Appendice G

Estremi relativi e assoluti.

G.1 Procedimento per cercare i punti di estremo relativo per una funzione di due variabili reali.

Consideriamo una funzione di due variabili reali, i.e. una funzione del tipo

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to A.$$

Per cercare i punti di estremo relativo per f conviene procedere come segue:

1^a **operazione.**

Si cercano i punti **estremali** per f, i.e. i punti $P = (x, y) \in \overset{o}{A}$ che sono soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} f_x(x, y) & = & 0 \\ f_y(x, y) & = & 0 \end{cases}$$

2^a **operazione.**

Si calcolano le derivate parziali seconde di f e l'hessiano di f (in un generico punto $(x, y) \in \overset{o}{A}$) e poi nei punti estremali di f; si utilizzano, poi, le seguenti due implicazioni che forniscono **delle condizioni sufficienti affinchè un**

punto estremale di f sia o non sia un punto di estremo relativo.

$$\alpha)\ \begin{cases} 1) & \begin{array}{l} P_0 \text{ è un punto estremale} \\ \text{per } f \end{array} \\ 2) & \begin{array}{l} H\left(P_0\right) \equiv f_{xx}\left(P_0\right) f_{yy}\left(P_0\right) - f_{xy}^2\left(P_0\right) > 0 \\ \text{(e quindi } f_{xx}\left(P_0\right) \neq 0\text{) o, più in generale,} \\ H\left(P\right) > 0 \text{ intorno a } P_0 \text{ (e quindi } f_{xx}\left(P_0\right) \neq 0 \\ \text{intorno a } P_0\text{)} \end{array} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{l} P_0 \text{ è un punto di estremo relativo proprio per } f, \text{ e precisamente} \\ \text{è un punto di minimo relativo proprio per } f \text{ se è } f_{xx}\left(P_0\right) > 0 \\ \text{o } f_{xx}\left(P\right) > 0 \text{ intorno a } P_0; \\ \text{è un punto di massimo relativo proprio per } f \text{ se è } f_{xx}\left(P_0\right) < 0 \\ \text{o } f_{xx}\left(P\right) < 0 \text{ intorno a } P_0. \end{array} \right)$$

N.B. L'implicazione α) deriva dalla condizione sufficiente di estremo relativo per le funzioni reali di due variabili reali;

$$\beta)\ \begin{cases} 1) & P_0 \text{ è un punto estremale per } f \\ 2) & H\left(P_0\right) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} P_0 \text{ non è un punto di} \\ \text{estremo relativo per } f \end{array}$$

N.B. l'implicazione β) deriva dalla condizione necessaria di estremo relativo per le funzioni reali di due variabili reali.

3^a **operazione.**

Si considerano i punti di A che possono essere di estremo relativo per f e ai quali non sono applicabili le implicazioni α) e β).
Questi punti sono ovviamente tutti e soli i punti delle seguenti 3 categorie:

c_1) Punti **estremali** di f tali che, detto P_0 uno qualsiasi di esso, si ha che: $H\left(P_0\right) = 0$ e $H\left(P\right)$ non è positivo intorno a P_0.

c_2) Punti di $\overset{o}{A}$ nei quali manca qualche derivata parziale prima o seconda di f.

c_3) Punti di $A \cap FA$

Per i punti di tali categorie non esistono teoremi che forniscono delle condizioni sufficienti affinchè siano o non siano punti di estremo relativo, bisogna ricorrere direttamente alla definizione di punto di estremo relativo, il che, in genere, è una cosa piuttosto complicata e laboriosa.

