

Capitolo 3

Calcolo differenziale

3.1 Derivazione delle funzioni vettoriali di una variabile reale

Siano: $f = (f_1, \dots, f_m)$ una funzione vettoriale definita in $I \subseteq \mathbb{R}$, $t_0 \in I \cap DI$. La funzione vettoriale della variabile reale Δt a valori nello spazio vettoriale \mathbb{R}^m :

$$\frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} = \left(\frac{f_1(t_0 + \Delta t) - f_1(t_0)}{\Delta t}, \dots, \frac{f_m(t_0 + \Delta t) - f_m(t_0)}{\Delta t} \right),$$

definita per $\Delta t \in \mathbb{R} - \{0\}$ tale che $t_0 + \Delta t \in I$, si chiama **rapporto incrementale relativo ad f e di punto iniziale t_0** .

Si dice che f è **derivabile in t_0** se la funzione in questione è convergente per $\Delta t \rightarrow 0$.

Se f è derivabile in t_0 , il limite:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$

che è un vettore di \mathbb{R}^m , dicesi **la derivata (prima) di f in t_0** e viene indicato con uno dei simboli introdotti per le funzioni reali di una variabile reale.

Osservazione 10 (Una definizione sbagliata) Consideriamo una funzione vettoriale $f : A \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ e un punto $P_0 = (x_1^0, \dots, x_k^0) \in \overset{\circ}{A}$. Si dice che f è derivabile parzialmente rispetto a una variabile x_i^0 nel punto P_0 quando la funzione $f(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \dots, x_k^0)$ è derivabile in x_i^0 . La definizione data è sbagliata perchè la funzione $f(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \dots, x_k^0)$ è una funzione vettoriale di una variabile reale, e per una funzione di tale tipo la derivabilità non è stata ancora definita.

Evidentemente

f è derivabile in t_0 se e solo se lo sono le sue componenti.

Quando ciò accade risulta:

$$f'(t_0) = (f'_1(t_0), \dots, f'_m(t_0)).$$

La funzione derivata prima e le derivate di ordine superiore si definiscono come per le funzioni reali di una variabile reale; la simbologia è la stessa.

• • •

Siano $f = (f_1, \dots, f_m)$ e $g = (g_1, \dots, g_m)$ funzioni vettoriali definite in $I \subseteq \mathbb{R}$, derivabili nel punto $t_0 \in I \cap DI$.

Ovviamente

$$D[f(t) + g(t)]_{t=t_0} = f'(t_0) + g'(t_0)$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad D[\lambda f(t)]_{t=t_0} = \lambda f'(t_0)$$

Aggiungiamo che

$$[D[f(t) \times g(t)]]_{t=t_0} = f'(t_0) \times g(t_0) + f(t_0) \times g'(t_0) \quad (3.1.1)$$

Infatti:

$$\begin{aligned} [D[f(t) \times g(t)]]_{t=t_0} &= \left[D \left[\sum_{i=1}^m f_i(t) g_i(t) \right] \right]_{t=t_0} = \left[\sum_{i=1}^m D[f_i(t) g_i(t)] \right]_{t=t_0} = \\ &= \sum_{i=1}^m \left[f'_i(t) g_i(t) \Big|_{t=t_0} + f_i(t) g'_i(t) \Big|_{t=t_0} \right] = \sum_{i=1}^m f'_i(t_0) g_i(t_0) + \sum_{i=1}^m f_i(t_0) g'_i(t_0) = \\ &= f'(t_0) \times g(t_0) + f(t_0) \times g'(t_0) \end{aligned}$$

Poichè $\forall t \in I$,

$$|f(t)|^2 = f(t) \times f(t)$$

dalla (3.1.1) si deduce che

$$\left[D|f(t)|^2 \right]_{t=t_0} = 2f(t_0) \times f'(t_0).$$

Nel caso $m = 3$ si ha anche:

$$D[f(t) \wedge g(t)]_{t=t_0} = f'(t_0) \wedge g(t_0) + f(t_0) \wedge g'(t_0)$$

e per rendersene conto bisogna tener presente che:

$$\forall t \in I \quad , \quad f(t) \wedge g(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ f_1(t) & f_2(t) & f_3(t) \\ g_1(t) & g_2(t) & g_3(t) \end{vmatrix}$$

3.2 Derivate parziali di una funzione reale di due variabili reali 61

Teorema 3.1 Sia f una funzione vettoriale a valori nello spazio vettoriale \mathbb{R}^m derivabile nell'intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$. Se il modulo di f è costante, allora:

$$\forall t \in I \quad , \quad f(t) \times f'(t) = 0$$

i.e.

$\forall t \in I$, i vettori $f(t)$ e $f'(t)$ sono ortogonali.

Dimostrazione — Infatti:

$$\forall t \in I, \quad 2f(t) \times f'(t) = D|f(t)|^2 = 0$$

□

3.2 Derivate parziali di una funzione reale di due variabili reali

Ricordiamo che le derivate delle funzioni di una variabile si chiamano anche **derivate ordinarie** e che l'operazione di derivazione ordinaria si denota col simbolo D .

Consideriamo ora una funzione reale di due variabili reale $f(x, y)$ definita in un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e un punto $P_0 = (x_0, y_0) \in A$.

Consideriamo poi la funzione $f(x, y_0)$, i.e. la funzione della sola variabile x ottenuta calcolando f lungo la parallela all'asse delle x passante per P_0 .

