Appendice H

Equazioni differenziali non lineari.

H.1 Osservazione preliminare

Consideriamo un'equazione differenziale di ordine n che indicheremo col simbolo

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0. \tag{H.1.1}$$

Abbiamo già visto che, se l'equazione (H.1.1) è un'equazione lineare con coefficienti e termini noti continui in un intervallo (a, b), è possibile trovare una funzione reale dipendente da x e da n parametri costanti $c_1, \ldots, c_n$, i.e. del tipo:

$$y = y\left(x, c_1, c_2, \ldots, c_n\right) \tag{H.1.2}$$

definita in $(a, b) \times \mathbb{R}^n$, la quale, al variare di $c_1, \ldots, c_n$ in $\mathbb{R}$, fornisce tutti e soli gl'integrali dell'equazione H.1.1, i.e. fornisce l'integrale generale dell'equazione (H.1.1), e abbiamo già detto che una funzione di tale tipo si chiama **un integrale generale della (H.1.1)**. Se l'equazione (H.1.1) non è lineare, non è detto che si possa trovare una funzione del tipo (H.1.2) che fornisca tutti gl'integrali della (H.1.1). Perciò per un'equazione del tipo (H.1.1) non lineare conviene modificare la definizione d'integrale generale in modo da renderla "più larga ".
A tale scopo, diamo le seguenti definizioni.

Definizione 104 *Consideriamo un'equazione differenziale* ***non lineare*** *di ordine n*

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{H.1.3}$$

Consideriamo ora una funzione reale dipendente da x e da n parametri costanti $c_1, \ldots, c_n$, i.e. del tipo

$$y = y\left(x, c_1, c_2, \ldots, c_n\right), \tag{H.1.4}$$

definita in un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.
Si dice che la funzione (H.1.4) è ***un integrale generale*** *in* ***forma esplicita*** *della (H.1.3) quando al variare delle costanti* $c_1, \ldots, c_n$ *in opportuni intervalli di* $\mathbb{R}$ *la funzione (H.1.4) fornisce solo integrali della (H.1.3), e non necessariamente tutti gli'integrale della (H.1.3).*

Definizione 105 *Se la funzione (H.1.4), al variare di* $c_1, \ldots, c_n$ *in opportuni intervalli, fornisce tutti gl'integrali della (H.1.3), diremo, come al solito, che la funzione (H.1.4) fornisce, al variare di* $c_1, \ldots, c_n$ *l'integrale generale della (H.1.3) inteso come l'insieme di tutti gl'integrali della (H.1.3).*

Consideriamo ora un'equazione funzionale, dipendente da n parametri costanti $c_1, \ldots, c_n$, i.e. del tipo:

$$\Phi\left(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n\right) = 0 \tag{H.1.5}$$

con y funzione incognita della variabile x.

Definizione 106 *Si dice che l'equazione (H.1.5) è* ***un integrale generale in forma implicita*** *dell'equazione (H.1.3) quando ogni funzione* $y\left(x\right)$*, definita e derivabile* n *volte in un intervallo, che soddisfa l'equazione (H.1.5) per opportuni valori dei parametri* $c_1, \ldots, c_n$*, è un integrale della (H.1.3).*

Si noti che un'equazione del tipo(H.1.5) è, al pari della (H.1.3), un'equazione funzionale (i.e un'equazione la cui incognita è una funzione), ma ha rispetto alla (H.1.3) il vantaggio di non essere più un'equazione differenziale.

Definizione 107 *Si chiama* ***integrale particolare*** *dell'equazione differenziale (H.1.3) ogni integrale generale, in forma esplicita o implicita, della (H.1.3) particolarizzando le costanti* $c_1, \ldots, c_n$ *(i.e. ogni integrale* $y\left(x\right)$ *della (H.1.3) tale che, detto* (a, b)*, il suo intervallo di definizione si ha che:*

$$\forall \bar{x} \in (a, b)\, \exists I\left(\bar{x}\right) : \begin{bmatrix} \text{la restrizione } y_{I(\bar{x}) \cap (a,b)} \text{ può ottenersi da} \\ \text{qualche integrale generale particolariz -} \\ \text{zando le costanti.} \end{bmatrix}$$

)

Osservazione 137 E' utile osservare che, mentre gl'integrali particolari di un'equazione lineare hanno tutti lo stesso insieme di definizione, e precisamente sono tutti definiti nell'intervallo (a, b) in cui i coefficienti e il termine noto dell'equazione lineare sono continui, gl'integrali particolari di un'equazione non lineare non hanno in genere lo stesso insieme di definizione, e inoltre il loro insieme di definizione dipende in genere dal modo in cui si

particolarizzano le costanti nell'integrale da cui si ottengono.
Consideriamo, per esempio, l'equazione non lineare

$$y' + 2x\,\mathrm{e}^{-y} = 0 \tag{H.1.6}$$

Quest'equazione si può integrare col metodo della separazione delle variabili; i.e. in sintesi ragionando come segue: detto y un generico integrale della (H.1.6) si ha:

$$y' = -2x\,\mathrm{e}^{-y} \Rightarrow \mathrm{e}^{y}\,dy = -2xdx \Rightarrow \int \mathrm{e}^{y}\,dy = -\int 2xdx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathrm{e}^{y} = -x^2 + c \Rightarrow y = \log\left(c - x^2\right)$$

Quindi la funzione $y = \log\left(c - x^2\right)$ è un integrale generale in forma esplicita dell'equazione (H.1.6).
E' evidente che gl'integrali particolari dell'equazione (H.1.6) hanno un insieme di definizione che dipende dal modo in cui si particolarizza la costante c nell'integrale generale $y = \log\left(c - x^2\right)$

H.2 Le equazioni differenziali a variabili separabili.

