Capitolo 1

Lo spazio euclideo reale a k dimensioni. Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^k$

1.1 Lo spazio numerico reale a k dimensioni.

Definizione 1 *Sia k un intero positivo. Si chiama* ***spazio numerico reale a k dimensioni*** *l'insieme $\mathbb{R}^k$, e cioè il prodotto cartesiano di k insiemi tutti eguali a $\mathbb{R}$, e cioè l'insieme della k-ple ordinate del tipo $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ con $x_1, x_2, \ldots, x_k$ numeri reali.*
Gli elementi di $\mathbb{R}^k$ si chiamano i ***punti di*** *$\mathbb{R}^k$ e si denotano, in genere, con una lettera maiuscola dell'alfabeto. Dunque:*

$$P \in \mathbb{R}^k \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} P = (x_1, \ldots, x_k) \qquad \text{con } x_i \in \mathbb{R}$$

I numeri reali $x_1, \ldots, x_k$ diconsi ***le coordinate di*** *P: x_1 è la prima coordinata, ..., x_k è la $k-$ma coordinata.*
Il punto $\emptyset = (0, 0, \ldots, 0)$ si chiama ***l'origine*** *di $\mathbb{R}^k$.*

Definizione 2 *Consideriamo due punti di $\mathbb{R}^k$:*

$$A = (a_1, a_2, \ldots, a_k) \qquad \text{e} \qquad B = (b_1, b_2, \ldots, b_k)\,.$$

Si chiama ***distanza euclidea*** *o semplicemente* ***distanza*** *tra A e B, e si denota col simbolo $\overline{AB}$, il numero reale non negativo:*

$$\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \ldots + (b_k - a_k)^2}.$$

L'applicazione che ad ogni coppia associa la sua distanza:

$$(A, B) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to \overline{AB} \in \mathbb{R}_0^+,$$

si chiama ***metrica euclidea in*** $\mathbb{R}^k$ *e si denota, talvolta, col simbolo* d_k. *Quando allo spazio numerico* $\mathbb{R}^k$ *consideriamo associata la metrica ora introdotta, e cioè la metrica euclidea, lo spazio* $\mathbb{R}^k$ *si chiama* ***lo spazio euclideo reale a*** k ***dimensioni***.

Osservazione 1 Si noti che, se consideriamo due punti di $\mathbb{R}^3$, $A = (a_1, a_2, a_3)$ e $B = (b_1, b_2, b_3)$, e se rappresentiamo tali punti nello spazio $(\emptyset, x, y, z)$ (i.e. nello spazio geometrico ordinario in cui sia stato introdotto un riferimento cartesiano ortogonale monometrico), la distanza euclidea tra A e B, ora introdotta, risulta proprio eguale all'ordinaria distanza tra i punti geometrici A e B dello spazio $(\emptyset, x, y, z)$ definita come misura del segmento AB rispetto all'unità di misura del riferimento cartesiano.

La metrica euclidea in $\mathbb{R}^k$ gode delle tre seguenti proprietà:

1. $\overline{AB} = 0 \Leftrightarrow A = B$ (proprietà della coincidenza)
2. $\overline{AB} = \overline{BA}$ (proprietà della simmetria)
3. $\overline{AB} \leqslant \overline{AC} + \overline{CB} \quad \forall A, B, C \in \mathbb{R}^k$ (proprietà triangolare)

Le prime proprietà sono ovvie: la terza verrà dimostrata successivamente.

1.1.1 Rettangoli e cerchi di $\mathbb{R}^k$

Definizione 3 *Consideriamo due punti di* $\mathbb{R}^k$ $A = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ *e* $B = (b_1, b_2, \ldots, b_k)$ *per i quali risulti:*

$$a_1 \leqslant b_1, a_2 \leqslant b_2, \ldots, a_k \leqslant b_k.$$

L'insieme dei punti $P = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ *di* $\mathbb{R}^k$ *per i quali risulta:*

$$a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1, a_2 \leqslant x_2 \leqslant b_2, \ldots, a_k \leqslant x_k \leqslant b_k$$

si chiama il ***rettangolo chiuso****, o l'intervallo chiuso di* $\mathbb{R}^k$ *di estremi* A *e* B*, e si denota talvolta col simbolo* $[A, B]$

In modo ovvio si definiscono poi il rettangolo (o intervallo) aperto, semiaperto a sinistra, semiaperto a destra, di estremi A e B.

Definizione 4 *Considerato uno qualsiasi dei quattro rettangoli di estremi* A *e* B*, il punto* C *di* $\mathbb{R}^k$ *di coordinate*

$$c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}, c_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}, \ldots, c_k = \frac{a_k + b_k}{2}$$

si chiama il ***centro del rettangolo*** *considerato; i numeri*

$$b_1 - a_1, b_2 - a_2, \ldots, b_k - a_k$$

si chiamano le ***dimensioni del rettangolo*** *considerato; i numeri*

$$\delta_1 = \frac{b_1 - a_1}{2}, \delta_2 = \frac{b_2 - a_2}{2}, \ldots, \delta_k = \frac{b_k - a_k}{2}$$

si chiamano le ***semidimensioni del rettangolo*** *considerato.*

Definizione 5 *Consideriamo un punto di $\mathbb{R}^k$ $C = (c_1, c_2, \ldots, c_k)$ e un numero reale $r \geqslant 0$. L'insieme dei punti $P = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ di $\mathbb{R}^k$ per i quali risulta:*

$$\overline{PC} \leqslant r$$

ossia

$$\sqrt{(x_1 - c_1)^2 + \ldots + (x_k - c_k)^2} \leqslant r$$

si chiama il ***cerchio chiuso di $\mathbb{R}^k$ di centro C e raggio r****.*
L'insieme dei punti P di $\mathbb{R}^k$ per i quali risulta $\overline{PC} < r$ si chiama il ***cerchio aperto di $\mathbb{R}^k$ di centro C e raggio r****.*

Definizione 6 *Per $r > 0$ i punti P di $\mathbb{R}^k$ tale che*

$$\overline{PC} > r$$

diconsi ***esterni al cerchio****, aperto o chiuso, di centro C e raggio r.*

Osservazione 2 Se $r = 0$ il cerchio aperto è vuoto, quello chiuso si riduce al solo punto P

Teorema 1.1 *Sia $P_0 = \left(x_1^0, \ldots, x_k^0\right) \in \mathbb{R}^k$. Ogni cerchio aperto di centro P_0 contiene un rettangolo aperto di centro P_0. Ogni rettangolo aperto di centro P_0 contiene un cerchio aperto di centro P_0.*