La funzione $f(x, y_0)$ è definita nell'insieme $\{x \in \mathbb{R}; (x, y_0) \in A\}$ e ha certa-

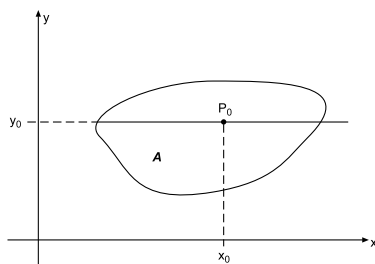


Figura 3.1: Sottoinsieme A di \mathbb{R}^2 dominio di f .

mente significato in un intorno di x_0 perchè P_0 è interno a A . Orbene, se la funzione $f(x, y_0)$ è derivabile in x_0 , si dice che la funzione di due variabili $f(x, y)$ è derivabile parzialmente rispetto a x in P_0 ; in tal caso poi la derivata ordinaria di $f(x, y_0)$ in x_0 si chiama la derivata parziale di $f(x, y)$ rispetto a x in P_0 e si denota con uno dei simboli:

$$f_x(P_0) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) \quad , \quad \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_{P=P_0} .$$

Naturalmente in tutti questi simboli si può sostituire a P_0 la coppia (x_0, y_0) .

In breve abbiamo posto:

$$f_x(x_0, y_0) = [Df(x, y)]_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Il rapporto incrementale

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

i.e. il rapporto incrementale della funzione $f(x, y)$ relativo a x_0 si chiama il rapporto incrementale parziale rispetto a x della funzione $f(x, y)$ relativo a P_0 .

Consideriamo ora la funzione $f(x_0, y)$, i.e. la funzione della sola variabile y ottenuta calcolando $f(x, y)$ lungo la parallela all'asse delle y passante per P_0 . Se la funzione $f(x_0, y)$ è derivabile in y_0 , la funzione $f(x, y)$ si dice

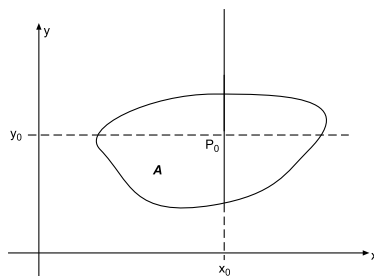


Figura 3.2: Sottoinsieme A di \mathbb{R}^2 dominio di f .

derivabile parzialmente rispetto a y in P_0 ; in tal caso la derivata ordinaria di $f(x_0, y)$ in y_0 si chiama la derivata parziale di f rispetto a y in P_0 e si denota con uno dei simboli

$$f_y(P_0) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) \quad , \quad \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right]_{P=P_0}$$

In breve abbiamo posto:

$$f_y(P_0) = [Df(x_0, y)]_{y=y_0} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Il rapporto incrementale

$$\frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

3.2 Derivate parziali di una funzione reale di due variabili reali 63

si chiama rapporto incrementale di $f(x, y)$ rispetto a y relativo a P_0 .

Per denotare la derivata parziale di f rispetto a x in un generico punto $(x, y) \in \overset{\circ}{A}$ si usano i simboli:

$$f_x(x, y) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y).$$

Dunque si ha:

$$f_x(x, y) = [Df(t, y)]_{t=x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

Simboli analoghi si usano per indicare la derivata parziale di f rispetto a y in un generico punto $(x, y) \in \overset{\circ}{A}$.

Con la locuzione *generico punto di $\overset{\circ}{A}$* s'intende un punto di $\overset{\circ}{A}$ denotato con lo stesso simbolo usato per denotare la variabile indipendente di f , i.e. col simbolo (x, y) o col simbolo P .

Osservazione 11 Dalla definizione precedente si deduce che, per calcolare la derivata parziale di f rispetto a x in un generico punto $(x, y) \in \overset{\circ}{A}$, basta calcolare la derivata ordinaria nel punto x (eguale alla prima coordinata del punto (x, y)) della funzione della sola variabile x che si ottiene dalla funzione $f(x, y)$ quando si considera y costante (eguale alla 2^a coordinata del punto (x, y)).

in modo analogo si procede per calcolare la derivata parziale di f rispetto a y in un generico punto $(x, y) \in \overset{\circ}{A}$.

Per esempio, considerata la funzione

$$f(x, y) = x + 3x^2y^2$$

con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ si ha:

$$f_x(x, y) = 1 + 6xy^2 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$f_y(x, y) = 0 + 3x^2 \cdot 2y = 6x^2y \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Pertanto, considerato ora un punto particolare di \mathbb{R}^2 , per esempio $(0, 1)$, si ha:

$$f_x(0, 1) = [1 + 6xy^2]_{(0,1)} = 1 + 0 = 1 \quad ; \quad f_y(0, 1) = [6x^2y]_{(0,1)} = 0.$$

Osservazione 12 Mentre, se f è una funzione di una variabile reale il simbolo

$$\frac{df(x_0)}{dx},$$

che denota la derivata $f'(x_0)$, può essere interpretato come un rapporto, e precisamente come il rapporto tra il differenziale di f in x_0 e il differenziale in x_0 della funzione identica x , se f è una funzione di due variabili il simbolo

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial x}$$

non può essere interpretato come rapporto.

Osservazione 13 Nella definizione di derivata parziale rispetto a x o rispetto a y di una funzione $f(x, y)$ in un punto P_0 abbiamo supposto che il punto P_0 si **aiuterno** all'insieme di definizione A di $f(x, y)$. Uno dei motivi di questa limitazione risiede nel fatto che, se P_0 è un punto di $A \cap FA$ (oltre che di DA), la definizione di derivata parziale di f rispetto a x o a y in P_0 come limite di un rapporto incrementale parziale può perdere significato.

