Capitolo 2

Funzioni reali di k variabili reali. Funzioni vettoriali.

2.1 Funzioni reali di k variabili reali.

Consideriamo una funzione del tipo seguente:

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}.$$

i.e. una corrispondenza che ad ogni punto $P = (x_1, \ldots, x_k) \in A$ associa un numero reale, che indicheremo con $f(P)$ e che dicesi **il valore di f in P** oppure **l'immagine di P tramite f**. Una funzione di tale tipo si chiama **funzione reale di k variabili reali**. L'insieme dei valori di f si chiama il **codominio di f** e si denota con $f(A)$. Come per le funzioni reali di una variabile reale, ciascuno dei simboli

$$f(P), \quad f(x_1, \ldots, x_k),$$

oltre ad indicare il valore di f nel punto P, viene utilizzato per denotare la funzione stessa. Nei casi $k = 2$ e $k = 3$ a volte si preferiscono le scritture

$$f(x, y), \qquad f(x, y, z).$$

Si chiama **estremo superiore di f** e si denota coi simboli

$$\sup_A f \quad \text{oppure} \quad \sup f$$

l'estremo superiore del codominio $f(A)$. In breve si pone:

$$\sup_A f \overset{\text{def}}{=} \sup f(A).$$

In modo analogo si definisce l'estremo inferiore di f che si denota con i simboli

$$\inf_A f \quad \text{oppure} \quad \inf f$$

In breve si pone:

$$\inf_A f \stackrel{\text{def}}{=} \inf f(A)\,.$$

Si dice che f è **dotata di massimo** quando il suo codominio $f(A)$ è dotato di massimo. In tal caso si chiama massimo di f e si denota con i simboli

$$\max_A \quad \text{o} \quad f \max f.$$

il massimo del codominio $f(A)$.In breve si pone:

$$\max_A f \stackrel{\text{def}}{=} \max f(A)$$

Analogamente si dice che f è dotata di minimo quando il codominio di f è dotato di minimo. In tal caso si chiama minimo di f e si denota con

$$\min_A \quad \text{o} \quad f \min f.$$

il minimo del codominio $f(A)$. In breve si pone:

$$\min_A f \stackrel{\text{def}}{=} \min f(A)$$

Se la funzione f è dotata di massimo, ogni punto $P_0 \in A$ per il quale risulta

$$f(P_0) = \max_A f,$$

si chiama **punto di massimo** (assoluto) per f. Analogamente, se f è dotata di minimo, ogni punto $P_0 \in A$ per il quale risulta

$$f(P_0) = \min_A f$$

si chiama un **punto di minimo** (assoluto) per f.

Osservazione 6 Si noti che se risulta $k > 1$ non ha alcun senso parlare di monotonia per la funzione f perchè l'insieme $\mathbb{R}^k$ con $k > 1$ non è ordinato.

Sia $f(x, y)$ una funzione definita in $A \subseteq \mathbb{R}^2$. SI chiama **grafico di** f il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$:

$$G_f = \{Q = \{x, y, z\} : P = (x, y) \in A \text{ e } z = f(x, y)\}$$

Fissato nello spazio un riferimento cartesiano monometrico ortogonale (O, x, y, z), G_f è rappresentato geometricamente dall'insieme dei punti Q dello spazio aventi coordinate $(x, y, f(x, y))$ ottenuti al variare del punto $P = (x, y)$ in A. La rappresentazione geometrica Γ_f di G_f dicesi **il diagramma di** f oppure **il luogo dei punti dello spazio di equazione** $z = f(x, y)$. Sia $f(x_1, \ldots, x_k)$ una funzione reale definita in $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Si chiama grafico di f il sottoinsieme di $\mathbb{R}^{k+1}$:

$$G_f = \{Q = \{x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}\} : P = (x_1, \ldots, x_k) \in A \text{ e } x_{k+1} = f(x_1, \ldots, x_k)\}$$

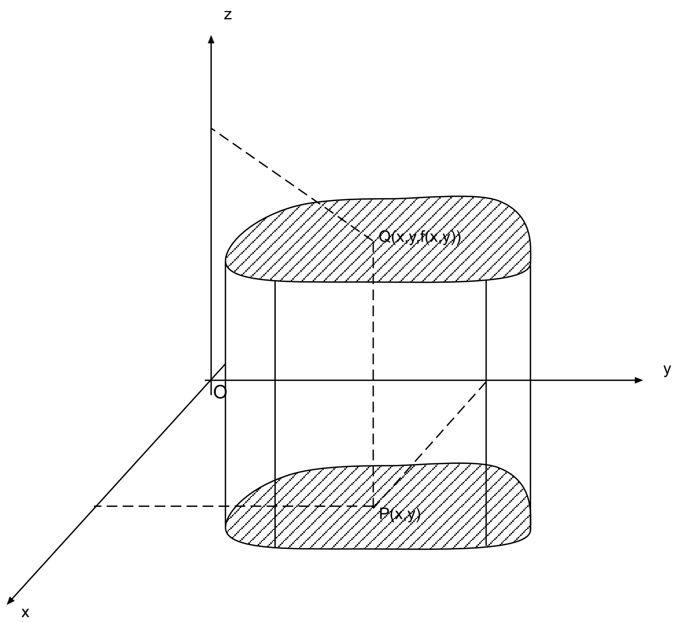
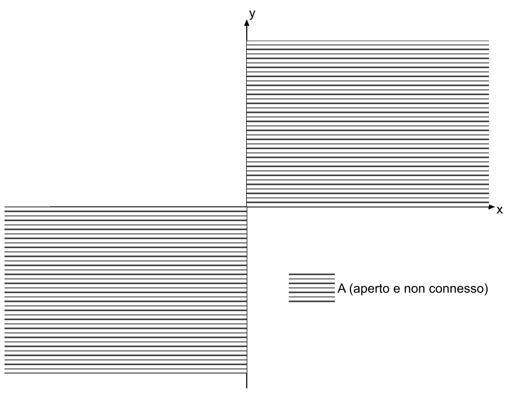


Figura 2.1: Il diagramma di f, i.e. il luogo dei punti dello spazio di equazione $z = f(x, y)$

Esempio 5 La funzione $f(x, y) = \log \frac{x}{y}$ è definita in

$$A = \left\{ P = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x}{y} > 0 \right\}$$



Esempio 6 La funzione

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 - y}$$

è definita in

$$A = \left\{P = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y > 0\right\}$$

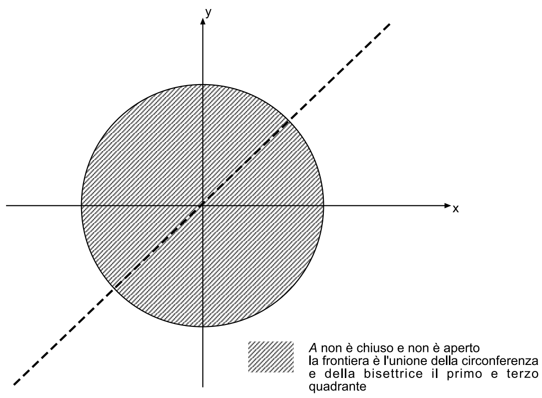
Si noti che l'insieme A, in questo esempio, è chiuso e illimitato