Dimostrazione — Se I è un cerchio aperto di centro P_0 e raggio $\delta > 0$, il rettangolo aperto di centro P_0:

$$J = \left]x_1^0 - \frac{\delta}{\sqrt{k}}, x_1^0 + \frac{\delta}{\sqrt{k}}\right[\times \ldots \times \left]x_k^0 - \frac{\delta}{\sqrt{k}}, x_k^0 + \frac{\delta}{\sqrt{k}}\right[$$

è contenuto in I, giacché:

$$P = (x_1, \ldots, x_k) \in J \Leftrightarrow x_i \in \left]x_i^0 - \frac{\delta}{\sqrt{k}}, x_i^0 + \frac{\delta}{\sqrt{k}}\right[\qquad \forall i \in \{1, \ldots, k\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|x_i - x_i^0\right| < \frac{\delta}{\sqrt{k}} \qquad \forall i \in \{1, \ldots, k\} \Rightarrow \overline{PP}_0 = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \left(x_i - x_i^0\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \left|x_i - x_i^0\right|^2} < \delta \Rightarrow P \in I$$

Viceversa se

$$J = \left]x_1^0 - \delta_1, x_1^0 + \delta_1\right[\times \ldots \times \left]x_k^0 - \delta_k, x_k^0 + \delta_k\right[$$

con $\delta > 0$ è un rettangolo aperto di centro P_0, posto

$$\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_k\},$$

il cerchio aperto I di centro P_0 e raggio δ è incluso in J in quanto:

$$P = (x_1, \ldots, x_k) \in I \Leftrightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \left(x_i - x_i^0\right)^2} < \delta \Rightarrow \left|x_i - x_i^0\right| < \delta \leqslant \delta_i$$
$$\forall i \in \{1, \ldots, k\} \Leftrightarrow P \in J$$

□

1.2 Elementi di topologia in $\mathbb{R}^k$

La topologia è la parte dell'analisi in cui s'introduce il concetto d'intorno.

Definizione 7 *Consideriamo un punto $P_0 \in \mathbb{R}^k$.*
Si chiama ***intorno rettangolare di*** *P_0 ogni rettangolo* ***aperto*** *e non vuoto di centro P_0; si chiama* ***intorno circolare di*** *P_0 ogni cerchio* ***aperto*** *e non vuoto di centro P_0.*
Più in generale si chiama ***intorno di*** *P_0 un qualsiasi sottoinsieme di $\mathbb{R}^k$ che contenga un intorno rettangolare o circolare di P_0*

In base al teorema 1.1 ogni intorno circolare P_0 contiene un intorno rettangolare di P_0 e viceversa.
Evidentemente l'intersezione di un numero finito di intorni circolari [rettangolari] di P_0 è un intorno circolare [rettangolare] di P_0.

Teorema 1.2 *Se P e Q sono punti distinti di $\mathbb{R}^k$, allora esistono un intorno di P ed un intorno di Q disgiunti.*

Dimostrazione — Essendo $P \neq Q$, si ha:

$$\delta = \overline{PQ} > 0.$$

Preso un numero positivo ε tale che sia $\varepsilon < \frac{\delta}{2}$, proviamo che i due intorni, I e J, di raggio ε rispettivamente di P e di Q sono disgiunti.
Se, per assurdo, fosse:

$$I \cap J \neq \emptyset,$$

preso un punto $T \in I \cap J$, si avrebbe:

$$\overline{PQ} \leqslant \overline{PT} + \overline{TQ} < 2\varepsilon < \delta$$

il che è assurdo. □

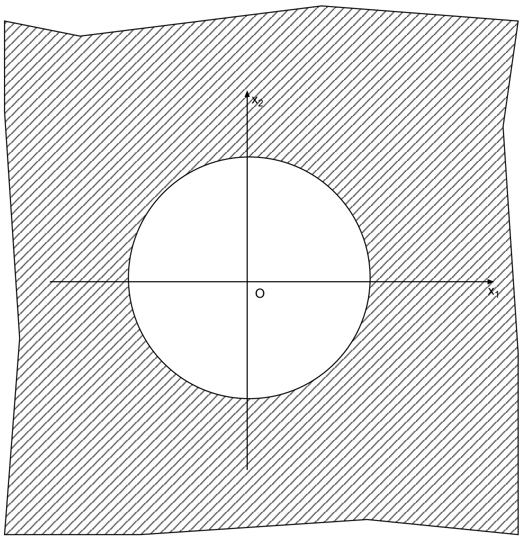
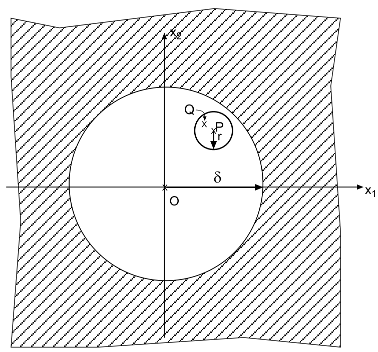


Figura 1.1: Rappresentazione grafica dell'intorno del punto all'infinito.

Definizione 8 *Si chiama* ***intorno del punto all'infinito di*** $\mathbb{R}^k$ *ogni sottoinsieme di* $\mathbb{R}^k$ *che contenga i punti esterni a qualunque cerchio di centro l'origine e raggio positivo.*

Definizione 9 *Un sottoinsieme* X *di* $\mathbb{R}^k$ *si dice limitato se esiste un rettangolo o, ciò che è lo stesso, un cerchio che lo contiene.*



Da notare che, detto P un punto di $\mathbb{R}^k$, esistono un intorno I di P ed un intorno J del punto all'infinito disgiunti. Infatti, detto δ un numero positivo maggiore della distanza di P dall'origine ed indicato con r un numero positivo minore di

$$\delta - \overline{PO}$$

il cerchio aperto I di centro P e raggio r e l'estreno J del cerchio chiuso di centro l'origine e raggio δ sono disgiunti giacché:

$$Q \in I \Rightarrow \overline{QO} \leqslant \overline{QP} + \overline{PO} < r + \overline{PO} < \delta - \overline{PO} + \overline{PO} = \delta$$

di contro i punti di J sono caratterizzati tutti da avere una distanza da O maggiore di δ; resta così dimostrato quanto detto.
Consideriamo, ora, un insieme $X \subseteq \mathbb{R}^k$.