Consideriamo ad esempio una funzione $f(x, y)$ definita nel cerchio chiuso A di \mathbb{R}^2 di centro l'origine e raggio 1 e consideriamo il punto $(0, 1) \in FA$.

Il rapporto incrementale parziale di $f(x, y)$ rispetto a x relativo al punto

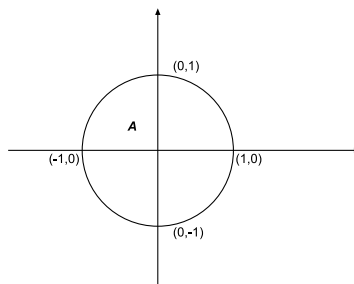


Figura 3.3: Cerchio chiuso A di \mathbb{R}^2 di centro l'origine e raggio unitario.

$(0, 1)$ è il rapporto:

$$\frac{f(0 + \Delta x, 1) - f(0, 1)}{\Delta x}.$$

L'insieme di definizione di questo rapporto incrementale è vuoto.

Pertanto non ha alcun senso porre

$$f_x(0, 1) = [Df(x, 1)]_{x=0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 1) - f(0, 1)}{\Delta x}.$$

Con considerazioni analoghe si vede che non ha senso definire come limiti di rapporti incrementali parziali le seguenti derivate

$$f_x(0, -1), f_y(1, 0), f_y(-1, 0).$$

Per il motivo ora visto e anche per altri motivi che saranno chiariti in seguito, le derivate parziali nei punti di frontiera saranno introdotte con un altro procedimento di cui parleremo di seguito.

3.3 Derivate parziali delle funzioni reali di più variabili reali.

Siano: $f(P)$ una funzione reale definita per $P = (x_1, \dots, x_k) \in A \subseteq \mathbb{R}^k$,
 $P_0 = (x_1^0, \dots, x_k^0) \in \overset{o}{A}$.
 Fissato $i \in \{1, \dots, k\}$, consideriamo la funzione reale della sola variabile x_i :

$$f(x_1^0, \dots, x_i, \dots, x_k^0) \tag{3.3.1}$$

la quale è definita nella parte di \mathbb{R} , $A_i = \{x_i \in \mathbb{R} : (x_1^0, \dots, x_i, \dots, x_k^0) \in A\}$.
 L'ipotesi che P_0 sia interno ad A vuole dire che esiste un intorno rettangolare di P_0

$$I =]x_1^0 - \delta_1, x_1^0 + \delta_1[\times \dots \times]x_i^0 - \delta_i, x_i^0 + \delta_i[\times \dots \times]x_k^0 - \delta_k, x_k^0 + \delta_k[$$

incluso in A , ciò implica che:

$$]x_i^0 - \delta_i, x_i^0 + \delta_i[\subseteq A_i$$

ossia che $x_i^0 \in \overset{o}{A_i}$.

Ciò premesso si dice che f è **derivabile parzialmente rispetto ad x_i nel punto P_0** , se la funzione (3.3.1) è derivabile in x_i^0 .

La derivata della (3.3.1) in x_i^0 prende il nome di **derivata parziale (prima) di f rispetto a x_i in P_0** e viene indicata con uno dei simboli:

$$f_{x_i}(P_0) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0) \quad , \quad \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(P) \right]_{P=P_0}$$

Dunque per definizione:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0) &= \left[\frac{d}{dx_i} f(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \dots, x_k^0) \right]_{x_i=x_i^0} = \\ &= \lim_{x_i \rightarrow x_i^0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \dots, x_k^0) - f(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i^0, x_{i+1}^0, \dots, x_k^0)}{x_i - x_i^0} = \\ &= \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_k^0) - f(x_1^0, \dots, x_i^0, \dots, x_k^0)}{\Delta x_i} \end{aligned}$$

Rileviamo che:

$$\left(\begin{array}{c} f \text{ derivabile parzialmente} \\ \text{rispetto a } x_i \text{ in } P_0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{c} f \text{ continua in } P_0 \\ \text{rispetto a } x_i \end{array} \right)$$

Si noti che dire che f è *continua parzialmente in P_0 rispetto a x_i* significa che la funzione $f(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \dots, x_k^0)$ è continua nel punto x_i^0 .
 Per dimostrare l'implicazione precedente bisogna notare che, per ipotesi,

la funzione $f(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \dots, x_k^0)$ è derivabile nel punto x_i^0 . Da ciò, poichè per le funzioni di una variabile reale la derivabilità implica la continuità, segue che la funzione $f(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \dots, x_k^0)$ è continua in x_i^0 .

Conseguentemente se f è dotata in P_0 di tutte le derivate parziali prime allora essa è continua in P_0 rispetto alle variabili separate.

Aggiungiamo che f , se dotata in P_0 di tutte le derivate parziali prime, non è detto che sia continua in P_0 , i.e.:

$$\left(\begin{array}{l} f \text{ è derivabile parzialmente} \\ \text{rispetto a } x_1, x_2, \dots, x_k \end{array} \right) \not\Rightarrow (f \text{ è continua in } P_0)$$

Esempio 18 Consideriamo la funzione reale definita in \mathbb{R}^2 :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

risultando:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0))}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta x \cdot 0}{(\Delta x)^2 + 0^2} - 0}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{(f(0, 0 + \Delta y) - f(0, 0))}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} 0 = 0$$

si ha:

$$f_x(0, 0) = 0 \quad , \quad f_y(0, 0) = 0$$

è noto che la funzione in questione non è continua nell'origine, infatti si ha:

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ x = y}} f(x, y) = \lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ x = y}} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ y = 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ y = 0}} 0 = 0$$

quindi

$$\nexists \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$$

e quindi f non è continua nel punto $P_0 = (0, 0)$.