Osservazione 133 Per stabilire se un punto $P_0 \in A \cap FA$ è o non è un punto di estremo relativo per f è utile tener presente la seguente :
Condizione necessaria affinchè un punto di $A \cap FA$ sia un punto di

estremo relativo per f.
Consideriamo una funzione reale di due variabili reali f e un punto $P_0 \in A$. Vale la seguente implicazione:

$$\left\{\begin{array}{ll} 1) & P_0 \in A \cap FA \\ 2) & P_0 \text{ è un punto di estremo relativo per } f \end{array}\right. \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \not\Leftarrow \end{array} \left(\begin{array}{l} P_0 \text{ è un punto di} \\ \text{estremo relativo per} \\ \text{la restrizione } f_{A\cap FA} \end{array}\right)$$

La proposizione precedente, anche se non è una condizione sufficiente di estremo relativo per f, è utile per due motivi. In primo luogo essa è equivalente a una condizione sufficiente affinchè un punto $P_0 \in A\cap FA$ **non** sia un punto di estremo relativo per f. infatti la proposizione precedente è equivalente alla seguente implicazione :

$$\left\{\begin{array}{ll} 1) & P_0 \in A \cap FA \\ 2) & \begin{array}{l} P_0 \text{ non è un punto di estremo} \\ \text{relativo per la restrizione } f_{A\cap FA} \end{array} \end{array}\right. \Rightarrow \left(\begin{array}{l} P_0 \text{ non è un punto} \\ \text{di estremo relativo} \\ \text{per f} \end{array}\right)$$

In secondo luogo la proposizione precedente è utile per **ridurre** il numero dei punti per i quali si deve stabilire ricorrendo alla definizione se sono o non punti di estremo relativo per f. Infatti per la proposizione precedente, invece di studiare il comportamento di f in ogni punto dell'insieme $A \cup FA$, che, in genere, se A non è aperto, è un insieme infinito, basta studiare il comportamento di f in ogni punto dell'insieme

$$\{P \in A \cap FA : P \text{ è un punto di estremo relativo per } f_{A\cap FA}\}$$

che, in genere, è un insieme finito.
il problema di determinare questo secondo insieme, i.e. i punti di $A\cap FA$ che sono di estremo relativo per la restrizione $f_{A\cap FA}$, s'identifica in genere col problema di **trovare i punti di estremo relativo della restrizione di una funzione $f(x, y)$ di due variabili reali a una curva Γ contenuta nell'insieme di definizione di $f(x, y)$ e si chiama un *problema di estremo condizionato*.**

Esercizio — Trovare i punti di estremo relativo e assoluto per la funzione

$$f(x, y) = x^5 + y^5 - 5x - 5y$$

✓ La funzione f è definita in $A = \mathbb{R}^2$, quindi tutti i punti di A sono interni a A, i.e. risulta

$$A = \overset{o}{A} \quad \text{e} \quad A \cap FA = \emptyset.$$

troviamo i punti estremali di f.
Dobbiamo allora considerare la soluzione del sistema

$$\left\{\begin{array}{lcl} f_x(x, y) & = & 0 \\ f_y(x, y) & = & 0 \end{array}\right.$$

i.e. del sistema

$$\begin{cases} 5x^4 - 5 & = & 0 \\ \\ 5y^4 - 5 & = & 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono i punti

$$P_1 = (1,1) \quad , \quad P_2 = (1,-1) \quad , \quad P_3 = (-1,1) \quad , \quad P_4 = (-1,-1)\,.$$

Dobbiamo ora calcolare l'hessiano di f in tali punti. Si ha:

$$f_x = 5x^4 - 5, f_y = 5y^4 - 1, f_{xy} = 0, f_{yx} = 0, f_{xx} = 20x^3, f_{yy} = 20y^3.$$

Quindi si ha:

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20x^3 & 0 \\ 0 & 20y^3 \end{vmatrix} = 400x^3y^3 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Si ha ora:

$$H(P_1) = 400 > 0 \text{ e } f_{xx}(P_1) = 20 > 0$$

$$H(P_2) = -400 < 0, H(P_3) = -400 < 0, H(P_4) = 400 > 0$$
$$\text{e } f_{xx}(P_4) = -20 < 0$$

Pertanto si ha:

1. P_1 = punto di minimo relativo proprio per f;
2. $f(P_1) = 1 + 1 - 5 - 5 = -8$ = minimo relativo proprio per f.
3. P_2 e P_3 non sono punti di estremo relativo per f;
4. P_4 = punto di massimo relativo proprio per f; $f(P_4) = -1-1+5+5 = 8$ = massimo relativo proprio per f.