Definizione 10 *Un punto P_0 di $\mathbb{R}^k$ si dice **interno** a X quando esiste un intorno di P_0 tutto contenuto in X.*
*L'insieme dei punti interni a X si chiama **l'interno** di X e si denota col simbolo $\overset{o}{X}$*

Definizione 11 *Un punto P_0 di $\mathbb{R}^k$ si dice **esterno** ad X quando esiste un intorno di P_0 che non ha punti comuni con X, i.e. quando un intorno di P_0 e X sono disgiunti.*
*L'insieme dei punti esterni a X dicesi **l'esterno** di X.*

Definizione 12 *Un punto di $\mathbb{R}^k$ dicesi di **frontiera** per X quando non è né interno, né esterno a X, i.e. quando in ogni intorno di P_0 cadono sia punti di X sia punti che non appartengono a X (punti del complementare CX di X).*
*L'insieme dei punti di frontiera per X si chiama **la frontiera** di X e si denota con uno dei simboli:*

$$FX, F_rX, \partial X, F\left(X\right), F_r\left(X\right), \partial\left(X\right)$$

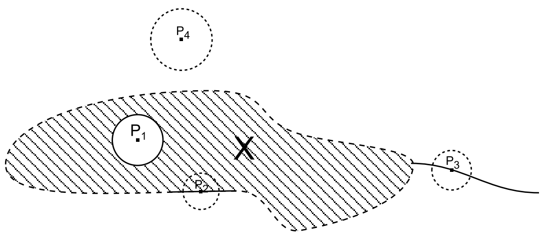


Figura 1.2: Diversi tipi di punti di $\mathbb{R}^k$. P_1 è interno a X. P_2 e P_3 sono punti frontiera di X. P_4 è esterno a X.

Osservazione 3 Un punto interno ad X è necessariamente un punto di X, ma un punto di X può non essere interno; un punto esterno ad X non può essere un punto di X, ma un punto del complementare di X può non essere esterno.

Esempio 1 Sulla retta numerica reale euclidea $\mathbb{R}$ consideriamo il sottoinsieme:

$$T = \{x : 1 \leqslant x \leqslant 3\}.$$

Si vede che i punti di questo insieme diversi da 1 e 3 sono punti interni a T; i punti del complementare di T, rispetto a $\mathbb{R}$, sono punti esterni a T; i punti 1 e 3 sono di frontiera per T. La frontiera di T è quindi costituita dai due punti 1 e 3, che appartengono a T.

Esempio 2 Consideriamo in $\mathbb{R}$ il sottoinsieme:

$$T = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

essendo $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.
Si vede che tutti i punti di T sono punti frontiera; lo zero è pure punto di frontiera, e non appartiene a T; tutti gli altri punti di $\mathbb{R}$ sono esterni a T. La frontiera di T è costituita da T stesso e dal punto zero.
Questo esempio mostra che un punto può appartenere, o non appartenere, all'insieme T.

Esempio 3 Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$, consideriamo il sottoinsieme:

$$T = \left\{ (x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 25 \right\}$$

I punti le cui coordinate (x, y) soddisfano alla condizione:

$$x^2 + y^2 = 25$$

sono di frontiera, mentre quelli che soddisfano alla condizione:

$$x^2 + y^2 < 25$$

sono interni a T. Tutti gli altri punti di $\mathbb{R}^2$ sono esterni a T.
La frontiera di T è costituita da tutti i punti le cui coordinate soddisfano l'equazione

$$x^2 + y^2 = 25.$$

Definizione 13 *un sottoinsieme $X \neq \emptyset$ di $\mathbb{R}^k$ si dice* ***aperto*** *se coincide con il proprio interno, i.e. se non contiene alcun punto frontiera. Alternativamente: l'insieme X se diverso dal vuoto, si dice aperto quando, comunque si considera un suo punto, esiste un intorno di tale punto tutto contenuto in X, e cioè quando:*

$$\forall P_0 \in X \exists I\,(P_0) \subseteq X.$$

Se risulta $X = \emptyset$, l'insieme X si considera aperto per convenzione.

E' facile stabilire che l'interno di un insieme, se non vuoto, è un insieme aperto.

1.3 Punti di accumulazione. Insiemi chiusi, insiemi compatti.

Sia X un sottoinsieme di $\mathbb{R}^k$.

Definizione 14 *Un punto $P_0 \in \mathbb{R}^k$ dicesi* ***di accumulazione in*** *X se ad ogni suo intorno appartiene almeno un punto di X distinto da P_0*

Dunque un punto di accumulazione per X può appartenere o no ad X. Se $x \notin X$ allora x è di accumulazione per X se e solo se appartiene a ∂X.

Teorema 1.3 *Se P_0 è di accumulazione per X, ad ogni suo intorno appartengono infiniti punti di X*

Dimostrazione — Sia I_1 un cerchio aperto di centro P_0 e raggio $\delta_1 > 0$. Poichè P_0 è di accumulazione per X, ad I_1 appartiene almeno un punto di X distinto da P_0, diciamolo P_1. Posto $\delta_2 = \overline{P_0P_1}$ ed indicato con I_2 il cerchio aperto di centro P_0 e raggio δ_2, ad I_2 appartiene almeno un punto di X distinto da P_0. Così procedendo, resta individuata una successione invertibile $\{P_n\}$ di punti $X - \{P_0\}$ che appartengono tutti ad I_1.

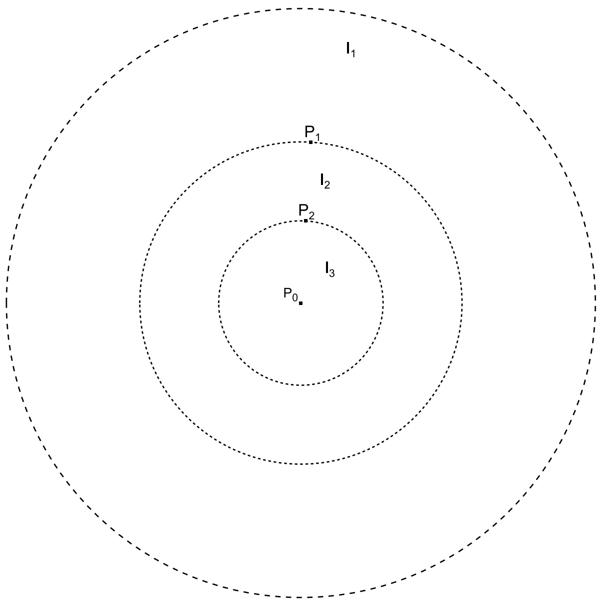


Figura 1.3: P_0 è un punto di accumulazione per X.