Esempio 7 La funzione

$$f(x, y) = \frac{\arcsin\left(x^2 + y^2\right)}{y - x}$$

è definita in A tale che:

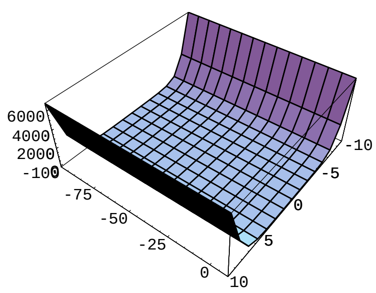
$$A = \left\{P = (x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1 \text{ e } x \neq y\right\}$$



Esempio 8 La funzione

$$f(x, y) = \cosh x$$

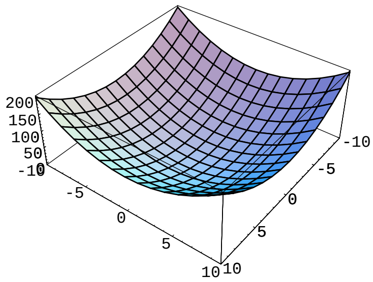
è definita in $\mathbb{R}^2$



Esempio 9 La funzione

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

è definita in $\mathbb{R}^2$ ed ha per diagramma il paraboloide rotondo di equazione $z = x^2 + y^2$:



2.2 Funzioni vettoriali. Campi vettoriali

Consideriamo una funzione del tipo:

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m, \qquad \text{con } k \text{ e } m \in \mathbb{N} \tag{2.2.1}$$

Definizione 31 *Una funzione del tipo (2.2.1) si chiama una* ***funzione vettoriale*** *a m componenti e di k variabili reali per ricordare che i valori di tale funzione possono essere considerati vettori numerici a m componenti.*

Definizione 32 *Si chiamano* ***componenti della funzione*** *f le seguenti funzioni reali:*

$$\begin{array}{l} f_1 : P \in A \to (\textit{la } 1^{\text{a}} \textit{ componente del vettore numerico } f(P)) \\ f_2 : P \in A \to (\textit{la } 2^{\text{a}} \textit{ componente del vettore numerico } f(P)) \\ \vdots \\ f_m : P \in A \to (\textit{la } m^{\text{a}} \textit{ componente del vettore numerico } f(P)) \end{array}$$

Si noti che risulta:

$$f(P) = (f_1(P), f_2(P), \ldots, f_m(P)), \qquad \forall P \in A$$

ossia:

$$f(P) = f_1(P)\,\mathbf{e}_1 + f_2(P)\,\mathbf{e}_2 + \ldots + f_m(P)\,\mathbf{e}_m.$$

Per tale motivo per indicare le funzioni vettoriali (2.2.1) si usano anche le notazioni

$$(f_1, f_2, \ldots, f_m) \qquad f_1\mathbf{e}_1 + f_2\mathbf{e}_2 + \ldots + f_m\mathbf{e}_m$$

In altri termini, se assegnamo m funzioni reali $f_1, f_2, \ldots, f_m$ definite in un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^k$, il simbolo $(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ indica la funzione vettoriale a m componenti che ha per componente le funzioni $f_1, f_2, \ldots, f_m$.

Definizione 33 *Si chiama **modulo di** f e si indica con $|f|$, la funzione reale:*

$$P \in A \to |f(P) - O| = \sqrt{f_1(P)^2 + \ldots + f_m(P)^2}$$

Definizione 34 *Si dice che f è **limitata** se il suo codominio è limitato, i.e. se esiste un $\delta > 0$ tale che:*

$$|f(P)| \leqslant \delta \qquad \forall P \in A$$

ossia quando esiste un rettangolo di $\mathbb{R}^m$ che contiene il codominio $f(A)$.

Osservazione 7 Si noti che, se $m > 1$, non ha alcun senso parlare di estremo superiore e inferiore di f, nè ha senso parlare di minimo e massimo di f; ciò perchè $\mathbb{R}^m$ con $m > 1$ non è ordinato.

Proposizione 2 *La funzione vettoriale (2.2.1) risulta limitata se e solo se sono limitate le sue componenti.*

Esempio 10 Consideriamo la funzione:

$$f : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \to \left(\sin(x_1 x_2), \cos(x_1 x_2), \frac{1}{x_1^2 + x_2^2 + 1} \right) \in \mathbb{R}^3$$

Questa funzione è una funzione vettoriale a 3 componenti di due variabili reali. Le sue componenti sono le seguenti funzioni reali:

$$\begin{array}{c} f_1 : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \to \sin(x_1 x_2) \in \mathbb{R} \\ f_2 : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \to \cos(x_1 x_2) \in \mathbb{R} \\ f_3 : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \to \frac{1}{x_1^2 + x_2^2 + 1} \in \mathbb{R} \end{array}$$

Si noti che le componenti di f sono tutte e tre limitate (perchè sono tutte e tre maggiorate in valore assoluto da 1). Pertanto, per la proposizione prima enunciata, f è limitata.
Il modulo della funzione f è la funzione:

$$\sqrt{\sin^2(x_1 x_2) + \cos^2(x_1 x_2) + \left(\frac{1}{x_1^2 + x_2^2 + 1} \right)^2}.$$

Non ha senso parlare di estremo inferiore o superiore di f, di minimo o massimo di f perchè $\mathbb{R}^3$ non è ordinato.

• • •

Nelle considerazioni svolte precedentemente $\mathbb{R}^k$ e $\mathbb{R}^m$ sono stati tacitamente visti come insieme di punti. Si tenga presente quanto segue.
Sia $f = (f_1, \ldots, f_m)$ una funzione vettoriale definita in $A \subseteq \mathbb{R}^k \quad (k > 1)$. Denotiamo con O l'origine di $\mathbb{R}^m$ e con $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$ la base canonica (naturale) di $\mathbb{R}^m$. Interpretando $\mathbb{R}^k$ come insieme di punti e $\mathbb{R}^m$ come insieme di punti, f è la corrispondenza che ad ogni punto $P \in A$ associa il punto di $\mathbb{R}^m$

$$f(P) = O + f_1(P)\,\mathbf{e}_1 + \ldots + f_m(P)\,\mathbf{e}_m.$$

Interpretando $\mathbb{R}^k$ come insieme di punti e $\mathbb{R}^m$ come spazio vettoriale, f è la corrispondenza che ad ogni punto $P \in A$ associa il vettore di $\mathbb{R}^m$

$$f(P) = f_1(P)\,\mathbf{e}_1 + \ldots + f_m(P)\,\mathbf{e}_m$$

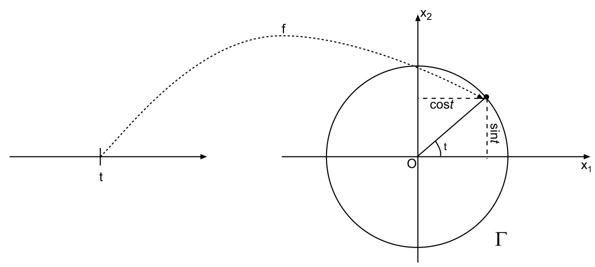
Esempio 11 Consideriamo la funzione vettoriale

$$f : t \in \mathbb{R} \to (\cos t, \sin t)$$

Intendendo $\mathbb{R}$ come insieme di punti ed $\mathbb{R}^2$ come insieme di punti, f è la corrispondenza che ad ogni $t \in \mathbb{R}$ associa il punto di $\mathbb{R}^2$,

$$f(t) = O + \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}$$

In tal caso il codominio di f è la circonferenza Γ di $\mathbb{R}^2$ di centro l'origine e



raggio unitario.
Intendendo $\mathbb{R}$ come insieme di punti e $\mathbb{R}^2$ come spazio vettoriale, f è la corrispondenza che ad ogni punto $t \in \mathbb{R}$ associa il vettore di $\mathbb{R}^2$,

$$f(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}.$$

In tal caso il codominio di f è l'insieme dei versori di $\mathbb{R}^2$ (si veda la figura 2.2).