Ovviamente non possono esistere altri punti di estremo relativo per f perchè le categorie $c_1)$ $c_2)$ $c_3)$ sono vuote.
Osserviamo ora che indicando con r l'asse delle x, si ha:

$$\sup_r f = \sup_{\mathbb{R}} \left(x^5 - 5x\right) = +\infty \quad , \quad \inf_r f = \inf_{\mathbb{R}} \left(x^5 - 5x\right) = -\infty$$

quindi f è priva di estremi assoluti. ■

Esercizio — Trovare i punti di estremo relativo e assoluto per la funzione

$$f(x,y) = x^3 + y^3$$

✓ Osserviamo che f è definita nell'insieme $A = \mathbb{R}^2$, e quindi tutti i punti di A sono interni a A, i.e. risulta $A = \overset{o}{A}$ e $A \cap FA = \emptyset$.
troviamo i punti estremali di f.
Dobbiamo allora considerare le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) &= 0 \\ \\ f_y(x,y) &= 0 \end{cases}$$

i.e. del sistema:

$$\begin{cases} 3x^2 &= 0 \\ \\ 3y^2 &= 0 \end{cases}$$

Questo sistema ammette l'unica soluzione $(0,0)$. Quindi $(0,0)$ è l'unico punto estremale per f.
Calcoliamo ora l'hessiano di f in $(0,0)$.
Si ha:

$$f_x = 3x^2 \quad , \quad f_y = 3y^2 \quad , \quad f_{xy} = 0 \quad , \quad f_{yx} = 0 \quad , \quad f_{xx} = 6x \quad , \quad f_{yy} = 6y$$

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{vmatrix} = 36xy \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Quindi si ha $H(0,0) = 0$.
Inoltre l'hessiano di f, non è positivo intorno al punto $(0,0)$.
Pertanto $(0,0)$ è un punto al quale non sono applicabili le condizioni sufficienti affinchè un punto estremale sia o non sia un punto di estremo relativo.
Quindi, per stabilire se $(0,0)$ è punto di estremo relativo o non lo è, dobbiamo ricorrere alla definizione stessa di punto di estremo relativo.
Osserviamo che risulta $f(0,0) = 0$, inoltre è evidente che $f(x,y)$ assume valori sia positivi che negativi in ogni intorno di $(0,0)$; quindi $(0,0)$ non è un punto di estremo relativo per f. Ovviamente non possono esistere altri punti di $\mathbb{R}^2$ che sono punti di estremo relativo per f perchè la categoria c_1) si riduce al punto $(0,0)$ che è stato già studiato e le categorie c_2) e c_3) sono vuote.
Quindi la funzione considerata è priva di estremi relativi. Pertanto essa è anche priva di estremi assoluti.
Il fatto che f sia priva di estremi assoluti si può anche dedurre dal fatto che, indicato con r l'asse x, si ha:

$$\sup_r f = \sup_{\mathbb{R}} x^3 = +\infty \quad \text{e} \quad \inf_r f = \inf_{\mathbb{R}} x^3 = -\infty$$

e quindi si ha anche

$$\sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty \quad \text{e} \quad \inf_{\mathbb{R}^2} f = -\infty$$

■

Esercizio — Trovare i punti di estremo relativo e assoluto della funzione

$$f(x,y) = x^4 - y^3$$

nel quadrato $A = [-1,1]^2$, i.e. i punti di estremo relativo e assoluto della restrizione f_A con $f(x,y) = x^4 - y^3$ e $A = [-1,1]^2$.
✓ Cerchiamo innanzitutto i punti estremali della restrizione f_A, i.e. i punti di $\overset{o}{A}$ nei quali si annullano f_x e f_y.
Si ha : $f_x = 4x^3$, $f_y = -3y^2$.
Quindi l'unico punto estremale della restrizione f_A è il punto $O = (0,0)$. Si ha ora:

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & -6y \end{vmatrix} = 72x^2 y$$

e quindi si ha : $H(0,0) = 0$.
Inoltre $H(x,y)$ non è positivo intorno a $(0,0)$.
Quindi non si può applicare al punto $(0,0)$ la condizione sufficiente affinchè un punto estremale sia un punto di estremo relativo.
Per stabilire se il punto $O = (0,0)$ è di estremo relativo si deve allora ricorrere direttamente alla definizione.
Si ha $f(0,0) = 0$, d'altra parte la funzione $f(x,y)$ in ogni intorno di $(0,0)$ ammette sia valori positivi che negativi.
Quindi il punto $O = (0,0)$ non è un punto di estremo relativo per $f(x,y)$.
Cerchiamo ora i punti di estremo relativo della restrizione f_A che cadono sulla frontiera di A, tenendo presente che questi punti sono anche di estremo relativo per la restrizione $f_{\partial A}$, e tenendo presente che non è vero il viceversa.
indichiamo allora con

$$\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$$

i lati del quadrato A rappresentato in figura (G.1), e indichiamo con P_1, P_2, P_3, P_4 i 4 vertici del quadrato A indicati in figura.
Osserviamo che risulta:

$$f_{\ell_1} = 1 - y^3, f_{\ell_2} = x^4 - 1, f_{\ell_3} = 1 - y^3, f_{\ell_4} = x^4 + 1.$$

Quindi i punti di estremo relativo di f_{ℓ_1} sono $P_1 = (1,1)$ e $P_4 = (1,-1)$. I punti di estremo relativo di f_{ℓ_2} sono $P_1 = (1,1)$ $P' = (0,1)$ e $P_2 = (-1,1)$. P_2 e $P_3 0\,(-1,-1)$, invece, risultano essere i punti di estremo relativo di f_{ℓ_3} mentre f_{ℓ_4} ha come punti di estremo relativo P_3, $P'' = (0,-1)$ e P_4.
I punti P' e P'' sono certamente anche punti di estremo relativo per f_{FA}.

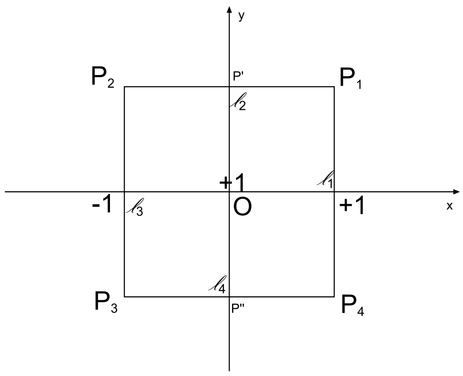

Figura G.1: Rappresentazione del dominio A.

Esaminiamo i punti P_1, P_2, P_3, P_4.
Si ha $f(P_1) = f(1,1) = 0$. D'altra parte nei punti P di FA prossimi a P_1 e distinti da P_1 risulta $f_{\ell_1}(P) = 1 - y^3 > 0$ e $f_{\ell_2}(P) = x^4 - 1 < 0$.
Quindi P_1 non è un punto di estremo relativo per f_{FA}.
Si ha poi $f(P_2) = f(-1,1) = 0$. D'altra parte nei punti P di FA prossimi a P_2 e distinti da P_2 si ha: $f_{\ell_2}(P) = x^4 - 1 < 0$ e $f_{\ell_3}(P) = 1 - y^3 > 0$.
Quindi P_2 non è un punto di estremo relativo per f_{FA}.
Si ha poi $f(P_3) = f(-1,-1) = 2$. D'altra parte nei punti P di FA prossimi a P_3 e distinti da P_3 si ha: $f_{\ell_3}(P) = 1 - y^3 < 2$ e $f_{\ell_4}(P) = x^4 + 1 < 2$.
Quindi P_3 è un punto di massimo relativo per f_{FA}.
Si ha poi: $f(P_4) = 2$. D'altra parte nei punti P di FA prossimi a P_4 e distinti da P_4 si ha: $f_{\ell_4}(P) = x^4 + 1 < 2$ e $f_{\ell_1}(P) = 1 - y^3 < 2$.
Quindi anche P_4 è un punto di massimo relativo per f_{FA}.
In definitiva i punti di estremo relativo per f_{FA} sono i punti