Nota: Il teorema può dimostrarsi anche nel modo che si fa seguire. Sia I un intorno del punto di accumulazione P_0 di X. Supponiamo che in tale intorno cadono un numero finito di punti di X distinti da P_0 stesso. Allora in ogni intorno circolare di P_0 di raggio minore alla più piccola distanza dei punti stessi da P_0, non sarebbe contenuto alcun punto di X diverso da P_0, il quale non sarebbe quindi un punto di accumulazione. □

Dal teorema 1.3 si deduce che un sottoinsieme di $\mathbb{R}^k$, che abbia un punto di $\mathbb{R}^k$ come punto di accumulazione, è infinito. Avvertiamo che non vale il viceversa. Sussiste al proposito il

Teorema 1.4 (di Bolzano-Weiestrass) *Ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}^k$, infinito e limitato, ammette almeno un punto di $\mathbb{R}^k$ come punto di accumulazione.*

Dimostrazione — Omessa. □

Definizione 15 *Sia X un sottoinsieme di $\mathbb{R}^k$. Si dice che il punto all'infinito è di **accumulazione per** X se ad ogni suo intorno appartiene almeno un punto di X.*

Da notare che:

$$\text{(il punto all'infinito è di accumulazione per } X) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$$
$$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \left(\forall \delta > 0, \exists P \in X : \overline{PO} > \delta\right) \Leftrightarrow (X \text{ illimitato})$$

Tenendo conto del teorema 1.3 e delle definizioni 14 e 15 è lecito dare la seguente:

Definizione 16 *Un punto P_0 al finito o all'infinito per $\mathbb{R}^k$ si dice **punto d'accumulazione** per l'insieme X quando in ogni intorno di P_0 si accumulano (e cioè esistono) infiniti punti di X.*

Definizione 17 *Si chiama **derivato** di X e si denota con uno dei simboli*

$$DX, D_rX, D\,(X)\,, D_r\,(X)\,,$$

*l'insieme dei punti d'accumulazione **al finito** per X.*

Definizione 18 *Si chiama **chiusura di** X l'unione di X col proprio derivato, i.e. è l'insieme dei punti che sono o di X o d'accumulazione al finito per X. La chiusura di X viene indicata con*

$$\overline{X}$$

Definizione 19 *Si dice che X è **chiuso** se coincide con la propria chiusura, i.e. se contiene il proprio derivato.*

Definizione 20 *Si dice che X è **compatto** se è chiuso e limitato.*

Definizione 21 *Un punto P_0 di $\mathbb{R}^k$ si dice* ***punto isolato di*** *X quando appartiene a X e non è d'accumulazione per X.*

Consideriamo ad esempio il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ dato da

$$A = [0,1[\cup \{2\} ,$$

il punto 2 è un punto isolato di A, il punto 1 non appartiene ad A, ma è di accumulazione per A e i punti di $[0,1[$ sono punti di A e di accumulazione per A. Dimostriamo ora che:

Teorema 1.5 *Se X è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^k$, il derivato, la frontiera, e la chiusura di X sono insiemi chiusi.*

Dimostrazione — Sia P un punto di accumulazione di DX. In ogni suo intorno I cade almeno un punto Q di DX distinto da P; poichè I è anche un intorno di Q, in I cadono infiniti punti di X e quindi P appartiene a DX. Ciò prova che DX è chiuso.
Sia ora P un punto di accumulazione di FX. In ogni suo intorno cade almeno un punto Q di FX distinto da P: poichè I è anche un intorno di Q in esso cadono sia punti di X che punti di CX. Ne segue che P appartiene a FX e quindi che FX è chiuso.
Sia ora P un punto di accumulazione di $\overline{X}$. Poichè $\overline{X} = X \cup DX$ il punto P dev'essere di accumulazione o per X o per DX altrimenti, in contraddizione con l'ipotesi, esisterebbe un intorno circolare di P in cui non cadrebbero né punti di X né punti di DX distinti da P e quindi neppure punti di $\overline{X}$, distinti da P. Ciò prova che P appartiene a $\overline{X}$ e quindi $\overline{X}$, contenendo i suoi punti di accumulazione, è chiuso. □

Valgono le seguenti proprietà:

- $\overset{o}{X} \subseteq X \subseteq \overline{X}$
- $\overset{o}{X} = \overline{X} - \partial X$
- $\overline{X} = \overset{o}{X} \cup \partial X$

Si verifica facilmente che:

— Se $\mathcal{F}$ è una famiglia di insiemi aperti, l'unione:

$$\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$$

è un insieme aperto.

— Se $A_1, \ldots, A_n$ sono insieme aperti, l'intersezione:

$$\bigcap_{i=1,\ldots,n} A_i$$

è un insieme aperto.

— Se $\mathcal{F}$ è una famiglia d'insieme chiusi, l'intersezione:

$$\bigcap_{C\in\mathcal{F}} C$$

è un insieme chiuso.

— Se $C_1, \ldots, C_n$ sono insiemi chiusi, l'unione:

$$\bigcup_{i=1,\ldots,n} C_i$$

è un insieme chiuso.

Vale, infatti, il seguente:

Teorema 1.6 *L'unione di una famiglia qualunque di aperti è un aperto e l'intersezione di una famiglia finita di aperti è un aperto.*
L'intersezione di una famiglia qualunque di chiusi è un chiuso e l'unione di una famiglia finita di chiusi è un chiuso.

Dimostrazione — Siano $\{A_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ una famiglia di aperti e A l'unione di tale famiglia. Se $x \in A$, possiamo fissare $i^* \in \mathcal{I}$ tale che $x \in A_{i^*}$. Siccome A_{i^*} è aperto esiste $r > 0$ tale che $I_r(x) \subseteq A_{i^*}$. Segue $I_r(x) \subseteq A$.
Siano ora $\{A_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ una famiglia di aperti e A l'intersezione di tale famiglia. Se $x \in A$, abbiamo $x \in A_i$ per ogni i. Siccome ciascuno degli A_i è aperto, per ogni i esiste $r_i > 0$ tale che $I_{r_i}(x) \subseteq A_i$. Detto r il minimo degli r_i, che esiste perchè l'insieme degli indici è finito, segue che l'intorno $I_r(x)$ è incluso in tutti gli A_i e quindi è anche in A.
Le affermazioni sui chiusi seguono allora facilmente dalle proprietà degli aperti, se teniamo conto della proposizione 1 che successivamente dimostreremo. Infatti, se tutti gli insiemi C_i di una famiglia qualunque sono chiusi, i rispettivi complementari A_i sono aperti e quindi anche l'unione di tali aperti è un aperto. Ma l'intersezione dei C_i è il complementare dell'unione degli A_i, che dunque è chiuso.
Infine, se tutti gli insiemi C_i di una famiglia finita sono chiusi, i rispettivi complementari A_i sono aperti e quindi anche l'intersezione di tali aperti è un aperto. Ma l'unione dei C_i è il complementare dell'intersezione degli A_i, che dunque è chiuso. □

