Appendice F

Derivata di un determinante.

Vogliamo indicare un'applicazione della regola della derivazione delle funzioni composte.
Si abbia il determinante:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

i cui elementi a_{ik} sono funzioni della derivabili della variabile x.
Si dimostra il seguente:

Teorema F.1 *La derivata, rispetto ad x, del determinante A, si ottiene sommando n determinanti, ognuno dei quali si ottiene sostituendo nel determinante dato A agli elementi di una riga (colonna) le loro derivate, i.e.:*

$$\frac{dA}{dx} = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{F.0.1}$$

Infatti, riguardando il determinante A come una funzione composta della x, tramite le funzioni a_{ik}, avendosi:

$$A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{ik}A_{ik} + \ldots + a_{in}A_{in},$$

risulta:

$$\frac{\partial A}{\partial a_{ik}} = A_{ik},$$

ove le $\dfrac{\partial A}{\partial a_{ik}}$ sono, evidentemente, funzioni continue. Per la regola della derivazione delle funzioni composte si ha quindi:

$$\frac{dA}{dx} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial A}{\partial a_{ik}} \cdot \frac{da_{ik}}{dx} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{ik} \cdot \frac{da_{ik}}{dx},$$

e perciò segue la (F.0.1) che è quanto volevamo dimostrare.