Un equazione differenziale si dice a variabili separabili quando è del tipo

$$y' = u\,(x)\,v\,(y) \tag{H.2.1}$$

con $u\,(x)$ funzione reale definita e continua in un intervallo (a, b), e con $v\,(y)$ funzione reale definita e continua in un intervallo (c, d).
Il nome dato all'equazione (H.2.1) è suggerito dal fatto che, essendo

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

l'equazione (H.2.1) si può scrivere nella forma:

$$\frac{dy}{v\,(y)} = u\,(x)\,dx, \tag{H.2.2}$$

e in tale forma il simbolo y, che denota la variabile indipendente, figura solo al 1^o membro, mentre il simbolo x, che denota la variabile indipendente, figura solo al 2^o membro. Si noti che, se la funzione $v\,(y)$ è priva di zeri reali, le equazioni (H.2.1) e (H.2.2) sono equivalenti; se invece la funzione $v\,()$ ammette qualche zero reale, le equazioni (H.2.1) e (H.2.2) non sono equivalenti, perchè ogni integrale della (H.2.2) è un integrale della (H.2.1), ma non è vero il viceversa, dato che, se y_0 è uno zero reale di $v\,(y)$, la funzione costante $y = y_0$ è un integrale della (H.2.1), ma non della (H.2.2). In ogni caso è esatto dire che ogni integrale della (H.2.2) è anche integrale della

(H.2.1). Per integrare l'equazione (H.2.2), diciamo y un generico integrale di essa, e osserviamo che, poichè y verifica l'eguaglianza (H.2.2), y verifica anche l'eguaglianza:

$$\int \frac{dy}{v(y)} = \int u(x)\,dx \tag{H.2.3}$$

L'integrale $\int \frac{dy}{v(y)}$, **per la formula d'integrazione indefinita per sostituzione può anche essere calcolato come se y fosse una variabile indipendente**, e quindi detta $V(y)$ una primitiva della funzione $\frac{1}{v(y)}$, si ha:

$$\int \frac{dy}{v(y)} = V(y) + c;$$

detta poi $U(x)$ una primitiva della funzione $u(x)$, si ha:

$$\int u(x)\,dx = U(x) + c.$$

pertanto, poichè y verifica l'eguaglianza (H.2.3), y verifica anche l'eguaglianza

$$V(y) = U(x) + c$$

con c opportuna costante reale.
Ciò si può esprimere dicendo che l'integrale y soddisfa per un opportuno valore del parametro c l'equazione dipendente dal parametro c

$$V(y) = U(x) + c. \tag{H.2.4}$$

Ripercorrendo il ragionamento all'inverso si vede che vale anche il viceversa, i.e. che ogni funzione $y(x)$, definita e derivabile in un intervallo, che soddisfa per un opportuno valore del parametro c l'equazione (H.2.4), è un integrale della (H.2.2), e quindi anche della (H.2.1). Pertanto l'equazione (H.2.4) è un **integrale generale in forma implicita** dell'equazione (H.2.1).
Se la funzione $V(y)$ è invertibile, l'equazione (H.2.4) è equivalente all'equazione:

$$y = V^{-1}(U(x) + c) \tag{H.2.5}$$

La funzione (H.2.5) è in tal caso un **integrale generale in forma esplicita** dell'equazione (H.2.1).
il metodo esposto per integrare la (H.2.1) si chiama metodo di separazione delle variabili.
Quando questo metodo viene applicato nei casi particolari, esso viene applicato con una certa rapidità, e cioè omettendo alcune delle considerazioni che lo giustificano.

Osservazione 138 Ovviamente, supposto che la funzione $u(x)$ non sia identicamente nulla, gl'integrali costanti della (H.2.1) sono tutti e soli quelli del tipo $y = y_0$ con y_0 zero reale di $v(y)$, i.e. sono tutti e soli quelli che vengono trascurati nell'atto della separazione delle variabili.

Osservazione 139 In genere l'equazione a variabile separabili (H.2.1) ammette solo due tipi d'integrali: quelli non costanti trovati col metodo della separazione delle variabili, e quelli costanti trascurati nell'atto della separazione delle variabili. tuttavia, in qualche caso eccezionale, l'equazione (H.2.1) può ammettere anche un terzo tipo d'integrali: gl'integrali che si ottengono raccordando un integrale del primo tipo con un integrale del secondo tipo.
Si può far vedere che questo caso eccezionale si può presentare solo quando esiste un punto y_0 il quale è simultaneamente uno zero per $v\,(y)$ e una discontinuità per $v'\,(y)$.
Per mostrare come questo caso eccezionale può effettivamente presentarsi, consideriamo l'equazione