3.3 Derivate parziali delle funzioni reali di più variabili reali. 67

Se f è dotata in P_0 di tutte le derivate parziali prime, il vettore:

$$(f_{x_1}(P_0), \dots, f_{x_k}(P_0))$$

dicesi il **gradiente di f in P_0** e viene indicato con uno dei simboli

$$\text{grad } f(P_0) \quad , \quad \nabla f(P_0) \quad (\nabla := \text{nabla})$$

Denotiamo con A_{x_i} l'insieme dei punti interni ad A in ciascuno dei quali f è dotata della derivata parziale rispetto a x_i .

Se $A_{x_i} \neq \emptyset$, la funzione reale

$$f_{x_i}(P)$$

definita per $P = (x_1, \dots, x_k) \in A_i$ dicesi **la derivata parziale (prima) di f rispetto a x_i** .

Fissato $j \in \{1, \dots, k\}$ la derivata parziale prima rispetto a x_j della funzione (f rispetto a x_i) f_{x_i} , quando esiste, dicesi **la derivata parziale seconda di f rispetto a x_i, x_j** e viene indicata con uno dei simboli

$$f_{x_i x_j} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

Dunque per definizione:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$$

se $i \neq j$ si parla di derivata parziale seconda **mista**, per $i = j$ si parla invece di derivata parziale seconda **pura** e si adopera una delle scritture:

$$f_{x_i^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

A partire dalle derivate parziali seconda si definiscono quelle di ordine superiore.

• • •

Sia: $f(P)$ una funzione reale definita per $P(y_1, \dots, y_k) \in A \subseteq \mathbb{R}^k$, $P_0 = (x_1^0, \dots, x_k^0) \in \overset{o}{A}$.

Supponiamo che esista un intorno I di P_0 incluso in A in ogni punto del quale f sia dotata delle derivate parziali:

$$f_{x_i} \quad , \quad f_{x_j} \quad , \quad f_{x_i x_j} \quad , \quad f_{x_j x_i} \quad \text{con } i \neq j$$

Ci chiediamo se è vera l'uguaglianza

$$f_{x_i x_j}(P_0) = f_{x_j x_i}(P_0) \tag{3.3.2}$$

La risposta è in generale negativa.

Consideriamo, ad esempio, la funzione definita in \mathbb{R}^2 :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y - y^3x}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

per la quale si ha:

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \\ f_x(x, y) &= \frac{(3x^2y - y^3)(x^2 + y^2) - 2x(x^3y - y^3x)}{(x^2 + y^2)^2} = \\ &= \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0 \Rightarrow \left(\begin{array}{l} \text{la derivata parziale di} \\ f \text{ nell'origine vale } 0 \end{array} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow f_x(0, 0) = 0 \end{aligned}$$

$$f_x(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f_x(0, \Delta y) - f_x(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{-\frac{(\Delta y)^5}{(\Delta y)^4}}{\Delta y} = -1$$

$$f_{yx}(0, 0) = 1.$$

Sussiste a tal proposito il

Teorema 3.2 (di Schwarz) *Siano: $f(P)$ una funzione reale definita per $P(x_1, \dots, x_k) \in A \subseteq \mathbb{R}^k$, $P_0 = (x_1^0, \dots, x_k^0) \in \overset{\circ}{A}$. Supponiamo che esiste un intorno I di P_0 incluso in A in ogni punto del quale f è dotata di derivate parziali*

$$f_{x_i}, \quad f_{x_j}, \quad f_{x_i x_j}, \quad f_{x_j x_i}$$

Se le derivate parziali seconde miste

$$f_{x_i x_j} \quad \text{e} \quad f_{x_j x_i}$$

sono continue in P_0 , allora

$$f_{x_i x_j}(P_0) = f_{x_j x_i}(P_0)$$

Dimostrazione — Omessa. □

3.4 Derivate parziali delle funzioni vettoriali di più variabili reali

• • •

Sia $f(P)$ una funzione reale definita per $P = (x_1, \dots, x_k) \in \Omega$, con Ω aperto di \mathbb{R}^k .

Supponiamo che f sia dotata, in Ω , di tutte le derivate parziali prime e seconde continue in Ω . In base al teorema di Schwartz le derivate seconde miste sono uguali.

Se f è dotata in Ω di tutte le derivate parziali prime, seconde e terza continue in Ω , i.e. se le derivate parziali prime di f sono dotate in Ω di tutte le derivate parziali prime e seconde continue in Ω , per quanto sopra detto le derivate parziali terze miste sono uguali.

in generale se f è dotata in Ω di tutte le derivate parziali fino a quelle di ordine m , con $m \geq 2$, continue in Ω , ogni derivata parziale mista di ordine r minore o uguale di m è indipendente dall'ordine delle variabili rispetto alle quali vengono effettuate le derivazioni e pertanto è lecito indicarla con uno dei simboli

$$f_{x_1^{r_1}, \dots, x_k^{r_k}} \quad ; \quad \frac{\partial^r f}{\partial x_1^{r_1} \cdot \dots \cdot \partial x_k^{r_k}}$$

dove r_1, \dots, r_k sono interi non negativi tali che $r_1 + \dots + r_k = r$, con la convenzione che per $r_i = 0$ non viene effettuata la derivazione rispetto a x_i .

3.4 Derivate parziali delle funzioni vettoriali di più variabili reali.

Siano: $f = (f_1, \dots, f_m)$ una funzione vettoriale definita in $A \subseteq \mathbb{R}^k$, $P_0 = (x_1^0, \dots, x_k^0) \in A$.