Definizione 35 *Una funzione vettoriale definita in $A \subseteq \mathbb{R}^k$, inteso come insieme di punti, ed a valori nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^k$, dicesi* ***un campo vettoriale di base A.***

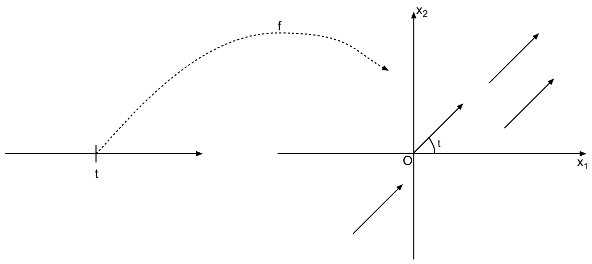


Figura 2.2: Funzione vettoriale definita in un insieme di punti.

2.3 Funzioni composte

Siano : $f = (f_1, \ldots, f_m) : X \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \ldots, f_n) : Y \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Posto

$$A = \{P \in X : f\,(P) \in Y\}\,,$$

se $A \neq \emptyset$, la funzione:

$$P \in A \to f\,(f\,(P)) = (f_1\,(f_1\,(P)\,, \ldots, f_m\,(P))\,, \ldots, f_n\,(f_1\,(P)\,, \ldots, f_m\,(P)))$$

si chiama **funzione composta da f (componente interna) e da f (componente esterna)** e viene indicata con $f \circ f$.
Illustriamo geometricamente tale definizione in qualche caso.

- CASO : $k = 1$, $m = 2$, $n = 3$ — Si veda figura 2.3

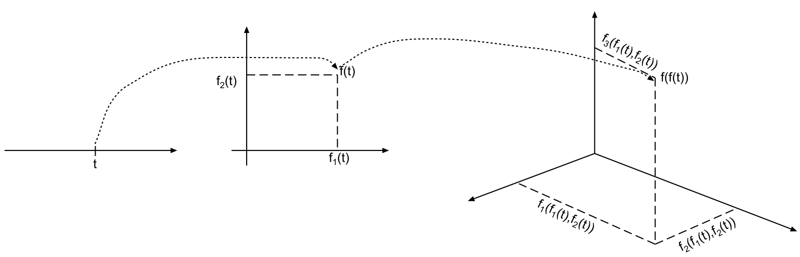


Figura 2.3: Caso in cui $k = 1, m = 2$, e $n = 3$

- CASO : $k = 1$, $m = 3$, $n = 2$ — Si veda figura 2.4

- CASO : $k = 2$, $m = 1$, $n = 2$ — Si veda figura 2.5

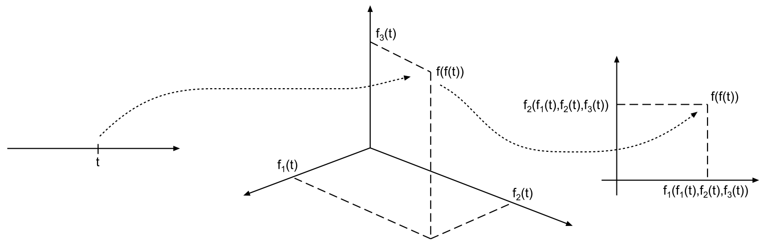


Figura 2.4: Caso in cui $k = 1, m = 3$, e $n = 2$

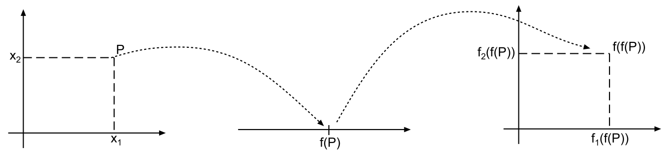


Figura 2.5: Caso in cui $k = 2, m = 1$, e $n = 3$

2.4 Limiti

2.4.1 Limiti delle funzioni reali di più variabili reali

La definizione di limite per le funzioni reali di più variabili reali si da come per le funzioni reali di una variabile reale.
Siano:

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R} \quad (k > 1), P_0 \in \mathbb{R}^k \cup \{\infty\}$$

Per definizione:

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = l \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\forall \text{ intorno } I' \text{ di } l, \exists \text{ un intorno } I \text{ di } P_0 : \forall P \in A \cap I - \{P_0\}, f(P) \in I'\right)$$

Se $l \in \mathbb{R}$ si dice che f è **convergente in** P_0.
Se $l = +\infty[-\infty]$ suol dirsi che f **diverge positivamente [negativamente] in** P_0.
Tenendo presente la definizione d'intorno, il concetto di limite si specializza come segue:

1. $P_0 \in \mathbb{R}^k$ e $l \in \mathbb{R}$

   $$\lim_{P \to P_0} f(P) = l \Leftrightarrow$$
   $$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall P \in A \text{ con } 0 < |P - P_0| < \delta_\varepsilon, |f(P) - l| < \varepsilon$$

   (vedi figura 2.6)

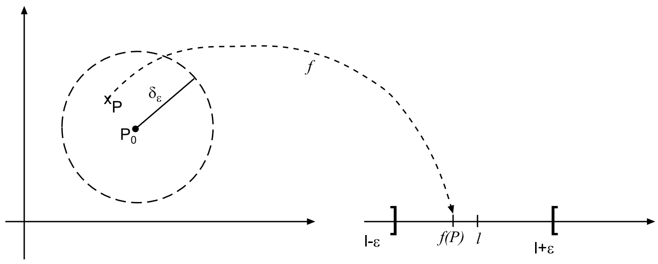


Figura 2.6: Rappresentazione geometrica del concetto di limite per $P_0 \in \mathbb{R}^k$ e $l \in \mathbb{R}$

2. $P_0 \in \mathbb{R}^k$ e $l = +\infty[-\infty]$

   $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = +\infty[-\infty] \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall P \in A$ con $0 < |P - P_0| < \delta_\varepsilon, f(P) > \varepsilon$ $[f(P) < -\varepsilon]$

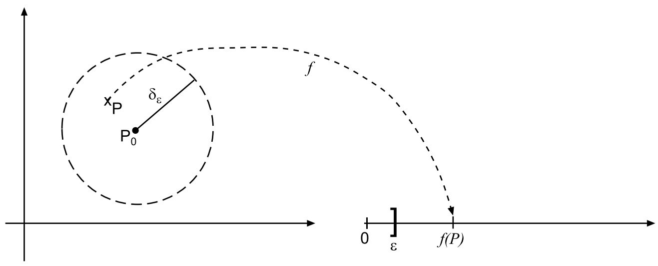


Figura 2.7: Rappresentazione geometrica del concetto di limite per $P_0 \in \mathbb{R}^k$ e $l = +\infty$