Osservazione 4 L'unione d'infiniti aperti è ancora un aperto. L'intersezione d'infiniti chiusi è ancora un chiuso.
L'unione d'infiniti chiusi può essere un aperto, infatti, ad esempio:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right] = \left]-1,1\right[$$

L'intersezione di infiniti aperti può essere un chiuso:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left]-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right[= [-1,1]$$

Se X è chiuso, il complementare di X, e cioè $\mathbb{R}^k - X$, è aperto; se X è aperto, il complementare di X è chiuso. Vale, infatti, la seguente:

Proposizione 1 *Un insieme è aperto se e solo se il suo complementare è chiuso.*

Dimostrazione — Supponiamo che X sia aperto e dimostriamo che CX è chiuso provando che un punto non appartenente a CX non può essere punto di accumulazione per CX. Sia dunque x un punto non appartenente a CX. Dunque $x \in X$ e quindi, essendo X aperto, esiste $r > 0$ tale che il cerchio di raggio r e centro x, $I_r(x)$, sia tale che:

$$I_r(x) \subseteq X$$

Allora $I_r(x)$ non contiene punti di CX e x non è di accumulazione per CX. Viceversa supponiamo che CX sia chiuso e dimostriamo che X è aperto. Sia dunque $x \in X$. Siccome $x \notin CX$ e CX è chiuso, x non è di accumulazione per CX e quindi esiste un $r > 0$ tale che un intorno di x di raggio r, diciamolo $I_r(x)$, non contenga punti di CX distinti da x. Siccome nemmeno x appartiene a CX, l'intorno considerato non contiene punti di CX, i.e. è incluso in X $\square$

Si osservi che l'intero spazio $\mathbb{R}^k$ è aperto e chiuso contemporaneamente e che, per la proposizione precedentemente dimostrata, anche l'insieme vuoto, $\emptyset$, è aperto e chiuso contemporaneamente.

1.4 Insieme connessi

Sia X un sottoinsieme di $\mathbb{R}^k$.

Definizione 22 *Una parte X_1 di X, propria ($\subset X$) e non vuota, si dice* ***staccata*** *se esistono due aperti A_1 e A_2 tali che:*

$$X_1 \subseteq A_1, \quad X - X_1 \subseteq A_2, \quad A_1 \cap A_2 = \emptyset$$

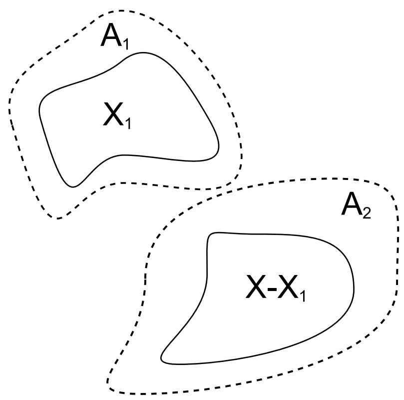


Figura 1.4: Una parte X_1 di X staccata.

Una definizione **non rigorosa** dell'insieme connesso può essere la seguente: un sottoinsieme X di $\mathbb{R}^k$ si dice connesso quando è a un solo pezzo.

Esempio 4 L'insieme $X' = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}$ è un connesso di $\mathbb{R}^2$
L'insieme $X'' = [2, 3] \times \{0\}$ è un connesso di $\mathbb{R}^2$
L'insieme $X = X' \cup X''$ non è un connesso di $\mathbb{R}^2$.

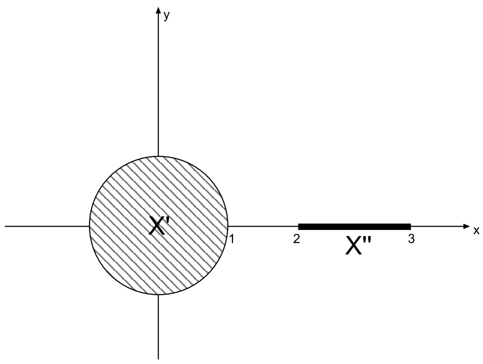


Figura 1.5: Esempi di insiemi connessi.

Definizione 23 *Si dice che X è **connesso** se è privo di parti staccate.*

Si dimostra che i sottoinsiemi connessi di $\mathbb{R}$ sono tutti e soli gli intervalli.

1.5 Domini

Definizione 24 *Un sottoinsieme D di $\mathbb{R}^k$ dicesi* ***un dominio*** *se è chiuso e se ogni punto della frontiera di D è di accumulazione per l'interno di D.*

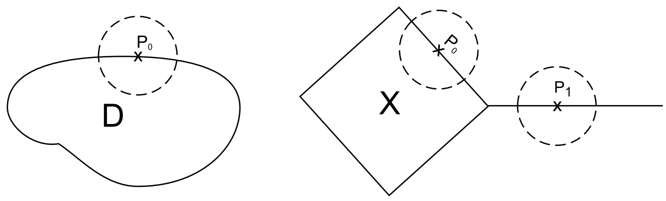


Figura 1.6: D è un dominio mentre X non è un dominio.

Definizione 25 *Un dominio D di $\mathbb{R}^k$ si dice* ***internamente connesso*** *quando il suo interno $\overset{o}{D}$ è connesso.*

Si dimostra che vale la seguente implicazione:

$$(D \text{ internamente connesso}) \Rightarrow (D \text{ connesso})$$

Si noti che questa implicazione **non** s'inverte, i.e.:

$$(D \text{ internamente connesso}) \not\Leftarrow (D \text{ connesso})$$

Infatti l'unione di due cerchi chiusi di $\mathbb{R}^2$ tangenti esternamente è un dominio connesso di $\mathbb{R}^2$, ma non è un dominio internamente connesso di $\mathbb{R}^2$.

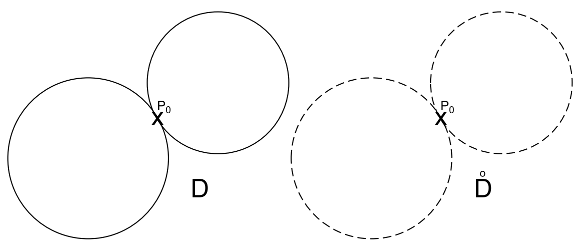


Figura 1.7: D è connesso, mentre $\overset{o}{D}$ non è connesso.