$$P' \quad , \quad P'' \quad , \quad P_3 \quad \text{e} \quad P_4.$$

Dobbiamo ora controllare se questi punti sono anche punti di estremo relativo per f_A.
A tale scopo osserviamo che si ha:

$$f\left(P'\right) = f(0,1) = -1, \; f\left(P''\right) = (0,-1) = 1, f(P_3) = f(P_4) = 2$$

D'altra parte risulta:

$$-1 \leqslant -y^3 \leqslant x^4 - y^3 \leqslant 1 + 1 = 2 \quad \forall (x,y) \in A$$

Pertanto si ha che P' è un punto di minimo relativo e assoluto per f_A e -1 è un minimo relativo e assoluto per f_A;
P_3 e P_4 sono punti di massimo relativo e assoluto per f_A e 2 è un massimo

relativo e assoluto per f_A.
Consideriamo ora P''. Abbiamo visto che risulta $f(P'') = 1$. Si ha poi

$$f_{\ell_4}(P) = x^4+1 > 1 \quad \forall P \in \ell_4 - \{P''\} \qquad \text{e} \qquad f(0,y) = -y^3 < 1 \quad \forall y \in \left]-1,1\right]$$

Quindi il punto P'' non è un punto di estremo relativo per f.
Da quanto visto si deduce che il punto P' è il punto di minimo assoluto di f in A e i punti P_3 e P_4 sono i punti di massimo assoluto di f in A, e che inoltre risulta:

$$\min_A f = -1 \qquad \text{e} \qquad \max_A f = 2$$

■

G.2 Procedimento per cercare i punti di estremo assoluto per una funzione di k variabili.

Dalla condizione necessaria di estremo relativo per le funzioni di k variabili si deduce facilmente la seguente

Proposizione 13 (c.ne nec.ria per l'esistenza di un estremo ass.to)
Consideriamo una funzione reale di k variabili:

$$f : X \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$$

Se la funzione f è dotata di minimo assoluto in un insieme $A \subseteq X$, i punti di minimo assoluto di f in A (i.e. di f_A) vanno cercati tra i punti delle 3 categorie seguenti:

1^a) *Punti di $\overset{o}{A}$ nei quali si annullano le derivate parziali prime di f (i.e. nei punti estremali per f_A)*

2^a) *Punti di $\overset{o}{A}$ nei quali f non è derivabile parzialmente rispetto a qualche variabile.*

3^a) *Punti di $A \cap FA$ che sono punti di estremo assoluto per la restrizione $f_{A\cap FA}$.*

Conseguentemente, nell'ipotesi fatta che f sia dotata di un minimo assoluto in A, detti $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ i punti delle 3 categorie considerate (tali punti possono essere anche in un numero infinito), il minimo assoluto di f coincide col più piccolo dei valori di f nei punti $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$, i.e. coincide col numero

$$m' = \min\{f(P_1), \ldots, f(P_n), \ldots\}.$$

Se la funzione f è dotata di massimo assoluto in A, i punti di massimo assoluto di f in A (i.e. di f_A) vanno sempre cercati tra i punti $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$

delle tre precedenti categorie, e quindi il massimo assoluto di f coincide col più grande dei valori di f nei punti $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$, i.e. coincide col numero