$$y' = 2\sqrt{y} \tag{H.2.6}$$

la quale è a variabili separabili essendo del tipo

$$y' = u\,(x)\,v\,(y)$$

con $u\,(x) = 1$ e $v\,(y) = 2\sqrt{y}$.
La (H.2.6), separando le variabili, si scrive

$$\frac{dy}{2\sqrt{2}} = dx. \tag{H.2.7}$$

Detto y un generico integrale della (H.2.7), si ha:

$$\int \frac{dy}{2\sqrt{2}} = \int dx,$$

e quindi

$$\sqrt{y} = x - c$$

con c opportuna costante e

$$\sqrt{y} = \left.\sqrt{y}\right|_{]0,+\infty)},$$

e quindi si ha:

$$y = (x-c)^2$$

con $x - c > 0$, ossia $y = (x-c)^2$ con $x \in \,]c, +\infty[$.
L'equazione (H.2.6) ammette allora i seguenti tipi d'integrali:

1^o **tipo** : integrali del tipo $y = (x-c)^2$ con $x \in \,]c, +\infty[$ e $c \in \mathbb{R}$.

2^o **tipo** : $y = 0$, integrale costante trascurato nell'atto della separazione delle variabili.

3^o **tipo** : integrale del tipo

$$y = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \in \,]-\infty, c] \\ & \\ (x-c)^2 & \text{se} \quad x \in \,]c, +\infty] \end{cases} \qquad \text{con } c \in \mathbb{R}$$

(i.e. integrali ottenuti raccordando quelli del 1^o e 2^o tipo).
Si noti che i punti dell'asse delle x sono punti in cui cade in difetto il teorema di unicità, e che per ogni punto dell'asse delle x passano addirittura infinite curve integrali della (H.2.6).

Esercizio — integrare l'equazione

$$y' = \left(1 + x^2\right) \tan y \tag{H.2.8}$$

✓ l'equazione (H.2.8) è a variabili separabili perchè è del tipo

$$y' = u(x)\, v(y)\,.$$

Separando le variabili la (H.2.8) si scrive come segue:

$$\frac{dy}{\tan y} = \left(1 + x^2\right) dx \tag{H.2.9}$$

L'equazione (H.2.9) non è equivalente alla (H.2.8) perchè le funzioni costanti del tipo $y = k\pi$ sono integrali di (H.2.8) e non di (H.2.9).
Per trovare gl'integrali della (H.2.9), detto y un generico integrale di essa, osserviamo che si ha:

$$\int \frac{dy}{\tan y} = \int \frac{\cos y}{\sin y} dy = \int \frac{d \sin y}{\sin y} = \log |\sin y| + c;$$

$$\int \left(1 + x^2\right) dx = x + \frac{x^3}{3} + c;$$

pertanto risulta

$$\log |\sin y| = x + \frac{x^3}{3} + c$$

con c opportuna costante reale.
Da ciò segue che l'equazione dipendente dal parametro c:

$$\log |\sin y| = x + \frac{x^3}{3} + c \tag{H.2.10}$$

è un integrale generale in forma implicita della (H.2.8).
L'equazione (H.2.10) è equivalente all'equazione (dipendente dal parametro c)

$$|\sin y| = \mathrm{e}^c\, \mathrm{e}^{x + \frac{x^3}{3}} \tag{H.2.11}$$

Questa equazione è equivalente all'equazione (dipendente dal parametro c)

$$\sin y = c\,\mathrm{e}^{x+\frac{x^3}{3}} \text{ con } c \in \mathbb{R} - \{0\} \tag{H.2.12}$$

[Infatti, se una funzione $y(x)$, definita e derivabile in un intervallo (a, b), soddisfa l'equazione (H.2.11), si ha

$$\sin y(x) \neq 0 \qquad \forall x \in (a, b)$$

e quindi la funzione $\sin y(x)$ è di segno costante in (a, b), e quindi si ha:

$$\sin y = \pm c\,\mathrm{e}^{x+\frac{x^3}{3}} \qquad \begin{array}{ll} + & \text{se risulta } \sin y(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b) \\ \\ - & \text{se risulta } \sin y(x) < 0 \quad \forall x \in (a, b) \end{array}$$

E quindi, indicato ancora con c il numero $\pm\,\mathrm{e}^c$, $y(x)$ soddisfa la (H.2.12). E' evidente poi che, se una funzione $y(x)$ soddisfa la (H.2.12), essa soddisfa anche la (H.2.11).]
Pertanto anche le equazioni (dipendenti dal parametro c) (H.2.11) e (H.2.12) sono integrali generali in forma implicita della equazione (H.2.8).
Si osservi ora che l'equazione (H.2.12) è certamente soddisfatta dalle funzioni del tipo:

$$y = \arcsin\left(c\,\mathrm{e}^{x+\frac{x^3}{3}}\right) + k\pi \text{ con } c \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ e } k \in \mathbb{Z}. \tag{H.2.13}$$

Si noti che quando k è dispari, la funzione (H.2.13) soddisfa la (H.2.12). Pertanto $\forall k \in \mathbb{Z}$ la funzione (H.2.13) è un integrale generale in forma esplicita della (H.2.8).
Dunque abbiamo trovato infiniti integrali generali in forma esplicita della equazione (H.2.8).
Si noti che ponendo $c = 0$ in tali integrali generali si ottengono ancora integrali della (H.2.8), e precisamente gl'integrali $y = k\pi$ implicitamente esclusi nell'atto della separazione delle variabili. Pertanto anche gl'integrali costanti del tipo $y = k\pi$ sono integrali particolari della (H.2.8). ∎

H.3 L'equazione di Bernoulli

Si chiama equazione di Bernoulli un'equazione del tipo:

$$y' + a_1(x)\,y = f(x)\,y^{\alpha} \tag{H.3.1}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ e con $a_1(x)$ e $f(x)$ funzioni reali definite e continue in un intervallo (a, b).