1.6 Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^k$

1.6.1 Definizione. Generalità

Definizione 26 *Si chiamano* ***vettori numerici*** *di $\mathbb{R}^k$ o, più semplicemente,* ***vettori****, i punti di $\mathbb{R}^k$ quando a $\mathbb{R}^k$ si considerano associate le operazioni di addizione e di moltiplicazione per uno scalare reale definite come segue ($\forall\,(u_1,\ldots,u_k)$ e $(v_1,\ldots,v_k)\in\mathbb{R}^k, \forall\lambda\in\mathbb{R}$):*

$$(u_1,\ldots,u_k)+(v_1,\ldots,v_k)=(u_1+v_1,\ldots,u_k+v_k)$$

$$\lambda\,(u_1,\ldots,u_k)=(\lambda u_1,\ldots,\lambda u_k)$$

La parola **vettori** è suggerita dal fatto, di facile verifica, che l'insieme $\mathbb{R}^k$ con le operazioni introdotte risulta essere uno spazio vettoriale del campo reale e dal fatto che gli elementi di uno spazio vettoriale si chiamano vettori.

Definizione 27 *Si chiamano* ***componenti*** *di un vettore numerico di $\mathbb{R}^k$ $(v_1,v_2,\ldots,v_k)$ le coordinate del punto $(v_1,v_2,\ldots,v_k)$ e cioè i numeri $v_1,\ldots,v_k$.*

Un vettore numerico di $\mathbb{R}^k$ si denota, in genere, con la stessa lettera minuscola che ne denota le componenti sottolineata o sopralineata, o sormontata da una freccia o scritta in grassetto.
Per denotare, ad esempio, il vettore numerico $(v_1,\ldots,v_k)$ si usano i simboli:

$$\underline{v},\overline{v},\overrightarrow{v},\mathbf{v}.$$

Quindi scriveremo:

$$\mathbf{u}\in\mathbb{R}^k \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} u=(u_1,\ldots,u_k)\quad \text{con } u_i\in\mathbb{R}\quad \forall i\in\{1,\ldots,k\}$$

Rileviamo esplicitamente che il vettore nullo di $\mathbb{R}^k$ è $\mathbf{0}=(0,\ldots,0)$ e che l'opposto $-\mathbf{u}$ di un vettore $\mathbf{u}=(u_1,\ldots,u_k)$ è la $k-$pla

$$(-u_1,\ldots,-u_k)\,.$$

Definizione 28 *Se $\mathbf{u}=(u_1,\ldots,u_k)$ è un vettore di $\mathbb{R}^k$, si chiama* ***modulo*** *di $\mathbf{u}$ e si indica con $|\mathbf{u}|$, il numero, non negativo:*

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}u_i^2}$$

Evidentemente

$$|\mathbf{u}|=0\Leftrightarrow u=0,\quad \forall\lambda\in\mathbb{R},\forall\mathbf{u}\in\mathbb{R}^k,|\lambda\mathbf{u}|=|\lambda|\,|\mathbf{u}|\,.$$

Definizione 29 *I vettori di $\mathbb{R}^k$ aventi modulo unitario si chiamano* ***versori****.*

Posto

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)\,, \mathbf{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0)\,, \ldots, \mathbf{e}_k = (0, 0, \ldots, 1)\,,$$

il sistema di versori

$$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_k\} \tag{1.6.1}$$

è una **base** di $\mathbb{R}^k$.
Infatti detti versori sono linearmente indipendenti giacché

$$\begin{aligned}
&\lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2 + \ldots + \lambda_k\mathbf{e}_k = \mathbf{0} \Leftrightarrow \\
&\quad \Leftrightarrow (\lambda_1, 0, \ldots, 0) + (0, \lambda_2, \ldots, 0) + \ldots + (0, 0, \ldots, \lambda_n) = (0, 0, \ldots, 0) \Leftrightarrow \\
&\quad \Leftrightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) = (0, 0, \ldots, 0) \Leftrightarrow \lambda_i = 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots k\}\,;
\end{aligned}$$

inoltre, se $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_k)$ è un arbitrario vettore di $\mathbb{R}^k$, si ha:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= (u_1, \ldots, u_k) = (u_1, 0, \ldots, 0) + (0, u_2, \ldots, 0) + \ldots + (0, 0, \ldots, u_k) = \\
&= u_1\,(1, 0, \ldots, 0) + u_2\,(0, 1, \ldots, 0) + \ldots + u_k\,(0, 0, \ldots, 1) = \\
&= u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + \ldots + u_k\mathbf{e}_k
\end{aligned} \tag{1.6.2}$$

Il sistema (1.6.1) è noto come **base canonica** (o naturale) di $\mathbb{R}^k$. La (1.6.2) ci dice che $u_1, \ldots, u_k$ sono le componenti di $\mathbf{u}$ rispetto alla base naturale.

1.6.2 Rappresentazione geometrica dei vettori di $\mathbb{R}^1$,$\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

Sia x un asse (i.e. una retta orientata) di versore $\mathbf{i}$. L'applicazione

$$\mathbf{u} = (u) \in \mathbb{R}^1 \to u\mathbf{i}$$

è un isomorfismo isometrico (i.e. che conserva i moduli) di $\mathbb{R}^1$ nello spazio vettoriale V_1 dei vettori geometrici dell'asse in questione. Per tale ragione suol dirsi che lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^1$ è rappresentato geometricamente da V_1. Per ogni $\mathbf{u} = u \in \mathbb{R}^1$ il vettore $u\mathbf{i}$ dicesi **l'immagine geometrica di u**. Siano x e y [x, y e z] assi di un piano [dello spazio] ortogonali [a due a due ortogonali]. Denotiamo con $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ [$\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$] i versori degli assi x e y [x, y e z] e con V_2 [V_3] lo spazio vettoriale dei vettori geometrici (classe di vettori equipollenti) del piano in questione [dello spazio]. L'applicazione

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \to u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$$

$$\left[\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 \to u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}\right]$$

è un isomorfismo isometrico di $\mathbb{R}^2$ su V_2 [$\mathbb{R}^3$ su V_3]. Per tale ragione suol dirsi che lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ [$\mathbb{R}^3$] è rappresentato geometricamente da V_2 [V_3]. Per ogni $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ [$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$] il vettore $u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ [$u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$] dicesi **l'immagine geometrica** di $\mathbf{u}$. In seguito i vettori di $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ verranno identificati con le loro immagini geometriche.