$$m'' = \max\{f(P_1), \ldots, f(P_n), \ldots\}$$

Osservazione 134 La regola precedente si può chiamare **la regola delle tre categorie**. Si noti che, per applicare tale regola, occorre sapere a priori che la funzione f è dotata di minimo o massimo assoluto in un insieme A. Per stabilire se una funzione

$$f : X \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$$

è dotata di minimo o massimo assoluto in un insieme $A \subseteq X$ è utile tener presente le implicazioni seguenti:

$$\begin{array}{l} a)\ f \text{ è continua in } A \\ b)\ A \text{ è compatto} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} f \text{ è dotata di minimo assoluto e} \\ \text{massimo assoluto in } A \end{array}$$

(i.e. il teorema di Weierstrass)

$$\begin{array}{l} a)\ f \text{ è continua in } A \\ b)\ A \text{ è chiuso e non limitato} \\ c)\ \lim\limits_{P\to\infty} f(P) = +\infty\ [\lim\limits_{P\to\infty} f(P) = +\infty\ ] \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} f \text{ è dotata di minimo} \\ \text{assoluto in } A \text{ e non è} \\ \text{dotata di massimo} \\ \text{assoluto in } A \\ \left[\begin{array}{l} f \text{ è dotata di massimo} \\ \text{assoluto in } A \text{ e non è} \\ \text{dotata di minimo} \\ \text{assoluto in } A \end{array}\right] \end{array}$$

Osservazione 135 Qualora non si sa a priori se la funzione f è dotata per esempio di minimo assoluto in A, la regola delle tre categorie si può ancora applicare perchè, una volta determinato quello tra i punti $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ nei quali f ha il minimo valore, diciamolo $\bar{P}$, si controlli poi, ricorrendo direttamente alla definizione di minimo assoluto, se il numero $f(\bar{P})$è o non è effettivamente il minimo assoluto di f.
l'utilità della regola in questo caso consiste nel fatto che essa permette di **ridurre** a uno il numero dei punti per i quali si deve controllare con la definizione se sono o non sono punti di minimo assoluto per f.

Esercizio — Trovare gli estremi assoluti della funzione

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + 2y$$

nel cerchio chiuso $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$.
✓ Per il teorema di Weierstrass la funzione considerata è dotata di minimo

e di massimo assoluto in A.
Per trovare gli estremi assoluti di f in A applichiamo il metodo delle tre categorie.

1^a categoria : punti di $\overset{o}{A}$ nei quali si annullano le derivate prime di f.

Si ha:

$$f_x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} \quad , \quad f_y = \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} + 2$$

Si osservi che f_x si annulla solo nei punti del tipo $(0, y)$ con $y \neq 0$; ma nei punti di tale tipo non si annulla f_y perchè risulta

$$f_y(0, y) = \frac{y}{\sqrt{y^2}} + 2 = \frac{y}{|y|} + 2 \neq 0.$$

Quindi la 1^a categoria di punti è l'insieme $\emptyset$.

2^a categoria : punti di $\overset{o}{A}$ nei quali f non è derivabile rispetto a x o a y.

Tale categoria si riduce al punto $(0, 0)$.
infatti f non è derivabile rispetto a x in $(0, 0)$ perchè si ha

$$f(x, 0) = \sqrt{x^2} = |x|$$

e quindi la funzione $f(x, 0)$ non è derivabile nel punto $x = 0$. Si vede facilmente che f non è derivabile nemmeno rispetto a y nel punto $(0, 0)$.

3^a categoria. Punti $A \cap FA$ che sono di estremo assoluto per $f_{A \cap FA}$.