Osserviamo che, se $\alpha = 0$, l'equazione (H.3.1) è un'equazione lineare completa del 1^o ordine, e quindi è stata già studiata; se è $\alpha = 1$, la (H.3.1) è un'equazione lineare omogenea del 1^o ordine, e quindi è stata già studiata.
Supponiamo allora che $\alpha \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$. In tal caso l'equazione (H.3.1) non è lineare, ma si vede subito che essa **può trasformarsi in un'equazione lineare (del 1^o ordine) con un'opportuna sostituzione.**
A tale scopo osserviamo innanzitutto che la (H.3.1), dividendo 1^o e 2^o membro per y^α si può scrivere nella forma:

$$\frac{y'}{y^\alpha} + a_1(x)\, y^{1-\alpha} = f(x) \tag{H.3.2}$$

L'equazione (H.3.2), se è $\alpha > 0$, non è equivalente alla (H.3.1) perchè la (H.3.1) ammette l'integrale nullo (in (a, b)), il quale non è integrale della (H.3.2).
Se invece è $\alpha < 0$, la (H.3.1) e la (H.3.2) sono equivalenti.
in ogni caso è esatto dire che ogni integrale della (H.3.2) è anche integrale di (H.3.1).
per integrare la (H.3.2), poniamo

$$y^{1-\alpha} = z$$

i.e., detto $y(x)$ un generico integrale della (H.3.2), introduciamo la funzione

$$z(x) = y^{1-\alpha}(x)\,.$$

Poichè $y(x)$ soddisfa l'equazione (H.3.2), la funzione $z(x)$ soddisfa l'equazione che si ottiene dalla (H.3.2), scritta con $y = y(x)$, esprimendo il 1^o membro in funzione di $z(x)$.
per trovare questa equazione osserviamo che si ha

$$z'(x) = (1-\alpha)\, y^{-\alpha}(x)\, y'(x)$$

ossia

$$\frac{y'(x)}{y^\alpha(x)} = \frac{z'(x)}{1-\alpha}.$$

Pertanto, poichè risulta

$$\frac{y'(x)}{y^\alpha(x)} + a_1(x)\, y^{1-\alpha}(x) = f(x)$$

risulta anche

$$\frac{z'(x)}{1-\alpha} + a_1(x)\, z = f(x)\,.$$

Quindi la funzione $z(x)$ soddisfa l'equazione $\frac{z'(x)}{1-\alpha} + a_1(x)\, z = f(x)$, ossia, l'equazione:

$$z' + (1-\alpha)\, a_1(x)\, z = (1-\alpha)\, f(x) \tag{H.3.3}$$

L'equazione (H.3.3) si chiama per definizione l'equazione trasformata dell'equazione (H.3.2) o dell'equazione (H.3.1) mediante la sostituzione $y^{1-\alpha} = z$, ed è effettivamente un'equazione lineare (del 1^o ordine).
Dell'equazione (H.3.3) noi sappiamo trovare un integrale generale in forma esplicita, il quale è una funzione del tipo:

$$z = z(x, c) \tag{H.3.4}$$

con $x \in (a, b)$ e $c \in \mathbb{R}$, e fornisce al variare di c in $\mathbb{R}$ tutti gl'integrali della (H.3.3).
Ponendo $z = y^{1-\alpha}$ nell'equazione (H.3.4), si ottiene l'equazione dipendente dal parametro c

$$y^{1-\alpha} = z(x, c) \tag{H.3.5}$$

la quale è un integrale generale in forma implicita della (H.3.2), e quindi anche della (H.3.1), come si riconosce con facili considerazioni[1]. Dall'equazione (H.3.5) si ricava poi che la funzione

$$y = [z(x, c)]^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{H.3.6}$$

è un integrale generale in forma esplicita della (H.3.1).
Esercizio — Integrare l'equazione

$$y' - xy = x^3 y^2 \tag{H.3.7}$$

✓ L'equazione (H.3.7) è del tipo

$$y' + a_1(x)\, y = f(x)\, y^\alpha$$

e quindi è un'equazione di Bernoulli. L'equazione (H.3.7), dividendo 1^o e 2^o membro per y^2 si può scrivere nella forma

$$\frac{y'}{y^2} - x \cdot \frac{1}{y} = x^3. \tag{H.3.8}$$

Si noti che la (H.3.8) non è equivalente alla (H.3.7) perchè la (H.3.7) ammette l'integrale nullo, che non è integrale della (H.3.8).