3. $P_0 = +\infty$ e $l \in \mathbb{R}$

   $\lim\limits_{P \to +\infty} f(P) = l \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall P \in A$ con $|P - O| > \delta_\varepsilon, |f(t) - l| < \varepsilon$

   (vedi figura 2.8)

4. $P_0 = \infty$ e $l = +\infty[-\infty]$

   $\lim\limits_{P \to +\infty} f(P) = +\infty[-\infty] \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall P \in A$ con $|P - O| > \delta_\varepsilon, f(P) > \varepsilon[f(P) < -\varepsilon]$

   (vedi figura 2.9)

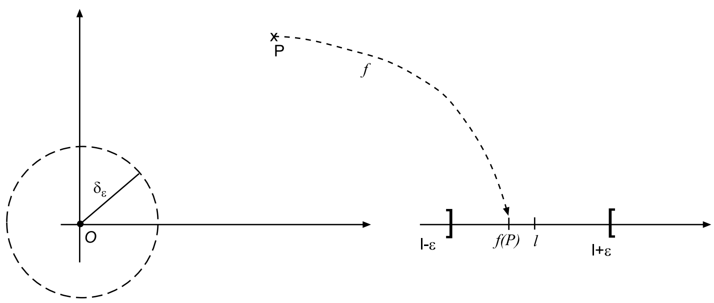


Figura 2.8: Rappresentazione geometrica del concetto di limite per $P_0 = +\infty$ e $l \in \mathbb{R}$

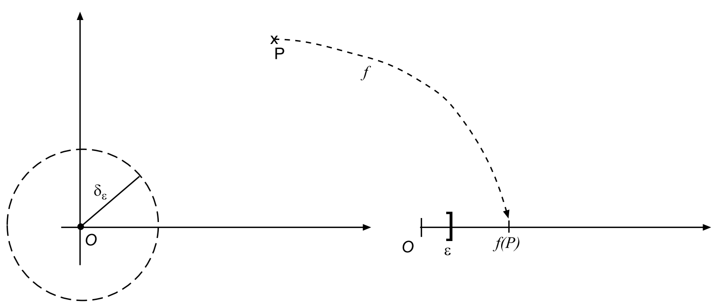
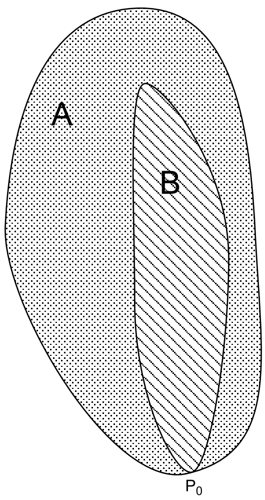


Figura 2.9: Rappresentazione geometrica del concetto di limite per $P_0 = +\infty$ e $l = +\infty$

Evidentemente, detta B una parte di A avente P_0 come punto di accumulazione, si ha:

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = l \Rightarrow \lim_{\substack{P\to P_0 \\ P\in B}} f(P) = l \tag{2.4.1}$$



Nota 1 *Il simbolo*

$$\lim_{\substack{P\to P_0 \\ P\in B}} f(P)$$

sta ad indicare il limite, quando esiste, della restrizione di f a B nel punto P_0.

Aggiungiamo che, se esiste un intorno I_0 di P_0 in modo che

$$I_0 \cap A - \{P_0\} \subseteq B$$

allora

$$\lim_{\substack{P\to P_0 \\ P\in B}} f(P) = l \Rightarrow \lim_{P\to P_0} f(P) = l$$

L'implicazione (2.4.1) viene a volte utilizzata per stabilire la non esistenza del limite di una funzione in un punto.

Esempio 12 La funzione

$$f : P = (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{0\} \to \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

non è dotata di limite nell'origine. Infatti, indicati con B_1 l'asse x privato dell'origine e con B_2 l'asse y privato dell'origine, risultando

$$\begin{array}{ll} \forall P = (x,0) \in B_1 & f(P) = 1, \\ \forall P = (0,y) \in B_2 & f(P) = -1, \end{array}$$

si ha:

$$\lim_{\substack{P\to 0 \\ P\in B_1}} f(P) = 1$$

$$\lim_{\substack{P\to 0 \\ P\in B_2}} f(P) = -1$$

e ciò esclude che f sia dotata di limite nell'origine.

Esempio 13 La funzione

$$f : P = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to \begin{cases} \arctan \frac{y}{x^2} & \text{se} \quad x \cdot y \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se} \quad x \cdot y = 0 \end{cases}$$

non è dotata di limite nell'origine. Infatti, indicati con B_1 l'unione dei due assi coordinati privati dell'origine e con B_2 la parabola di equazione $y = x^2$, privata di O, risultando:

$$\forall P \in B_1 \qquad f(P) = \pi/2,$$

$$\forall P = \left(x, x^2\right) \in B_2 \qquad f(P) = \arctan \frac{x^2}{x^2} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

si ha:

$$\lim_{\substack{P\to 0 \\ P\in B_1}} f(P) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{\substack{P\to 0 \\ P\in B_2}} f(P) = \frac{\pi}{4}$$

e ciò implica che f non è dotata di limite nell'origine.

2.5 Limiti delle funzioni vettoriali

Anche per le funzioni vettoriali la nozione di limite si da come per le funzioni reali di una variabile reale.
Sia $f = (f_1, \ldots, f_m)$ definita in $A \subseteq R^k$ $(k \geqslant 1)$. Consideriamo, poi, P_0 punto di accumulazione per A al finito o non ($P_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ se $k = 1$, $P_0 \in \mathbb{R}^k \cup \{\infty\}$), $L \in \mathbb{R}^m \cup \{\infty\}$. Si pone, per definizione:

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = L \Leftrightarrow \big(\forall \text{ intorno } I' \text{ di } L, \exists \text{ almeno un intorno } I \text{ di } P_0 :$$
$$\forall P \in A \cap I - \{x_0\}\, f(P) \in I'\big)$$

Se $L \in \mathbb{R}^m [L = \infty]$ suol dirsi che f è **convergente [divergente]** in P_0. Supponiamo $L = (L_1, \ldots, L_m) \in \mathbb{R}^m$. In tal caso si ha:

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = L \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists \text{ un intorno } I_\varepsilon \text{ di } P_0 : \forall P \in I_\varepsilon \cap A - \{P_0\}$$
$$|f(P) - L| < \varepsilon) .$$

Sussistendo le disuguaglianze [1]:

$$\forall i \in \{1, \ldots, m\} \qquad |f_i(P) - L_i| \leqslant |f(P) - L|$$
$$|f(P) - L| \leqslant |f_1(P) - L_1| + \ldots + |f_m(P) - L_m| ,$$

si ha:

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = L \Leftrightarrow \left(\forall i \in \{1, \ldots, m\} \lim_{P \to P_0} f_i(P) = L_i \right)$$

Se $L = \infty$ si ha:

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = \infty \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists \text{ un intorno } I_\varepsilon \text{ di } P_0 : \forall P \in I_\varepsilon \cap A - \{P_0\}$$
$$|f(P) - O| > \varepsilon)$$

i.e.

$$\sqrt{(f_1(P))^2 + \ldots + (f_m(P))^2} > \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{P \to P_0} |f(P)| = +\infty$$

Osservazione 8 Supponiamo che per un $\nu \in \{1, \ldots, n\}$

$$\lim_{P \to P_0} f_i(P) = \pm\infty.$$

Stante la disuguaglianza

$$|f_i(P)| \leqslant |f(P)| ,$$

si ha allora che

$$\lim_{P \to P_0} |f_i(P)| = +\infty$$

ovvero

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = \infty.$$

[1] Se $a_1, \ldots, a_n$ sono numeri reali, si ha:

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \, |a_i| = \sqrt{a_i^2} \leqslant \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2};$$

$$\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2} \leqslant \sqrt{(|a_1| + \ldots + |a_n|)^2} = |a_1| + \ldots + |a_n|$$

2.6 Teoremi sui limiti

I teoremi riguardanti i limiti delle funzioni di 1 variabile reale, tranne quelli che fanno ipotesi di monotonia, valgono anche per le funzioni reali di più variabili reali. Il teorema sul limite di una funzione composta vale per una funzione composta qualsiasi.

2.6.1 Funzioni continue

Siano f una funzione reale o vettoriale definita in $A \subseteq \mathbb{R}^k$, $P_0 \in A$. Si dice che f è **continua in** P_0 se:

> $\forall$ intorno I' di $f(P_0)$ esiste almeno un intorno I di P_0 tale che per ogni $P \in I \cap A, f(P) \in I'$, i.e. se:
>
> $$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall P \in A \text{ con } |P - P_0| < \delta_\varepsilon, |f(P) - f(P_0)| < \varepsilon$$

Evidentemente, se P_0 è un punto isolato di A, allora f è continua in P_0. Se P_0 è di accumulazione per A, allora

$$\left(f \text{ continua in } P_0 \Leftrightarrow \lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0) \right)$$

Supponiamo che f sia vettoriale e poniamo $f = (f_1, \dots, f_m)$. In tal caso si ha:

$$(f \text{ continua in } P_0 \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, m\}, f_i \text{ continua in } P_0)$$

Se P_0 è punto isolato di A non c'è nulla da dimostrare. Se P_0 è di accumulazione per A, allora

$$\begin{aligned} & f \text{ continua in } P_0 \Leftrightarrow \lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, m\}, \lim_{P \to P_0} f_i(P) = f_i(P_0) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, m\}, f_i \text{ continua in } P_0 \end{aligned}$$

Una funzione reale o vettoriale si dice **continua** in una parte A' del suo insieme di definizione A se essa è continua in ogni punto di A'. Le funzioni reali o vettoriali, che siano continue in ogni punto del loro insieme di definizione, si dicono continue.
Sono funzioni continue:

- la somma, la differenza, il prodotto ed il rapporto di funzioni reali continue,
- il modulo di una funzione reale o vettoriale continua,
- ogni funzione composta da funzioni continue.

• • •

Per riconoscere la continuità di una funzione reale, di k variabili reali si tenga presente quanto segue.
Sia ϕ una funzione reale definita in $I \subseteq \mathbb{R}$. Fissato $i \in \{1, \dots, k\}$ e posto

$$A = \left\{ P = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k : x_i \in I \right\}$$

consideriamo la funzione

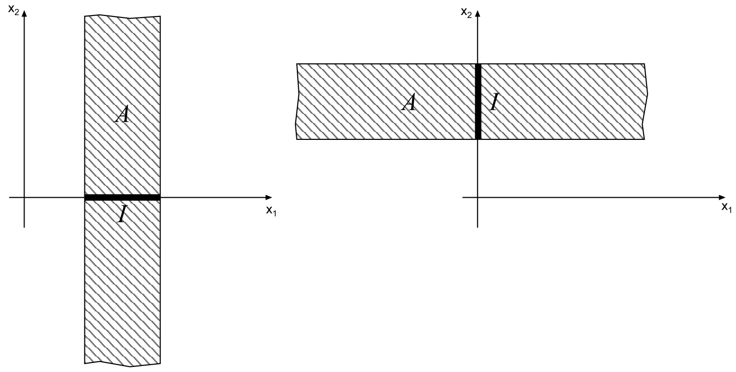


Figura 2.10: Rappresentazione dell'insieme A nel caso $i = 1$ (sinistra) e $i = 2$ (destra).

$$f : P(x_1, \dots, x_i, \dots, x_k) \in A \to \phi(x_i)$$

Teorema 2.1 *Se ϕ è continua in I, allora f è continua in A.*

Dimostrazione — Sia $P_0 = (x_{01}, \dots, x_{0i}, \dots, x_{0k}) \in A$, sicchè $x_{0i} \in I$. Fissato $\varepsilon > 0$, la continuità di ϕ in x_{0i} garantisce l'esistenza di $\delta_\varepsilon > 0$ in modo che

$$\forall x_i \in I \text{ con } |x_i - x_{0i}| < \delta_\varepsilon, \quad |\phi(x_i) - \phi(x_{0i})| < \varepsilon;$$

pertanto, visto che

$$P = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_k) \in A \text{ e } |P - P_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow x_i \in I \text{ e } |x_i - x_{0i}| < \delta_\varepsilon,$$

risulta:

$$\forall P = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_k) \in A \text{ con } |P - P_0| < \delta_\varepsilon, \ |f(P) - f(P_0)| = \\ = |\phi(x_i) - \phi(x_{0i})| < \varepsilon.$$

$\square$

Esempio 14 Le funzioni

- $f(x,y) = x^3 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$
- $f(x,y) = y^3 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$
- $f(x,y) = \sin x \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$
- $f(x,y) = \cos y \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$
- $f(x,y) = \log x \quad \forall (x,y) \in \left]0,+\infty\right[\times \mathbb{R}$
- $f(x,y) = \log y \quad \forall (x,y) \in R \times \left]0,+\infty\right[$

sono continue nei rispettivi insiemi di definizione in virtù del teorema 2.1.