1.6.3 Rappresentazione vettoriale dei punti di $\mathbb{R}^k$

Siano $P' = (x_1', x_2', \dots, x_k')$ e $P'' = (x_1'', x_2'', \dots, x_k'')$ punti di $\mathbb{R}^k$. La scrittura:

$$P'' - P'$$

sta ad indicare il vettore di $\mathbb{R}^k$:

$$\left(x_1'' - x_1', \dots, x_k'' - x_k'\right)$$

Rileviamo esplicitamente che $|P'' - P'| = \overline{P'P''}$.
Siano $P_0 = \left(x_1^0, \dots, x_k^0\right)$ un punto di $\mathbb{R}^k$ e $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_k)$ un vettore di $\mathbb{R}^k$. La scrittura

$$P_0 + \mathbf{u}$$

sta ad indicare il punto $p = (x_1, \dots, x_k)$ di $\mathbb{R}^k$ tale che:

$$p - P_0 = \mathbf{u}$$

ovvero

$$\begin{cases} x_1 & = & x_1^0 + u_1 \\ \vdots & & \\ x_k & = & x_0^k + u_k \end{cases}$$

Sia $P = (x_1, \dots, x_k)$ un punto di $\mathbb{R}^k$. Poichè

$$P - O = (x_1, \dots, x_k) = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_k\mathbf{e}_k,$$

si ha:

$$P = O + x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_k\mathbf{e}_k \tag{1.6.3}$$

Il secondo membro della (1.6.3) dicesi **rappresentazione vettoriale** del punto P.

1.6.4 Rette, segmenti e poligoni di $\mathbb{R}^k$. Caratterizzazione degli aperti connessi di $\mathbb{R}^k$.

Siano $A = (a_1, \dots, a_k)$ e $B = (b_1, \dots, b_k)$ punti distinti di $\mathbb{R}^k$. L'insieme costituito dai punti

$$P = (x_1, \dots, x_k)$$

di $\mathbb{R}^k$ tali che:

$$P = A + t\,(B - A) \qquad \text{per } t \in \mathbb{R} \tag{1.6.4}$$

ovvero

$$\begin{cases} x_1 & = & a_1 + t\,(b_1 - a_1) \\ \vdots & & \\ x_k & = & a_k + t\,(b_k - a_k) \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R} \tag{1.6.5}$$

dicesi **la retta** di $\mathbb{R}^k$ passante per i punti A (che si ottiene per $t = 0$) e B (che si ottiene per $t = 1$). L'equazione (1.6.4) e le equazioni (1.6.5) diconsi rispettivamente **l'equazione vettoriale** e **l'equazioni parametriche** della retta in questione.

L'insieme costituito dai punti $P = (x_1, \ldots, x_k)$ di $\mathbb{R}^k$ tali che:

$$P = A + t\,(B - A) \qquad \text{per } t \in [0, 1] \tag{1.6.6}$$

ovvero

$$\begin{cases} x_1 &= a_1 + t\,(b_1 - a_1) \\ \vdots & \\ x_k &= a_k + t\,(b_k - a_k) \end{cases} \qquad t \in [0, 1] \tag{1.6.7}$$

dicesi **il segmento di** $\mathbb{R}^k$ **di estremi** A **e** B e viene indicato con AB. I punti di AB distinti da A e da B si dicono **interni al segmento**. SI chiama **lunghezza** del segmento AB la distanza di A e B, ovvero il modulo del vettore $B - A$.
Sia $(P_1, \ldots, P_n)$ una $n-$pla ordinata di punti di $\mathbb{R}^k$ ciascuno distinto dal successivo. L'unione Π dei segmenti

$$P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_{n-1}P_n \tag{1.6.8}$$

si chiama **poligonale di** $\mathbb{R}^k$ **di vertici** $P_1, \ldots, P_n$. I segmenti (1.6.8) si dicono **lati** della poligonale.
La poligonale Π si dice **semplice** se sono soddisfatte le condizioni seguenti:

— due lati distinti di Π o sono disgiunti oppure hanno in comune un vertice.

— ogni vertice di Π appartiene al più a due lati disgiunti.

La poligonale Π si dice **aperta** se è semplice ed inoltre $P_1 \neq P_n$. In tal caso P_1 e P_n si chiamano **estremi della poligonale** e si dice anche che Π **congiunge** P_1 e P_n.
La poligonale Π si dice **chiusa** se è semplice ed inoltre $P_1 = P_n$. Le poligonali non semplici si dicono **intrecciate.**

Teorema 1.7 *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^k$. Le affermazioni seguenti sono equivalenti:*

1. *Ω è un connesso,*

2. *se P e Q sono punti qualsiasi di Ω distinti esiste una poligonale aperta inclusa in Ω di estremi P e Q.*

Dimostrazione — Omessa. □

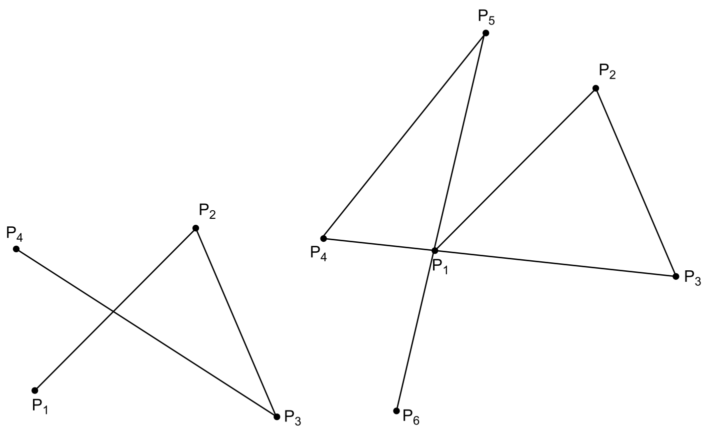


Figura 1.8: Poligonali intrecciate

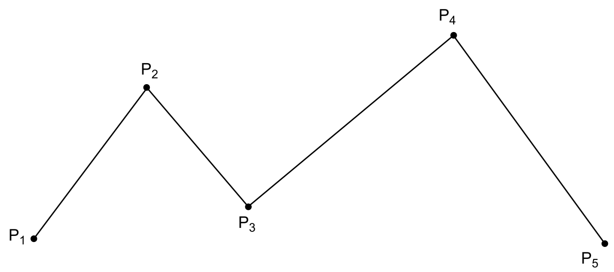


Figura 1.9: Poligonale aperta

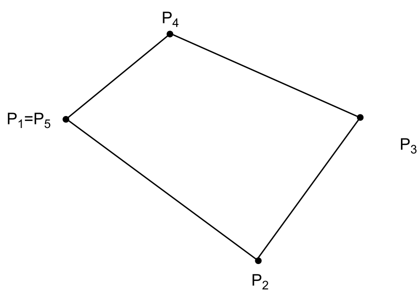


Figura 1.10: Poligonale chiusa

1.6.5 Prodotto scalare

Siano $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_k)$ e $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_k)$ vettori di $\mathbb{R}^k$.