[1] infatti, se $y(c)$ è una funzione definita e derivabile in un intervallo che soddisfa la (H.3.5) per un opportuno valore del parametro c, la funzione

$$z(x) = y^{1-\alpha}(x)$$

soddisfa l'equazione (H.3.4), e quindi soddisfa la (H.3.3). Pertanto si ha:

$$(1-\alpha)\, y^{-\alpha}(x)\, y'(x) + (1-\alpha)\, a_1(x)\, y^{1-\alpha}(x) = (1-\alpha)\, f(x),$$

i.e. si ha:

$$\frac{y'(x)}{y^\alpha(x)} + a_1(x)\, y^{(1-\alpha)}(x) = f(x),$$

i.e. $y(x)$ soddisfa la (H.3.2)

però ogni integrale della (H.3.8) è certamente un integrale della (H.3.7).
per integrare la (H.3.8), poniamo

$$\frac{1}{y} = z$$

i.e., detto $y(x)$ un generico integrale della (H.3.8), introduciamo la funzione $z(x) = \frac{1}{y(x)}$.
Poichè $y(x)$ soddisfa la (H.3.8), la funzione $z(x)$ soddisfa l'equazione che si ottiene dalla (H.3.8), scritta con $y = y(x)$, esprimendo il primo membro in funzione di $z(x)$.
per trovare questa equazione, osserviamo che si ha

$$z'(x) = \frac{-y'(x)}{y^2(x)},$$

ossia

$$\frac{y'(x)}{y^2(x)} = -z'(x)$$

Pertanto, poichè risulta

$$\frac{y'(x)}{y^2(x)} - x \cdot \frac{1}{y(x)} = x^3,$$

risulta anche $-z'(x) - xz(x) = x^3$. Quindi $z(x)$ soddisfa l'equazione $-z'(x) - xz(x) = x^3$ ossia l'equazione:

$$z' + xz = -x^3. \tag{H.3.9}$$

L'equazione (H.3.9) è per definizione l'equazione trasformata della (H.3.8) o della (H.3.7) mediante la sostituzione $\frac{1}{y} = z$, ed è un'equazione lineare completa del 1^o ordine.
l'equazione omogenea associata alla (H.3.9) è l'equazione:

$$z' + xz = 0 \tag{H.3.10}$$

La (H.3.10) è un'equazione a variabili separabili e separando le variabili si scrive nella forma

$$\frac{dz}{z} = -xdx. \tag{H.3.11}$$

Per integrare la (H.3.11), detto z un generico integrale di essa, osserviamo che si ha: $\int \frac{dz}{z} = -\int xdx$ e quindi

$$\log|z| = -\frac{x^2}{2} + k \text{ con } k \text{ opportuna costante reale.}$$

Pertanto si ha:

$$|z| = \mathrm{e}^k \, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},$$

ossia:

$$z = \pm\, \mathrm{e}^{k}\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \begin{array}{ll} + & \text{se risulta } z(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \\ - & \text{se risulta } z(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{array}$$

Posto $c = \pm\, \mathrm{e}^{k}$, si ha $z = c\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$, pertanto la funzione:

$$z = c\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \text{con } c \in \mathbb{R} - \{0\} \tag{H.3.12}$$

fornisce al variare d c in $\mathbb{R} - \{0\}$ l'integrale generale di (H.3.11).
la funzione

$$z = c\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \tag{H.3.13}$$

con $c \in \mathbb{R}$ fornisce al variare di c in $\mathbb{R}$ l'integrale generale di (H.3.10).

Cerchiamo ora un integrale particolare della (H.3.9) col metodo di Lagrange, i.e. cerchiamo un integrale particolare dalla (H.3.9) del tipo

$$u(x) = \gamma(x)\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

con $\gamma(x)$ funzione derivabile incognita da determinare.
Per determinare $\gamma(x)$ imponiamo che $u(x)$ sia un integrale della (H.3.9). Ciò facendo si ha:

$$\gamma'(x)\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} + \gamma(x)\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}(-x) + x\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = -x^3$$

e quindi si ha

$$\gamma'(x) = -x^3\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,.$$

Quindi si ha

$$\begin{aligned}\gamma(x) &= -\int x^3\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = -\int x^2 d\left(\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\right) = -x^2\, \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} + \int \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} \cdot 2x dx = \\ &= -x^2\, \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} + 2\int d\left(\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\right) = -x^2\, \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} + 2\, \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} + c = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\left(2 - x^2\right) + c\end{aligned}$$

pertanto si ha $u(x) = \gamma(x)\, \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} = \left(2 - x^2\right)$.
Quindi la funzione

$$z = c\, \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} + \left(2 - x^2\right) \ \text{ con } c \in \mathbb{R} \tag{H.3.14}$$

fornisce al variare di c in $\mathbb{R}$ l'integrale generale della (H.3.9).
ponendo $z = \frac{1}{y}$ nell'equazione (H.3.14) si ottiene l'equazione (dipendente dal parametro c)

$$\frac{1}{y} = c\, \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} + \left(2 - x^2\right) \tag{H.3.15}$$

la quale è un integrale generale in forma implicita della (H.3.8), e quindi della (H.3.7). Dall'equazione (H.3.15) si ricava che la funzione:

$$y = \frac{1}{c\,\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} + (2 - x^2)}$$

è un integrale generale in forma esplicita dell'equazione (H.3.7). ■

H.4 Equazioni a secondo membro omogeneo (o equazioni di Manfredi)