Esempio 15 La funzione:

$$f(x,y) = x^3 \log y \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \left]0,+\infty\right[$$

è continua nel suo insieme di definizione in quanto prodotto dalla funzioni continue:

$$f_1(x,y) = x^3 \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$
$$f_2(x,y) = \log y \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \left]0,+\infty\right[$$

Esempio 16 La funzione:

$$f(x,y) = \sin x + e^y \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

è continua nel suo insieme di definizione in quanto somma delle funzioni continue:

$$f_1(x,y) = \sin x \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$
$$f(x,y) = e^y \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Esempio 17 La funzione

$$f(x,y,z) = \frac{x + z^2 + \sin(xy)}{\cos^2(xy)}$$

è continua nel suo insieme di definizione in quanto rapporto delle funzioni continue:

$$f_1(x,y,z) = x + z^2 + \sin(xy) \qquad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$
$$f_2(x,y,z) = \cos^2(xy) \qquad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

La funzione f_1 è continua in quanto somma delle funzioni continue:

$$f_{11}(x,y,z) = x \qquad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

$$f_{12}(x,y,z) = z^2 \qquad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$
$$f_{13}(x,y,z) = \sin(xy) \qquad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

La continuità delle funzioni f_{11} e f_{12} è dovuta al teorema 2.1; la continuità di f_{13} è dovuta al fatto che essa è composta dalla funzione continua

$$(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \to xy$$

e dalla funzione seno.
La funzione f_2 è continua in $\mathbb{R}^3$ in quanto composta dalla funzione continua

$$(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \to xy$$

e dalla funzione continua che a

$$t \in \mathbb{R} \to \cos^2 t$$

• • •

Siano: f una funzione reale definita in $A \subseteq \mathbb{R}$, $P_0 = \left(x_1^0, \ldots, x_k^0\right) \in A$. Fissato $i \in \{1, \ldots, k\}$ e posto

$$A_i(P_0) = \left\{x_i \in \mathbb{R} : \left(x_1^0, \ldots, x_i, \ldots, x_k^0\right) \in A\right\}$$

consideriamo la funzione reale di x_i:

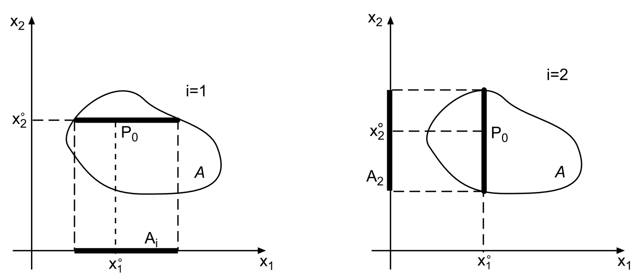


Figura 2.11: Rappresentazione grafica di A_i nei casi $i = 1$ e $i = 2$.

$$f_i(x_i) = f\left(x_1^0, \ldots, x_i, \ldots, x_k^0\right) \quad \forall x_i \in A_i$$

Si dice che f è **continua in P_0 rispetto a x_i** se f_i è continua in x_i^0 (da notare che $x_i^0 \in A_i$).

Si dice che f è **continua in P_0 rispetto alle variabili separatamente** se essa è continua in P_0 rispetto a x_1, rispetto a x_2, ..., rispetto a x_k, i.e. se:

$$f_i \text{ è continua in } x_i^0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, k\}$$

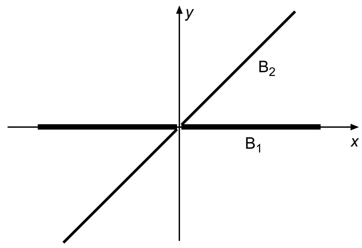


Figura 2.12: Rappresentazione grafica degli insiemi B_1 e B_2.

Rileviamo che:

$$(f \text{ continua in } P_0) \Rightarrow \begin{pmatrix} f \text{ continua in } P_0 \text{ rispetto} \\ \text{alle variabili separatamente} \end{pmatrix}$$

Infatti, fissato $i \in \{1, \ldots, k\}$ è scelto $\varepsilon > 0$, la continuità di f in P_0 comporta l'esistenza di $\delta_\varepsilon > 0$ in modo che

$$\forall P \in A \text{ con } |P - P_0| < \delta_\varepsilon, |f(P) - f(P_0)| < \varepsilon,$$

ciò implica che

$$\begin{aligned} \forall x_i \in A_i \text{ con } \left|x_i - x_i^0\right| < \delta_\varepsilon \quad & \left|f_i(x_i) - f_i\left(x_i^0\right)\right| = \\ = & \left|f\left(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_k^0\right) - f(P_0)\right| < \varepsilon \end{aligned}$$

Aggiungiamo che:

$$\begin{pmatrix} f \text{ continua in } P_0 \text{ rispetto} \\ \text{alle variabili separatamente} \end{pmatrix} \not\Rightarrow (f \text{ continua in } P_0)$$

consideriamo, ad esempio, la funzione:

$$f : P = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad P = (x, y) \neq \mathbf{0} = (0, 0) \\ \\ 0 & \text{se} \qquad\qquad P = \mathbf{0} \end{cases}$$

la quale è continua nell'origine rispetto alle variabili separatamente, giacché

$$\forall x \in A_1 = \mathbb{R}, f(x, 0) = 0, \forall x \in A_2 = \mathbb{R}, f(0, y) = 0.$$

Detta funzione non è regolare nell'origine e quindi neppure continua in tale punto. Infatti, indicato con B_1 l'asse x privato dell'origine e con B_2 la bisettrice del I e del III quadrante privata dell'origine, avendosi

$$\forall P = (x, 0) \in B_1, f(P) = 0$$

$$\forall P = (x, x) \in B_2, f(P) = \frac{1}{2}$$

risulta:

$$\lim_{P \to 0, P \in B_1} f(P) = 0$$

$$\lim_{P \to 0, P \in B_2} f(P) = \frac{1}{2}$$

• • •

Siano: f una funzione reale o vettoriale definita in $A \subseteq \mathbb{R}^k$, P_0 un punto di accumulazione al finito per A. Si dice che f è **discontinua in** P_0 oppure che P_0 **è punto di discontinuità per** f quando si verifica una delle circostanze seguenti:

1. P_0 non appartiene ad A;
2. P_0 appartiene ad A ed f non è continua in P_0.

Si dice che P_0 è **punto di discontinuità eliminabile per** f se f è convergente in P_0 col limite distinto da $f(P_0)$ se P_0 inA.
In tal caso, posto

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = l\,[L],$$

la funzione

$$g : P \in A \cup \{P_0\} \to \begin{cases} f(P), & \text{se} \quad P \neq P_0 \\ \\ l\,[L], & \text{se} \quad P = P_0 \end{cases}$$

è continua in P_0 in quanto

$$\lim_{P \to P_0} g(P) = \lim_{P \to P_0} f(P) = l\,[L] = g(P_0)$$

La funzione g dicesi **ottenuta da** f **modificandone il valore nel punto** P_0 **ed associando a** P_0 $l\,[L]$ quando $P_0 \in A$, se P_0 non appartiene ad A g dicesi **il prolungamento continuo di** f **su** P_0.

2.7 Successioni di punti di $\mathbb{R}_k$

2.7.1 Generalità. Limiti.

Una successione di punti di $\mathbb{R}^k$ $(k > 1)$, che viene indicata con uno dei simboli

$$(P_n)_{n \in \mathbb{N}}, \{P_n\} \text{ oppure } P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$$

è una funzione definita nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali ed a valori in $\mathbb{R}^k$, i.e. una corrispondenza che ad ogni

$$n \in \mathbb{R} \text{ associa il punto } P_n \in \mathbb{R}^k.$$

Dunque una successione di punti di $\mathbb{R}^k$ è una particolare funzione vettoriale di una variabili reale. Di conseguenza alle successioni di punti di $\mathbb{R}^k$ si estende tutto quanto è stato detto precedentemente per le funzioni vettoriali di una variabile reale. Si tenga presente quanto segue. Posto

$$P_n = (x_{1n}, \ldots, x_{kn}),$$

le componenti di $\{P_n\}$ sono le successioni reali

$$\{x_{1n}\}, \ldots, \{x_{kn}\};$$

inoltre:

$$\begin{aligned}(\lim P_n = L,\ \text{con } L = (l_1, \ldots, l_k)) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists \nu_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > \nu_\varepsilon\, |P_n - L| < \varepsilon) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\forall i \in \{1, \ldots, k\} \lim x_{in} = l_i), \quad (2.7.1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\lim P_n = \infty) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists \nu_\varepsilon \in N : \forall n > \nu_\varepsilon\, |P_n - O| > \varepsilon) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(\lim |P_n| = \lim \sqrt{x_{1n}^2 + \ldots + x_{kn}^2} = +\infty\right), \quad (2.7.2)\end{aligned}$$

Se per un $i \in \{1, \ldots, k\}$, $\lim x_{in} = \pm\infty$, allora $\lim P_n = +\infty$.