Fissato $i \in \{1, \dots, k\}$ consideriamo la funzione vettoriale della sola variabile x_i

$$\begin{aligned} f(x_1^0, \dots, x_i, \dots, x_k^0) = \\ = (f_1(x_1^0, \dots, x_i, \dots, x_k^0), \dots, f_m(x_1^0, \dots, x_i, \dots, x_k^0)) \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

definita nella parte di \mathbb{R} , $A_i = \{x_i \in \mathbb{R} : (x_1^0, \dots, x_i, \dots, x_k^0) \in A\}$.

Si dice che f è **derivabile parzialmente rispetto a x_i in P_0** se la funzione (3.4.1) è derivabile in x_i^0 . La derivata della (3.4.1) in x_i^0 dicesi allora **la derivata parziale (prima) di f rispetto a x_i in P_0** e viene indicata con gli stessi simboli introdotti per le funzioni reali.

Evidentemente f è derivabile parzialmente rispetto a x_i in P_0 se e solo se lo sono le sue componenti, e si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(P_0), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(P_0) \right).$$

Se f è dotata in P_0 di tutte le derivate parziali prime, la matrice avente per righe i gradienti delle componenti di f

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(P_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(P_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(P_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_k}(P_0) \end{pmatrix}$$

si chiama **matrice jacobiana di f in P_0** oppure **matrice jacobiana di f_1, \dots, f_m in P_0** e viene indicata con uno dei simboli

$$Jf(P_0) \quad , \quad \left[\frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(P_0) \right]$$

La parola "jacobiana" si legge "iacobiana" e deriva da Jacob Karl Gustav, nome di un matematico tedesco (1804-1851).

Se $k = m$ il determinante di detta matrice prende il nome di **determinante jacobiano di f in P_0** oppure di **determinante jacobiano di f_1, \dots, f_k in P_0** e viene denotato con uno dei simboli

$$\det Jf(P_0) \quad , \quad \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(P_0)$$

Se risulta $k > m$, i.e. il numero delle variabili indipendenti reali è maggiore del numero delle funzioni, non ha senso definire il determinante jacobiano di f_1, \dots, f_m rispetto a x_1, \dots, x_k , ma ha senso definire il determinante jacobiano delle funzioni f_1, \dots, f_m , rispetto a una delle variabili x_1, x_2, \dots, x_k .

Esempio 19 Consideriamo due funzioni reali di tre variabili $f(x, y, z), g(x, y, z)$. Allora si ha:

$$\left[\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y, z)} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{bmatrix};$$

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y, z)}$$

non ha senso, mentre risulta:

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{vmatrix}$$

• • •

La funzione derivata parziale (prima) di f rispetto a x_i e le derivate parziali di f di ordine superiore al primo si definiscono come nel caso delle funzioni reali. La simbologia è la stessa. Ovviamente alle funzioni vettoriali si estendono il *teorema di Schwartz* e le sue conseguenze.

3.5 Funzioni di classe $C^0, C^m (m \in \mathbb{N}), C^\infty$. Derivazione sulla frontiera.

Definizione 36 Una funzione, che sia continua in un aperto Ω di \mathbb{R}^k , dicesi **di classe C^0 in Ω** .

Definizione 37 Una funzione reale, che sia dotata di tutte le derivate parziali prime continue in un aperto Ω di \mathbb{R}^k , dicesi **di classe C^1 in Ω** . In seguito vedremo che ogni funzione reale di classe C^1 in Ω è ivi anche di classe C^0 .

Definizione 38 Una funzione reale, che sia dotata in un aperto Ω di \mathbb{R}^k di tutte le derivate parziali fino a quelle di ordine $n (n \in \mathbb{N})$ continue in Ω , dicesi **di classe C^n in Ω** .

Definizione 39 Una funzione reale, che sia dotata in un aperto Ω di \mathbb{R}^k di tutte le derivate parziali di qualsiasi ordine continue in Ω , dicesi **di classe C^∞ in Ω** .

Denotiamo con $C^n(\Omega) (n \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\})$ l'insieme delle funzioni reali di classe C^n in Ω . Poichè

$$\begin{aligned} \forall f, g \in C^n(\Omega) \quad , \quad f + g \in C^n(\Omega) \\ \forall \lambda \in R, f \in C^n(\Omega) \quad , \quad \lambda f \in C^n(\Omega) \end{aligned} \quad ,$$

$C^n(\Omega)$, con le operazioni di addizione e di moltiplicazione per un numero reale, è uno spazio vettoriale reale.

Rileviamo esplicitamente che

$$C^\infty(\Omega) \subset C^n(\Omega) \quad (n \in \mathbb{N}) \subset C^0(\Omega)$$

• • •

Siano: $f(P)$ una funzione reale definita per $P = (x_1, \dots, x_k) \in D$ con D dominio di \mathbb{R}^k , $P_0 = (x_1^0, \dots, x_k^0) \in \partial D$. Supponiamo che f sia dotata,

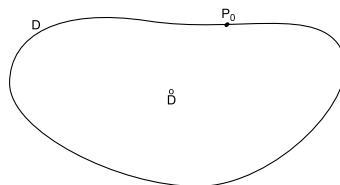


Figura 3.4: D dominio di \mathbb{R}^k .

nell'interno di D , della derivata parziale rispetto ad x_i continua. Poichè P_0 è di accumulazione per l'interno di D , ha senso studiare il limite:

$$\lim_{\substack{P \rightarrow P_0 \\ P \in \overset{\circ}{D}}} f_{x_i}(P) \quad (3.5.1)$$

Se detto limite esiste ed è finito, allora suol dirsi che **la derivata parziale di f rispetto a x_i è prolungata per continuità in P_0 dall'interno di D** . In tal caso il limite (3.5.1) dicesi **la derivata parziale (prima) di f rispetto a x_i in P_0** e viene indicata con uno dei simboli introdotti precedentemente.