Un'equazione differenziale del tipo

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right) \tag{H.4.1}$$

si chiama un'equazione a secondo membro omogeneo, coerentemente col fatto che il secondo membro è una funzione omogenea di grado zero.
Qualche autore chiama un'equazione del tipo (H.4.1) un equazione di Manfredi.
L'equazione (H.4.1) si **può trasformare in un'equazione a variabili separabili con un'opportuna sostituzione.**
poniamo infatti nella (H.4.1)

$$\frac{y}{x} = z$$

i.e., detto $y\,(x)$ un generico integrale della (H.4.1), introduciamo la funzione

$$z\,(x) = \frac{y\,(x)}{x}.$$

Poichè $y\,(x)$ soddisfa la (H.4.1), al funzione $z\,(x)$ soddisfa l'equazione che si ottiene dalla (H.4.1), scritta con $y = y\,(x)$, esprimendo 1^o e 2^o membro in funzione di $z\,(x)$. per trovare quest'equazione, osserviamo che si ha

$$y\,(x) = xz\,(x)$$

e quindi $y'\,(x) = z\,(x) + xz'\,(x)$. Pertanto, poichè risulta

$$y'\,(x) = f\left(\frac{y\,(x)}{x}\right)$$

risulta anche $z\,(x) + xz'\,(x) = g\,(z\,(x))$. Quindi la funzione $z\,(x)$ soddisfa l'equazione $z + xz' = g\,(z)$ ossia l'equazione:

$$z' = \frac{g\,(z) - z}{x}. \tag{H.4.2}$$

L'equazione (H.4.2) si chiama, per definizione, l'equazione trasformata della (H.4.1) mediante la sostituzione $\frac{y}{x} = z$, ed è effettivamente un'equazione a variabili separabili.
Dell'equazione (H.4.2) noi sappiamo trovare un integrale generale almeno in forma implicita, i.e. costituito da un'equazione dipendente dal parametro c del tipo

$$\Phi(x, z, c) = 0. \tag{H.4.3}$$

Ponendo $z = \frac{y}{x}$ in tale equazione, si ottiene l'equazione

$$\Phi\left(x, \frac{y}{x}, c\right) = 0, \tag{H.4.4}$$

la quale è un integrale generale in forma implicita della (H.4.1), come si riconosce con facili considerazioni[2].
Esercizio — Integrare l'equazione

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{xy} \tag{H.4.5}$$

✓ L'equazione (H.4.5) si può scrivere

$$y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \tag{H.4.6}$$

e quindi è del tipo

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right),$$

i.e. è un'equazione a 2^o membro omogeneo[3].
Poniamo $\frac{y}{x} = z$, i.e. detto $y(x)$ un generico integrale della (H.4.6), introduciamo la funzione

$$z(x) = \frac{y(x)}{x};$$

[2]Infatti, se $y(x)$ è una funzione, definita e derivabile in un intervallo, che soddisfa la (H.4.4), posto $z(x) = \frac{y(x)}{x}$, $z(x)$ soddisfa la (H.4.3), e quindi soddisfa la (H.4.2). Pertanto si ha:

$$\frac{y'(x)\,x - y(x)}{x^2} = \frac{g\left(\frac{y(x)}{x}\right) - \frac{y(x)}{x}}{x},$$

e quindi

$$y'(x)\,x - y(x) = xg'\left(\frac{y(x)}{x}\right) - y(x)$$

ossia

$$y'(x) = g\left(\frac{y(x)}{x}\right),$$

i.e. $y(x)$ soddisfa la (H.4.1).

[3]Si noti che l'equazione (H.4.6) si può scrivere anche nella forma:

$$y' - \frac{y}{x} = x \cdot y^{-1},$$

e quindi essa è anche un'equazione di Bernoulli.

poichè $y(x)$ soddisfa la (H.4.6), $z(x)$ soddisfa l'equazione che si ottiene dalla (H.4.6), scritta con $y = y(x)$, esprimendo il 1^o e 2^o membro in funzione di $z(x)$.
per trovare questa equazione osserviamo che si ha $y(x) = xz(x)$ e quindi

$$y'(x) = z(x) + xz'(x).$$

Pertanto, poichè risulta

$$y'(x) = \frac{x}{y(x)} + \frac{y(x)}{x},$$

risulta anche:

$$\cancel{z}(x) + xz'(x) = \frac{1}{z(x)} + \cancel{z}(x).$$

Quindi la funzione $z(x)$ soddisfa l'equazione

$$xz' = \frac{1}{z}$$

ossia l'equazione:

$$z' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{z}. \tag{H.4.7}$$

L'equazione (H.4.7) è l'equazione trasformata della (H.4.6) mediante la sostituzione $\frac{y}{x} = z$ ed è a variabili separabili. tenendo presente che è

$$z' = \frac{dz}{dx}$$

e separando le variabili la (H.4.7) si scrive

$$zdz = \frac{dx}{x}. \tag{H.4.8}$$

Detto z un integrale della (H.4.8), si ha:

$$\int zdz = \int \frac{dx}{x},$$

$$\frac{z^2}{2} = \log|x| + c \text{ con } c \text{ opportuna costante reale,}$$

e quindi l'equazione

$$\frac{z^2}{2} = \log|x| + c \tag{H.4.9}$$

è un integrale generale in forma implicita dell'equazione (H.4.8), e quindi anche della (H.4.7).
ponendo nell'equazione (H.4.9), $z = \frac{y}{x}$, si ha l'equazione:

$$\frac{y^2}{2x^2} = \log|x| + c$$

e quindi l'equazione

$$y^2 = 2x^2 (\log |x| + c) \tag{H.4.10}$$

L'equazione (H.4.10) è un integrale generale in forma implicita della (H.4.6). L'equazione (H.4.10) è certamente soddisfatta dalle funzioni del tipo

$$y = +\sqrt{2x^2 (\log |x| + c)} \tag{H.4.11}$$

e

$$y = -\sqrt{2x^2 (\log |x| + c)} \tag{H.4.12}$$

pertanto le equazioni (H.4.11) e (H.4.12)sono integrali generali in forma esplicita di (H.4.5). ■