Sia $\{P_n\}$ una successione di punti di $\mathbb{R}^k$. Detta $\{k_n\}$ una successione strettamente crescente di numeri naturali, la successione composta dalle successioni $\{k_n\}$ e P_n, i.e. la successione $\{P_{k_n}\}$ dicesi **una successione estratta da** $\{P_n\}$ oppure una **sottosuccessione di** $\{P_n\}$.
ragionando come per le successioni reali, si stabiliscono i teoremi che seguono:

Teorema 2.2 *Se $\{P_n\}$ è regolare, allora ogni sua estratta è regolare ed ha lo stesso limite.*

Teorema 2.3 *Ogni successione di punti di $\mathbb{R}^k$ convergente è limitata.*

Teorema 2.4 *Da ogni successione limitata di punti di $\mathbb{R}^k$ se ne può estrarre almeno una convergente. Da ogni successione illimitata di punti di $\mathbb{R}^k$ se ne può estrarre almeno una divergente.*

2.7.2 Applicazioni

Sussistono i teoremi seguenti la cui dimostrazione è del tutto analoga a quella seguita nel caso monodimensionale.

Teorema 2.5 *Un sottoinsieme X di $\mathbb{R}^k$ è chiuso se e solo se ogni successione di punti di X, che sia convergente, ha il limite in X.*

Teorema 2.6 *Un sottoinsieme X di $\mathbb{R}^k$ è compatto se e solo se da ogni successione di punti di X se ne può estrarre almeno una convergente ad un punto di X.*

Teorema 2.7 (criterio di regolarità di una funzione) . *Siano: f una funzione reale o vettoriale definita in $A \subset \mathbb{R}^k$, P_0 un punto di accumulazione per A al finito o non. Condizione necessaria e sufficiente affinchè f sia regolare in P_0 è che per ogni successione $\{P_n\}$ di punti di $A - \{P_0\}$ avente limite P_0 la successione $f(P_n)$ è regolare.*
Quando ciò accade, il limite della successione $\{f(P_n)\}$ è indipendente della successione $\{P_n\}$ e coincide col limite di f in P_0.

Teorema 2.8 (criterio di continuità di una funzione) . *Siano: f una funzione reale o vettoriale definita in $A \subseteq \mathbb{R}^k$, $P_0 \in A$. Condizione necessaria e sufficiente affinchè f sia continua in P_0 è che per ogni successione $\{P_n\}$ di A convergente a P_0 risulta:*

$$\lim f(P_n) = f(P_0)$$

Teorema 2.9 (criterio di convergenza di Cauchy per le successioni) *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una successione $\{P_n\}$ di punti di $\mathbb{R}^k$ sia convergente è che si abbia:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > \nu_\varepsilon \text{ e } \forall h \in \mathbb{N} \; |P_{n+h} - P\_n| < \varepsilon$$

Teorema 2.10 (criterio di convergenza di Cauchy per le funzioni) *Siano: f una funzione reale o vettoriale definita in $A \subseteq \mathbb{R}^k$, P_0 un punto di accumulazione per A al finito o non. Condizione necessaria e sufficiente affinchè f sia convergente in P_0 è che si abbia:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \text{ un intorno } I_\varepsilon \text{ di } P_0 : \forall P', P'' \in I_\varepsilon \cap A - \{P_0\} \qquad |f(P') - f(P'')| < \varepsilon$$

2.7.3 Teoremi sulle funzioni continue. Funzioni uniformemente continue.

Le funzioni reali o vettoriali continue godono di notevoli proprietà espresse dai teoremi seguenti, la cui dimostrazione è del tutto analoga a quella seguita per le funzioni reali di una variabile reale.

Teorema 2.11 (criterio di continuità delle funzioni inverse) *Sia f una funzione reale o vettoriale definita ed invertibile in $A \subseteq \mathbb{R}^k$. Se A è compatto e se f è continua in A, allora l'inversa di f è continua.*

Teorema 2.12 (di Weierstrass) *Una funzione reale o vettoriale f, definita e continua in una parte compatta di $\mathbb{R}^k$, ha per codominio un insieme compatto. Conseguentemente f, se reale, è dotata di minimo e di massimo.*

Teorema 2.13 (di Bolzano) *Una funzione reale o vettoriale f, che sia definita e continua in una parte connessa di $\mathbb{R}^k$, ha per codominio un insieme connesso. Conseguentemente f, se reale, ha per codominio un intervallo.*

Dal teorema di Bolzano si deduce il

Teorema 2.14 (degli zeri) *Sia f una funzione reale definita e continua nella parte connessa A di $\mathbb{R}^k$. Se f assume in A sia valori positivi e sia valori negativi, allora essa si annulla in almeno un punto di A.*

Osservazione 9 In certi casi il teorema degli zeri può essere utilizzato per determinare l'insieme di definizione di una funzione di più variabili. Consideriamo, ad esempio, la funzione

$$f(x,y) = \log\left(\frac{x^2}{4} + y^2 - 1\right)$$

il cui insieme di definizione è:

$$A = \left\{P = (x,y) \in R^2 : \frac{x^2}{4} + y^2 - 1 > 0\right\}$$

posto $g(x,y) = \frac{x^2}{4} + y^2 - 1$, denotiamo con Γ l'insieme dei punti del piano

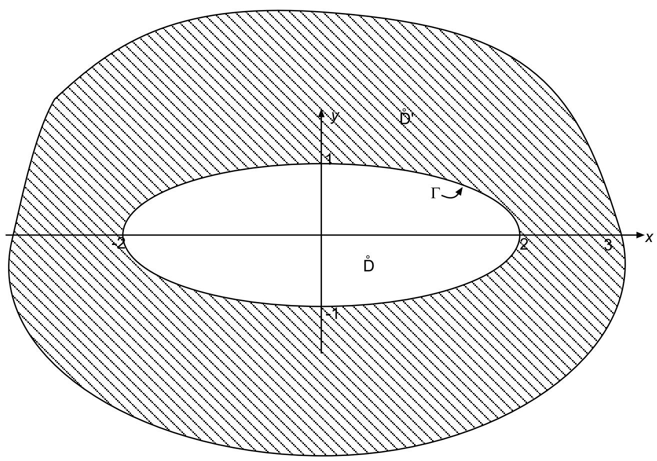


Figura 2.13: D è il dominio limitato avente per frontiera Γ. D' è il dominio illimitato con frontiera Γ.

in cui g si annulla, ossia l'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

Denotiamo poi con D il dominio limitato avente per frontiera Γ e con D' il dominio illimitato avente per frontiera Γ.
Visto che:

— g è continua in $\mathbb{R}^2$,

— l'interno di D è connesso e $g(0,0) = -1$,

— l'interno di D' è convesso e $g(3,0) = \frac{9}{4} - 1 > 0$

per il teorema degli zeri dev'essere:

$$g(P) < 0 \forall P \in \overset{o}{D}$$
$$g(P) > 0 \forall P \in \overset{o}{D'}$$

e di conseguenza $A = \overset{o}{D}$.