Definizione 30 *Si chiama* ***prodotto scalare di*** *u* ***e*** *v, e si indica con $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ oppure con $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ ($\mathbf{u}$ scalare $\mathbf{v}$), il numero reale:*

$$u_1 v_1 + \ldots + u_k v_k$$

Evidentemente:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}, \quad \lambda (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \lambda \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \lambda \mathbf{v}$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2, \quad (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$$

Teorema 1.8 *Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono vettori di $\mathbb{R}^k$, si ha:*

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leqslant |\mathbf{u}| \, |\mathbf{v}| \quad (\textit{disuguaglianza di Schwarz}) \tag{1.6.9}$$

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leqslant |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}| \tag{1.6.10}$$

valendo l'uguaglianza se e solo se o uno dei due vettori è nullo oppure i due vettori sono proporzionali.

Dimostrazione — La (1.6.9) è vera se uno dei due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è nullo. In caso contrario, osservato che

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, 0 \leqslant |\mathbf{u} - \lambda \mathbf{v}|^2 = (\mathbf{u} - \lambda \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \lambda \mathbf{v}) = |\mathbf{u}|^2 - 2\lambda (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \lambda^2 |\mathbf{v}|^2,$$

e quindi risulta:

$$|\mathbf{u}|^2 - 2\lambda (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \lambda^2 |\mathbf{v}|^2 \geqslant 0 \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Il primo membro è un trinomio quadratico in λ che non assume valori negativi, e quindi il suo discriminante è non positivo. Si ha cioè:

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 - |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 \leqslant 0,$$

quindi è:

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \leqslant |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2$$

da cui la (1.6.9).
Circa la (1.6.10), tenendo presente la già acquisita (1.6.9), si ha:

$$\begin{aligned} |\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 &= (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = |\mathbf{u}|^2 + 2 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + |\mathbf{v}|^2 \leqslant \\ &\leqslant |\mathbf{u}|^2 + 2 |\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| + |\mathbf{v}|^2 \leqslant |\mathbf{u}|^2 + 2 |\mathbf{u}| \, |\mathbf{v}| + |\mathbf{v}|^2 = \\ &= (|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|)^2 \end{aligned}$$

da cui la (1.6.10). $\square$

Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono vettori non nulli di $\mathbb{R}^k$, la (1.6.9) implica che

$$-1 \leqslant (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})/|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \leqslant 1$$

e quindi esiste $\vartheta \in [0, \pi]$ tali che

$$\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|} = \cos\vartheta$$

ovvero $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \cos\vartheta$. Il numero reale ϑ dicesi **l'angolo (convesso)** dei vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Se uno dei vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è nullo per angolo (convesso) di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ s'intende lo 0. Due vettori di $\mathbb{R}^k$ si dicono **ortogonali** se il loro prodotto scalare è nullo. Due vettori di $\mathbb{R}^k$ $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ si dicono **paralleli** se esiste un numero reale ρ tale che $\mathbf{u} = \rho\mathbf{v}$.

Osservazione 5 Siano $A = (a_1, \ldots, a_k)$, $B = (b_1, \ldots, b_k)$ e $C = (c_1, \ldots, c_k)$ punti di $\mathbb{R}^k$. Osservato che

$$\begin{aligned}(B - C) + (C - A) &= (b_1 - c_1, \ldots, b_k - c_k) + (c_1 - a_1, \ldots, c_k - a_k) = \\ &= (b_1 - a_1, \ldots, b_k - a_k) = B - A,\end{aligned}$$

stante la (1.6.10), si ha:

$$|B - A| \leqslant |B - C| + |C - A|$$

i.e.

$$\overline{AB} \leqslant \overline{BC} + \overline{CA}$$

resta così provata la proprietà triangolare.

1.6.6 Prodotto vettoriale di due vettori di $\mathbb{R}^3$.

Siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ vettori di $\mathbb{R}^3$ non nulli e non paralleli. Fissato nello spazio un punto A, siano $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ i segmenti orientati di origine A appartenenti rispettivamente a $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Detto θ l'angolo convesso dei vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ ($\theta \in]0, \pi[$), sulla perpendicolare in A al piano individuato dai segmenti AB e AC fissiamo il punto D in modo che siano rispettate le condizioni seguenti:

$$\overline{AD} = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \sin\theta$$

ad un osservatore con i piedi in A e la testa in D appare antioraria la rotazione che porta il segmento AB a sovrapporsi al segmento AC dopo aver descritto l'angolo θ. Il vettore dello spazio individuato dal segmento orientato $\overrightarrow{AD}$ (vedi figura 1.11) si chiama **prodotto vettoriale** di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ e viene indicato con:

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \qquad (\mathbf{u} \text{ vettor } \mathbf{v})$$

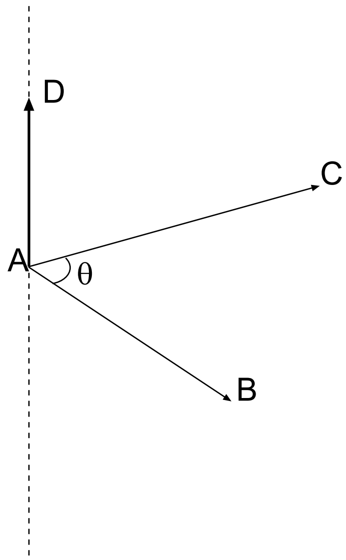


Figura 1.11: Rappresentazione grafica relativa alla definizione di prodotto vettoriale.

Se uno dei vettori in questione è nullo oppure se tali vettori sono paralleli si pone per definizione:

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Il prodotto vettoriale gode delle seguenti proprietà:

1. $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \wedge \mathbf{u})$, i.e. il prodotto vettoriale è alternante e non commutativo,
2. $\lambda(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = (\lambda\mathbf{u}) \wedge \mathbf{v} = \mathbf{u} \wedge (\lambda\mathbf{v}) \qquad \forall\lambda \in \mathbb{R}$
3. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{w} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ (proprietà distributiva del prodotto vettoriale rispetto all'addizione)

Fissiamo nello spazio un riferimento cartesiano monometrico ortogonale $(0, x, y, z)$ ed indichiamo con $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ i versori degli assi coordinati. Posto

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$$

si dimostra che:

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\,(u_2v_3 - u_3v_2) + \mathbf{j}\,(u_3v_1 - u_1v_3) + \mathbf{k}\,(u_1v_2 - u_2v_1)$$