Supponiamo che f sia dotata nell'interno di D della derivata parziale seconda rispetto a $x_i x_j$ continua. Se esiste ed è finito il limite

$$\lim_{\substack{P \rightarrow P_0 \\ P \in \overset{\circ}{D}}} f_{x_i x_j}(P) \quad (3.5.2)$$

allora suol dirsi che **la derivata parziale seconda di f rispetto ad $x_i x_j$ è prolungabile per continuità in P_0 dall'interno di D** ; inoltre il limite (3.5.2) prende il nome di **derivata parziale seconda di f rispetto ad $x_i x_j$ in P_0** e viene indicata con i simboli usuali.

Rileviamo esplicitamente che, se il limite (3.5.2) esiste ed è finito e se f è dotata nell'interno di D **anche** della derivata parziale seconda rispetto a $x_j x_i$ continua, stante il teorema di Schwartz si ha:

$$\lim_{\substack{P \rightarrow P_0 \\ P \in \overset{\circ}{D}}} f_{x_j x_i}(P) = \lim_{\substack{P \rightarrow P_0 \\ P \in \overset{\circ}{D}}} f_{x_i x_j}(P) = f_{x_i x_j}(P_0)$$

ossia la derivata parziale seconda di f rispetto a $x_j x_i$ è prolungabile per continuità in P_0 dall'interno di D e risulta:

$$f_{x_j x_i}(P_0) = f_{x_i x_j}(P_0).$$

Allo stesso modo si definiscono le derivate parziali di f di ordine superiore al secondo nel punto P_0 .

Sia $f(P)$ una funzione reale definita per $P = (x_1, \dots, x_k) \in D$ con D dominio di \mathbb{R}^k .

Si dice che f è **di classe C^0 in D** se essa è continua in D .

Si dice che f è **di classe C^n [C^∞] in D** se:

1. f è di classe C^0 in D
2. ogni derivata parziale di f di ordine minore o uguale a n [di qualsiasi ordine] è continua nell'interno di D ed è prolungabile per continuità in ogni punto di ∂D dall'interno di D .

3.6 Divergenza e rotore di un campo vettoriale. Laplaciano di una funzione reale. **73**

Evidentemente l'insieme $C^n(D)$ ($n \in \mathbb{N}_0 \cup U\{\infty\}$) delle funzioni reali di classe C^n in D , con le operazioni di addizione e di moltiplicazione per un numero reale è uno spazio vettoriale reale. Da notare che

$$C^\infty(D) \subset C^n(D) (n \in \mathbb{N}) \subset C^0(D)$$

• • •

Le considerazioni svolte precedentemente si ripetono pari pari con riferimento a funzioni vettoriali.

• • •

Definizione 40 Si chiama **campo vettoriale** ogni funzione vettoriale nella quale il numero delle componenti è uguale al numero delle variabili indipendenti, i.e. ogni funzione vettoriale del tipo:

$$\mathbf{v} : P \in A \subseteq \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbf{v}(P) \in \mathbb{R}^k \tag{3.5.3}$$

Osservazione 14 La denominazione **campo vettoriale** data a una funzione del tipo (3.5.3) è suggerita dal fatto che, se indichiamo ancora con $\mathbf{v}(P)$ il vettore geometrico di \mathbb{R}^k corrispondente al vettore numerico $\mathbf{v}(P)$ (i.e. avente le stesse componenti di $\mathbf{v}(P)$), il vettore geometrico applicato $(P, \mathbf{v}(P))$, al variare di P in A , descrive una famiglia di vettori geometrici applicati nei punti di A , i.e. descrive quello che si chiama un campo di vettori geometrici applicati nei punti di A .

3.6 Divergenza e rotore di un campo vettoriale. Laplaciano di una funzione reale.

Sia

$$\mathbf{v}(P) = v_1(P) \mathbf{e}_1 + \dots + v_k(P) \mathbf{e}_k$$

un campo vettoriale definito per $P = (x_1, \dots, x_k) \in \Omega$ con Ω aperto di \mathbb{R}^k . Supponiamo:

v_1 dotato in Ω della derivata parziale rispetto ad x_1

v_2 dotato in Ω della derivata parziale rispetto ad x_2

...

v_k dotato in Ω della derivata parziale rispetto ad x_k

la funzione reale

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(P) = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^k \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(P) \quad \forall P \in \Omega$$

dicesi **la divergenza di \mathbf{v}** .

un campo vettoriale dicesi **indivergente** se la sua divergenza è identicamente nulla in Ω .

Osservazione 15 Si noti che la definizione di divergenza di una funzione vettoriale \mathbf{v} si può dare solo quando il numero delle sue componenti è uguale al numero delle variabili reali indipendenti, i.e. si può dare solo quando la funzione vettoriale \mathbf{v} è un campo vettoriale. Si noti anche che la divergenza di un campo vettoriale \mathbf{v} è una funzione scalare.

Sia $f(P)$ una funzione reale definita per $P = (x_1, \dots, x_k) \in \Omega$ con Ω aperto di \mathbb{R}^k , dotata in Ω di tutte le derivate parziali seconde pure.

La funzione reale

$$\Delta_2 f(P) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(P) \quad \forall P \in \Omega$$

dicesi **il laplaciano di f** .