• • •

Sia f una funzione reale o vettoriale definita in $A \subseteq \mathbb{R}^k$. Si dice che f è **uniformemente continua in** A se:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall P', P'' \in A \text{ con } \left|P' - P''\right| < \delta_\varepsilon, \quad \left|f\left(P'\right) - f\left(P''\right)\right| < \varepsilon$$

Teorema 2.15 (di Heine—Cantor) *Una funzione reale o vettoriale, che sia definita e continua in una parte compatta A di $\mathbb{R}^k$, è uniformemente continua in A.*

La dimostrazione è simile a quella per le funzioni reali di una variabile reale.

2.8 Operatori lineari — Autovalori ed Autovettori — Forme quadratiche.

2.8.1 Operatori lineari

Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^k$ e denotiamo con $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ la sua base canonica. Sia L un'operatore lineare definito nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^k$ ed a valori nello spazio vettoriale $\mathbb{R}$, i.e. una funzione reale definita in $\mathbb{R}^k$ soddisfacente alle condizioni seguenti:

- $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^k, L(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = L(\mathbf{x}) + L(\mathbf{y})$

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^k, L(\lambda \mathbf{x}) = \lambda L(\mathbf{x})$

Posto $a_i = L(\mathbf{e}_i)$ e $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$, si ha:

$$\begin{gathered}\forall \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k), L(\mathbf{x}) = L(x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_k\mathbf{e}_k) = \\ = L(x_1\mathbf{e}_1) + \dots + L(x_k\mathbf{e}_k) = x_1 L(\mathbf{e}_1) + \dots + x_k L(\mathbf{e}_k) = \\ = a_1x_1 + \dots + a_kx_k = \mathbf{a} \times \mathbf{x}\end{gathered}$$

Il vettore **a** dicesi **associato a** L.

• • •

Consideriamo gli spazi vettoriale $\mathbb{R}^k$ e $\mathbb{R}^m$ e denotiamo con

$$\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k\}, \left\{\mathbf{e}_1^{'}, \dots, \mathbf{e}_m^{'}\right\}$$

le rispettive basi canoniche. Sia L un operatore lineare definito nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^k$ ed a valori nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^m$, i.e. una funzione vettoriale definita in $\mathbb{R}^k$ ed a valori in $\mathbb{R}^m$ soddisfacente alle condizioni:

- $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^k, L(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = L(\mathbf{x}) + L(\mathbf{y})$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^k, L(\lambda \mathbf{x}) = \lambda L(\mathbf{x})$

Posto $L(\mathbf{e}_i) = (a_{1i}, \dots, a_{mi})$, si ha:

$$\begin{gathered}\forall \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k), L(\mathbf{x}) = L(x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_k\mathbf{e}_k) = \\ = L(x_1\mathbf{e}_1) + \dots + L(x_k\mathbf{e}_k) = x_1 L(\mathbf{e}_1) + \dots + x_k L(\mathbf{e}_k) = \\ = x_1(a_{11}, \dots, a_{m1}) + \dots + x_k(a_{1k}, \dots, a_{mk}) = \\ = (a_{11}x_1 + \dots + a_{1k}x_k, \dots, a_{m1}x_1 + \dots + a_{mk}x_k);\end{gathered}$$

Pertanto, introdotta la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mk} \end{pmatrix}$$

ed adoperando per **x** la notazione matriciale

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$$

risulta:

$$\forall \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k, L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

dove il prodotto va inteso **riga per colonna**.
La matrice A dicesi **associata a** L.

2.8.2 Autovettori ed Autovalori

Sia L un operatore lineare definito nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^k$ ed a valori nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^k$. Sia

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$$

la matrice associata ad L.
Un numero reale λ_0 dicesi **un autovalore di** L (oppure di A) se esiste un vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$, non nullo, tale che:

$$L(\mathbf{x}) = \lambda_0 \mathbf{x} \tag{2.8.1}$$

ossia

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1k}x_k & = & \lambda_0 x_1 \\ \vdots & & \\ a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kk}x_k & = & \lambda_0 x_k \end{cases} \tag{2.8.2}$$

Se λ_0 è un **autovalore di** L ogni soluzione della (2.8.1), o ciò che è lo stesso del sistema (2.8.2), che sia distinta dal vettore nullo dicesi **un autovettore di L (o di A) relativo a λ_0**.
Evidentemente λ_0 è un autovalore di L se e solo se è soluzione della equazione algebrica di grado k :

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{2.8.3}$$

Se A è simmetrica (i.e. $a_{ij} = a_{ji}$), si dimostra che la (2.8.3) ammette soltanto radici reali.

2.8.3 Forme quadratiche

Sia

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$$

una matrice quadrata ad elementi reali simmetrica, i.e. $a_{ij} = a_{ji}$. La funzione continua in $\mathbb{R}^k$:

$$\Phi : P = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k \to \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}x_i x_j$$

dicesi **una forma quadratica simmetrica (di coefficienti a_{ij})**. La matrice A dicesi **associata a Φ**.

- SI dice che Φ è **definita positiva [negativa]** se:

$$\forall P \in \mathbb{R}^k - \{0\} \quad \Phi(P) > 0 \quad [\Phi(P) < 0]$$

- Si dice che Φ è **semidefinita positiva [negativa]** se:

$$\forall P \in \mathbb{R}^k - \{0\} \quad \Phi(P) \geqslant 0 \quad [\Phi(P) \leqslant 0]$$

- si dice che Φ è **indefinita** se essa assume sia valori positivi sia valori negativi.

Per ogni $i \in \{1, \ldots, k\}$ denotiamo con Δ_i il determinante della matrice individuata dalle prime i righe e dalle prime i colonne della matrice A. Chiamiamo **minore principale di** A il determinante di una qualsiasi matrice estratta da A i cui elementi siano simmetrici rispetto alla diagonale principale di A.

Teorema 2.16 *Le affermazioni seguenti sono equivalenti:*

1. *Φ è definita positiva [negativa],*
2. *Per ogni $i \in \{1, \ldots, k\}$, $\Delta_i > 0$ $[(-1)^i \Delta_i > 0]$*
3. *Tutti gli autovalori di A sono positivi [negativi]*

Teorema 2.17 *Le affermazioni seguenti sono equivalenti:*

1. *Φ è semidefinita positiva [negativa];*
2. *Tutti i minori principali di A sono non negativi [i minori principali di A di ordine pari sono tutti non negativi, quelli di ordine dispari sono tutti non positivi],*
3. *Tutti gli autovalori di A sono non negativi [non positivi].*

Teorema 2.18 *Le affermazioni seguenti sono equivalenti:*

1. *Φ è indefinita,*
2. *Esistono due autovalori di A, uno positivo e l'altro negativo.*