme $C^n(I)$ è uno spazio vettoriale sul campo reale rispetto alle due operazioni introdotte, significa che si verificano le seguenti proprietà:

- $C^n(I)$ è un gruppo commutativo rispetto all'operazione $+$ introdotta.
- $1 \cdot f = f \quad \forall f \in C^n(I)$;
- $\alpha(\beta f) = (\alpha\beta) f \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall f \in C^n(I)$;
- $(\alpha + \beta) f = \alpha f + \beta f \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall f \in C^n(I)$;
- $\alpha(f + g) = \alpha f + \beta g \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall f, g \in C^n(I)$

Osservazione 132 Ovviamente risulta:

$$C^\infty(I) \subset C^n(I) \subset D^n(I) \subset F(I) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$C^\infty(I) \subset C^0(I) \subset D^0(I) = F(I)$$

• • •

E.1 Operatori lineari tra spazi vettoriali.

Definizione 103 *Siano S e S' due spazi vettoriali sul campo reale $\mathbb{R}$. Consideriamo un operatore di S on S', i.e. la funzione:*

$$L : S \to S'.$$

L'operatore L si dice un **operatore lineare** *di S in S' quando gode delle due proprietà seguenti:*

1. $L(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = L(\mathbf{u}) + L(\mathbf{v}) \qquad \forall \mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v} \in S$
2. $L(\alpha \mathbf{u}) = \alpha L(\mathbf{u}) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad$ *e* $\quad \forall \mathbf{u} \in S$

E.1.1 Un esempio importante di operatore lineare.

Sia I un intervallo reale e

$$a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x)$$

n funzioni reali definite in I. Consideriamo il seguente operatore:

$$\begin{aligned} &T : y \in D^n(I) \to \\ &\to y_x^{(n)} + a_1(x)\, y_x^{(n-1)} + a_2(x)\, y_x^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y_x^1 + a_n(x)\, y(x) \in F(I) \end{aligned} \tag{E.1.1}$$

Si verifica facilmente che tale operatore è un **operatore lineare** di $D^n(I)$ in $F(I)$.
Infatti si ha:

$$\begin{aligned}T(y_1+y_2) &= (y_1+y_2)_x^{(n)}+a_1(x)(y_1+y_2)_x^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)(y_1+y_2)(x) = \\ &= \left[(y_1)_x^{(n)}+a_1(x)(y_1)_x^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)\,y_1(x)\right]+ \\ &+ \left[(y_2)_x^{(n)}+a_1(x)(y_2)_x^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)\,y_2(x)\right]= \\ &= T(y_1)+T(y_2) \qquad \forall y_1 \text{ e } \forall y_2 \in D^n(I)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T(\alpha y) &= (\alpha y)_x^{(n)}+a_1(x)(\alpha y)_x^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)(\alpha y)(x) = \\ &= \alpha\left[(y)_x^{(n)}+a_1(x)(y)_x^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)\,y(x)\right]=\alpha T(y) \\ &\qquad \forall \alpha\in\mathbb{R} \text{ e } \forall y\in D^n(I)\end{aligned}$$

L'operatore T si chiama **un operatore differenziale lineare di ordine** n.
Le funzioni

$$a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x)$$

si chiamano **i coefficienti** dell'operatore differenziale lineare considerato.