Si noti che essendo A chiuso, si ha che $A \cap FA = FA$.
FA è la circonferenza Γ di centro l'origine e raggio 1. Tale circonferenza coincide con il luogo dei punti di $\mathbb{R}^2$ che soddisfano le equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ \\ y = \sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

La funzione della variabile t che si ottiene calcolando $f(x, y)$ sulla circonferenza Γ è la funzione

$$F(t) = f(\cos t, \sin t) = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} + 2\sin t = 1 + 2\sin t \qquad \text{con} \quad t \in [0, 2\pi].$$

I valori di $F(t)$ sono tutti e soli i valori della restrizione $f_{A\cap FA}$. Ora la funzione $F(t)$ assume il suo massimo valore quando risulta $t=\pi/2$ e assume il suo minimo valore quando risulta $t=3\pi/2$. A $t=\pi/2$ corrisponde il punto $(0,1)\in FA$, a $t=3\pi/2$ corrisponde il punto $(0,-1)\in FA$.
Quindi la restrizione $f_{A\cap FA}$ ha come punti di estremo assoluto $(0,1)$ e $(0,-1)$. Quindi la 3^a categoria è costituita dai punti $(0,1)$ e $(0,-1)$.

in definitiva i punti delle tre categorie sono:

$$P_1=(0,0)\quad,\quad P_2=(0,1)\quad,\quad P_3=(0,-1)\,.$$

Si ha ora:

$$f(P_1)=f(0,0)=0; f(P_2)=f(0,1)=3; f(P_3)=f(0,-1)=-1$$

Pertanto si ha:

$$3=\max_A f\qquad,\qquad -1=\min_A f.$$

$(0,1)=$ punto di massimo assoluto di f in A.
$(0,-1)=$ punto di minimo assoluto di f in A. ■

Esercizio — Trovare gli estremi assoluti della funzione

$$f(x,y)=x^2+y^2+x+y.$$

✓ Ovviamente risulta

$$\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y)=+\infty$$

e quindi f è dotata di minimo assoluto e non è dotata di massimo assoluto. Troviamo i punti delle tre categorie.

1^a categoria: punti di $\overset{o}{A}\equiv\mathbb{R}^2$ estremali

Si ha:

$$\begin{cases} f_x &= 0 \\ f_y &= 0 \end{cases} \to \begin{cases} 2x+1 &= 0 \\ 2y+1 &= 0 \end{cases} \to \left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

2^a categoria

La seconda categoria è $\emptyset$ perchè f è di classe C^∞ in $\mathbb{R}^2$.

3^a categoria

Anche la 3^a categoria è $\emptyset$ perchè $A = \mathbb{R}^2$ e quindi $A \cap FA = \emptyset$.

Dunque i punti delle tre categorie si riducono al punto

$$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Poichè f è dotata di minimo assoluto, il punto $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ è il punto di minimo assoluto di f. Pertanto si ha:

$$\min f = f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 1 = -\frac{1}{2}$$

Osservazione 136 Il fatto che risulta

$$\lim_{(x,y)\to\infty} f(x, y) = +\infty$$

è intuitivamente evidente, ma lo si può dimostrare osservando che risulta:

$$x^2 + y^2 + x + y \geqslant |x|^2 + |y|^2 - |x| - |y| = |x|(|x| - 1) + |y|(|y| - 1);$$

oppure osservando che, essendo

$$a + b \leqslant \sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2} \qquad \forall a, b \in \mathbb{R},$$

si ha:

$$x^2 + y^2 + x + y \geqslant x^2 + y^2 - (|x| + |y|) \geqslant x^2 + y^2 - \sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2} =$$
$$= \sqrt{x^2 + y^2}\left(\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{2}\right) = |P - O|\left(|P - O| - \sqrt{2}\right).$$

La disuguaglianza

$$a + b \leqslant \sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2} \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

si dimostra come segue:
$\forall a, b \in \mathbb{R}$ si ha:

$$0 \leqslant (a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

e quindi si ha $2ab \leqslant a^2 + b^2$.
D'altro canto risulta:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \leqslant a^2 + b^2 + a^2 + b^2 = 2\left(a^2 + b^2\right)$$

Quindi è:

$$|a + b| \leqslant \sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Risulta, quindi, anche:

$$a + b \leqslant \sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2}$$

■