Da notare che

$$\Delta_2 f(P) = \operatorname{div}(\nabla f(P)) \quad \forall P \in \Omega$$

Sia

$$\mathbf{v}(P) = v_1(P)\mathbf{i} + v_2(P)\mathbf{j} + v_3(P)\mathbf{k}$$

un campo vettoriale definito per $P = (x, y, z) \in \Omega$ con Ω aperto di \mathbb{R}^3 . Supponiamo:

v_1 dotata in Ω della derivata parziale rispetto a y e della derivata parziale rispetto a z ,

v_2 dotata in Ω della derivata parziale rispetto ad x e della derivata parziale rispetto a z ,

v_3 dotata in Ω della derivata parziale rispetto ad x e della derivata parziale rispetto a y .

Il campo vettoriale:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{v}(P) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1(P) & v_2(P) & v_3(P) \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial v_3}{\partial y}(P) - \frac{\partial v_2}{\partial z}(P) \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z}(P) - \frac{\partial v_3}{\partial x}(P) \right) \mathbf{j} + \\ &\quad + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x}(P) - \frac{\partial v_1}{\partial y}(P) \right) \mathbf{k} \quad \forall P \in \Omega \end{aligned}$$

dicesi il **rotore di \mathbf{v}** .

un campo vettoriale del piano o dello spazio dicesi **irrotazionale** se il suo rotore è identicamente nullo.

Osservazione 16 Si noti che la definizione di rotore di una funzione vettoriale \mathbf{v} si può dare solo quando la funzione vettoriale \mathbf{v} è una funzione a tre componenti e di tre variabili reali, i.e. si può dare solo quando la funzione vettoriale \mathbf{v} è un campo vettoriale a 3 componenti.

Si noti ancora che il rotore di un campo vettoriale a tre componenti è ancora un campo vettoriale a tre componenti.

3.7 Funzioni differenziabili

3.7.1 Funzioni reali

Consideriamo una funzione reale di k variabili

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$$

e un punto $P_0 = (x_1^0, \dots, x_k^0) \in A$. Si chiama **incremento di f relativo al punto P_0** , e si denota con Δf , la funzione del vettore numerico $\Delta P = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_k)$ definita come segue:

$$\Delta f = f(P_0 + \Delta P) - f(P_0) = f(x_1^0 + \Delta x_1, \dots, x_k^0 + \Delta x_k) - f(x_1^0, \dots, x_k^0)$$

Si noti che la funzione Δf è definita nell'insieme

$$A(P_0) = \left\{ \Delta P = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_k) \in \mathbb{R}^k : P_0 + \Delta P \in A \right\}.$$

Osserviamo che $\mathbf{0}$ appartiene all'interno di $A(P_0)$, i.e. $\mathbf{0} \in (A(P_0))^0$. infatti essendo P_0 interno ad A , esiste un $\delta_0 > 0$ tale che il cerchio aperto $C(P_0, \delta_0)$ di centro P_0 e raggio δ_0 sia incluso in A ; ciò implica che il cerchio aperto $C(\mathbf{0}, \delta_0)$ di centro il vettore nullo e raggio δ_0 è contenuto in $A(P_0)$. Si dice che f è **differenziabile in P_0** se esiste un vettore $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ tale che

$$\lim_{\Delta P \rightarrow \mathbf{0}} \frac{f(P_0 + \Delta P) - f(P_0) - \mathbf{a} \times \Delta P}{|\Delta P|} = 0 \quad (3.7.1)$$

Teorema 3.3 Se f è differenziabile in P_0 , allora:

1. f è continua in P_0 ,
2. f è dotata in P_0 di tutte le derivate parziali prime e si ha:

$$\nabla f(P_0) = \mathbf{a}$$

Dimostrazione — Circa la 1) si ha:

$$\begin{aligned}
 & \lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = \\
 &= \lim_{P \rightarrow P_0} [f(P) - f(P_0) + f(P_0)] = \\
 &= \lim_{P \rightarrow P_0} [f(P_0 + (P - P_0)) - f(P_0) + f(P_0)] = \\
 &= \lim_{\Delta P \rightarrow 0} [f(P_0 + \Delta P) - f(P_0) + f(P_0)] = \\
 &= \lim_{\Delta P \rightarrow 0} \left[\frac{f(P_0 + \Delta P) - f(P_0) - \mathbf{a} \times \Delta P}{|\Delta P|} |\Delta P| + \mathbf{a} \times \Delta P + f(P_0) \right] = \\
 &= 0 \cdot 0 + 0 + f(P_0) = f(P_0)
 \end{aligned}$$

quindi la f è continua in P_0 .

Verifichiamo la 2). Sia $\varepsilon > 0$, la (3.7.1) comporta l'esistenza di un $\delta_\varepsilon \in]0, \delta_0[$ in modo che:

$$\forall \Delta P \in (0, \delta_\varepsilon) - \{0\} \quad \frac{f(P_0 + \Delta P) - f(P_0) - \mathbf{a} \times \Delta P}{|\Delta P|} < \varepsilon, \quad (3.7.2)$$

sicchè $\forall i \in \{1, \dots, k\}$ e $\forall \Delta x_i \in]-\delta_\varepsilon, \delta_\varepsilon[- \{0\}$

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{f(x_1^0, \dots, x_i^0 + \Delta x_i, \dots, x_k^0) - f(x_1^0, \dots, x_i^0, \dots, x_k^0)}{\Delta x_i} - a_i \right| = \\
 &= \left| \frac{f(x_1^0, \dots, x_i^0 + \Delta x_i, \dots, x_k^0) - f(x_1^0, \dots, x_i^0, \dots, x_k^0) - a_i \Delta x_i}{\Delta x_i} \right| < \varepsilon
 \end{aligned}$$