H.5 Equazioni del tipo $y' = g(ax+by)$ con a, b costanti non nulle di $\mathbb{R}$.

Un'equazione del tipo

$$y' = g(ax+by) \tag{H.5.1}$$

si **trasforma in un'equazione a variabili separabili mediante un'opportuna sostituzione.**
poniamo infatti nella (H.5.1) $ax + by = z$, i.e., detta $y(x)$ un generico integrale della (H.5.1), consideriamo la funzione

$$z(x) = ax + by(x).$$

Poichè $y(x)$ soddisfa la (H.5.1), $z(x)$ soddisfa l'equazione che si ottiene dalla (H.5.1), scritta con $y = y(x)$, esprimendo 1^o e 2^o membro in funzione di $z(x)$. Per trovare questa equazione osserviamo che si ha $z'() = a + by'(x)$ ossia

$$y'(x) = \frac{z'(x) - a}{b}.$$

Pertanto, poichè risulta $y'(x) = g(ax + by(x))$, risulta anche

$$\frac{z'(x) - a}{b} = g(z(x)).$$

Quindi la funzione $z(x)$ soddisfa l'equazione

$$\frac{z' - a}{b} = g(z)$$

ossia l'equazione:

$$z' = bg(z) + a. \tag{H.5.2}$$

L'equazione (H.5.2) si chiama, per definizione, l'equazione trasformata della (H.5.1) mediante la sostituzione $ax + by = z$, ed è effettivamente a variabili separabili[4].
Dell'equazione (H.5.2) sappiamo trovare un integrale generale almeno in forma implicita, i.e. del tipo

$$\Phi(x, z, c) = 0. \tag{H.5.3}$$

Ponendo nella (H.5.3) $z = ax + by$, si ottiene l'equazione:

$$\Phi(x, ax + by, c) = 0, \tag{H.5.4}$$

la quale è un integrale generale in forma implicita della (H.5.1), come si riconosce con facili considerazioni[5].

Esempio 66 Integrare l'equazione

$$y' = (x + y)^2 \tag{H.5.5}$$

✓ la (H.5.5) è del tipo $y' = g(ax + by)$.
Poniamo $x + y = z$, i.e., detto $y(x)$ un integrale della (H.5.5), consideriamo la funzione

$$z(x) = x + y(x).$$

Poichè $y(x)$ soddisfa la (H.5.5), $z(x)$ soddisfa l'equazione che si ottiene dalla (H.5.5), scritta con $y = y(x)$, esprimendo il 1^o e 2^o membro in funzione di $z(x)$.
Per trovare questa equazione osserviamo che si ha:

$$z'(x) = 1 + y'(x),$$

ossia

$$y'(x) = z'(x) - 1.$$

pertanto, poichè risulta $y'(x) = (x + y(x))^2$, risulta anche $z'(x) - 1 = z^2(x)$.
Quindi la funzione $z(x)$ soddisfa l'equazione $z' - 1 = z^2$ ossia l'equazione

$$z' = 1 + z^2 \tag{H.5.6}$$

[4] Risulta infatti essere del tipo

$$z' = u(x)\, v(z)$$

con $u(x) = 1$ e $v(z) = bg(z) + a$.

[5] Perfettamente analoghe a quelle fatte per le equazioni del tipo

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right).$$

L'equazione (H.5.6) è l'equazione trasformata della (H.5.5) mediante la sostituzione $x+y=z$, ed è a variabili separabili.
Separando le variabili si scrive:

$$\frac{dz}{z^2+1} = dx. \tag{H.5.7}$$

La (H.5.7) è equivalente alla (H.5.6) perchè risulta $z^2+1 \neq 0$.
L'equazione (H.5.7) ammette l'integrale generale in forma implicita:

$$\arctan(z) = x + c \tag{H.5.8}$$

ponendo nella (H.5.8), $z = x + y$, si ottiene l'equazione (dipendente dal parametro c)

$$\arctan(x+y) = x + c \tag{H.5.9}$$

la quale è un integrale generale in forma implicita della (H.5.5).
l'equazione (H.5.9) è equivalente alle equazioni $x+y = \tan(x+c)$ e

$$y = \tan(x+c) - x, \tag{H.5.10}$$

purchè si faccia la precisazione che nella equazione (H.5.10) la funzione tangente indica la funzione inversa dell'arcotangente, i.e. la restrizione a $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dell'ordinaria tangente.
La funzione (H.5.10), purchè si faccia la precisazione suddetta, è un integrale generale in forma esplicita dell'equazione (H.5.5). Poichè nel passare dalla (H.5.5) alla (H.5.10) non abbiamo trascurato alcun integrale, la (H.5.10) al variare di c in $\mathbb{R}$, fornisce tutti gl'integrali della (H.5.5), i.e. fornisce l'integrale generale della (H.5.5) inteso come l'insieme di tutti gl'integrali della (H.5.5).

H.6 Equazioni differenziali di ordine superiore al primo mancanti della y.

Consideriamo un'equazione differenziale del 2^o ordine nella quale manchi il simbolo y, i.e. un'equazione del tipo

$$F\left(x, y, y''\right) = 0. \tag{H.6.1}$$

Ponendo $y' = z$, i.e. $y'(x) = z(x)$ dove $y(x)$ è un generico integrale della (H.6.1), l'equazione (H.6.1) si trasforma nell'equazione:

$$F\left(x, z, z'\right) = 0 \tag{H.6.2}$$

che è un'equazione differenziale dl 1^o ordine.
In altri termini, ponendo $y'0z$, si abbassa l'ordine dell'equazione da risolvere.

Supponiamo ora di aver trovato un integrale generale in forma esplicita dell'equazione (H.6.2), i.e. un integrale generale del tipo

$$z = \varphi(x, c_1). \tag{H.6.3}$$

Ponendo nella (H.6.3) $z = y'$, si ottiene l'equazione differenziale, dipendente dal parametro c_1,

$$y' = \varphi(x, c_1). \tag{H.6.4}$$

Si riconosce facilmente che per integrare la (H.6.1) basta integrare l'equazione (H.6.4), nel senso che, se $y(x)$ è una funzione che soddisfa la (H.6.4) per un opportuno valore del parametro c_1, $y(x)$ soddisfa anche la (H.6.1)[6].
l'equazione (H.6.4) si può integrare con un'integrazione indefinita che introduce una nuova costante.
E cioè detta $\Phi(x, c_1)$ una determinazione dell'integrale indefinito di $\varphi(x, c_1)$, la funzione:

$$y = \Phi(x, c_1) + c_2 \tag{H.6.5}$$

fornisce l'integrale generale della (H.6.4) al variare di c_2, e quindi al variare di c_1 e c_2 è un integrale generale in forma esplicita della (H.6.1).

H.6.1 Generalizzazione delle considerazioni fatte.

Più in generale consideriamo un'equazione di ordine $n > 1$ nella quale manchi la y ed eventualmente alcune derivate della y, i.e. un'equazione del tipo:

$$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \quad \text{con } k \geqslant 1 \tag{H.6.6}$$

Ponendo $y^{(k)=z}$, i.e. $y^{(k)}(x) = z(x)$ dove $y(x)$ è un generico integrale della (H.6.6), l'equazione (H.6.6) si trasforma nell'equazione differenziale:

$$F\left(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}\right) = 0. \tag{H.6.7}$$

In altri termini, ponendo $y^{(k)} = z$, si abbassa l'ordine dell'equazione differenziale.
Supponiamo ora di aver trovato un integrale generale in forma esplicita dell'equazione (H.6.7), i.e. un integrale generale del tipo

$$z = \varphi(x, c_1, c_2, \ldots, c_{n-k}) \tag{H.6.8}$$

[6]Infatti, se una funzione $y(x)$ soddisfa la (H.6.4) per qualche valore del parametro c_1, posto $z(x) = y'(x)$, la funzione $z(x)$ soddisfa la (H.6.3) e quindi anche la (H.6.2), pertanto si ha

$$F(x, y'(x), y''(x)) = 0 \qquad \forall x \text{ dell'intervallo di definizione di } y(x);$$

e quindi $y(x)$ soddisfa la (H.6.1).

Ponendo nella (H.6.8) $z = y^{(k)}$ si ottiene l'equazione differenziale di ordine k, dipendente dai parametri $c_1, c_2, \ldots, c_{n-k}$:

$$y^{(k)} = \varphi\left(x, c_1, c_2, \ldots, c_{n-k}\right). \tag{H.6.9}$$

Si riconosce facilmente che per integrare la (H.6.6) basta integrare la (H.6.9), nel senso che, se una funzione $y\left(x\right)$ soddisfa la (H.6.9) per opportuni valori di $c_1, c_2, \ldots, c_{n-k}$, $y\left(x\right)$ soddisfa anche la (H.6.6).
La (H.6.9) si può integrare o eseguendo k integrazioni indefinite successive, ciascuna delle quali introduce una nuova costante, o applicando la formula che fornisce le primitive di ordine superiore di una funzione[7].

[7]Applicando, per esempio, la formula che dà le primitive di ordine k di una funzione, si trova la funzione:

$$y = a_0 + a_1 \frac{(x - x_0)}{1!} + \ldots + a_{k-1} \frac{(x - x_0)^{k-1}}{(k-1)!} + \\ + \int_{x_0}^{x} \varphi\left(t, c_1, \ldots, c_{n-k}\right) \frac{(x - t)^{k-1}}{(k-1)!} dt.$$

Questa funzione fornisce l'integrale generale della (H.6.9) al variare di $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$, e quindi al variare di $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, c_1, c_2, \ldots, c_{n-k}$ è un integrale generale in forma esplicita della (H.6.6).