La (3.7.2) ci dice che $\forall i \in \{1, \dots, k\}$

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_i^0 + \Delta x_i, \dots, x_k^0) - f(x_1^0, \dots, x_i^0, \dots, x_k^0)}{\Delta x_i} = a_i \Delta x_i$$

ossia che

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0) = a_i \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}$$

□

Se f è differenziabile in P_0 , il gradiente di f in P_0 assume la denominazione di **derivata (prima) di f in P_0** e viene indicato anche con uno dei simboli:

$$f'(P_0) \quad , \quad f^{(1)}(P_0) \quad , \quad [Df(P_0)] \quad , \quad [D'f(P)]_{P=P_0} ;$$

l'operatore lineare

$$df(P_0) [d'f(P_0)] : \Delta P \in \mathbb{R}^k \rightarrow \nabla f(P_0) \times \Delta P = \sum_{i=1}^k f_{x_i}(P_0) \Delta x_i$$

dicesi il **differenziale (primo) di f relativo al punto P_0** .

Osservazione 17 La (3.7.1) significa che, assegnato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta_\varepsilon \in]0, \delta_0[$ in modo che:

$$\forall \Delta P \in C(\mathbf{0}, \delta_\varepsilon) - \{\mathbf{0}\} \quad |\Delta f(P_0)(\Delta P) - df(P_0)(\Delta P)| < \varepsilon \cdot |\Delta P| < \varepsilon \delta_\varepsilon \quad (3.7.3)$$

La (3.7.1) ci dice che per valori di ΔP in modulo sufficientemente piccoli, il differenziale di f relativo al punto P_0 fornisce una buona approssimazione dell'incremento di f relativo a P_0 . Per tale ragione nelle *scienze applicate* si adopera l'uguaglianza approssimata

$$\Delta f(P_0) \approx df(P_0).$$

Osservazione 18 Spesso la scrittura $\Delta P = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_k)$ viene sostituita con $dP = (dx_1, \dots, dx_k)$.

Osservazione 19 L'ipotesi che f sia continua in P_0 e ivi dotata di tutte le derivate parziali prime non assicura la differenziabilità di f in P_0 .

Consideriamo, ad esempio, la funzione

$$f(x, y) = \sqrt{|xy|} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

la quale è continua nell'origine $O = (0, 0)$.

Risultando

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0 \\ \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta y} = 0 \end{aligned}$$

si ha:

$$f_x(0, 0) = 0 \quad , \quad f_y(0, 0) = 0.$$

Aggiungiamo che, posto:

$$B_1 = \{\Delta P = (\Delta x, 0) : \Delta x \neq 0\} \quad , \quad B_2 = \{\Delta P = (\Delta x, \Delta x) : \Delta x \neq 0\}$$

risulta:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\Delta P \rightarrow \mathbf{0} \\ \Delta P \in B_1}} \frac{f(0 + \Delta P) - f(0) - \nabla f(0) \times \Delta P}{|\Delta P|} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{|\Delta x|} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{|\Delta x|} = 0 \\ \lim_{\substack{\Delta P \rightarrow \mathbf{0} \\ \Delta P \in B_2}} \frac{f(0 + \Delta P) - f(0) - \nabla f(0) \times \Delta P}{|\Delta P|} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, \Delta x) - f(0, 0)}{\sqrt{2}\Delta x^2} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{|\Delta x| \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

sicchè il rapporto

$$\frac{f(0 + \Delta P) - f(0) - \nabla f(0) \times \Delta P}{|\Delta P|}$$

non è regolare per $\Delta P \rightarrow \mathbf{0}$, in particolare f non è differenziabile nell'origine.

Una condizione sufficiente per la differenziabilità di una funzione in un punto è espressa dal seguente

Teorema 3.4 (Condizione sufficiente di differenziabilità) *Siano: $f(P)$ una funzione reale definita in $A \subseteq \mathbb{R}^k$, $P_0 \in A$. Se f è dotata in un intorno di P_0 di tutte le derivate parziali prime e se tali derivate sono continue in P_0 , allora f è differenziabile in P_0 .*

Dimostrazione — Dimostriamo il teorema in questione per $k = 2$. riferiamoci quindi ad una funzione reale $f(x, y)$ definita in $A \subseteq \mathbb{R}^2$, dotata nell'intorno del punto $P_0 = (x_0, y_0) \in A$:

$$I =]x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1[\times]y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2[\subseteq A$$

di entrambe le derivate parziali prime, tali derivate essendo continue in P_0 .

Fissato $\Delta P = (\Delta x, \Delta y) \neq 0$ in modo che $P_0 + \Delta P \in I$, intanto si ha:

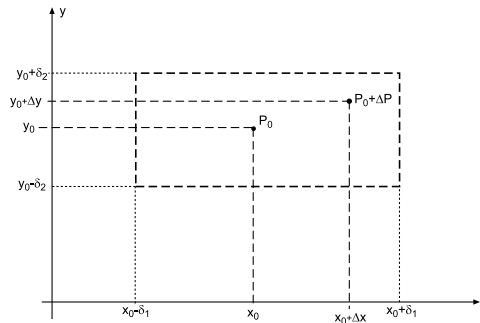


Figura 3.5: Rappresentazione geometrica di $I \subseteq A$.

$$\begin{aligned} f(P_0 + \Delta P) - f(P_0) &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \\ &= [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] + [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] \end{aligned} \quad (3.7.4)$$

La funzione della variabile x , $f(x, y_0 + \Delta y)$ è derivabile in $]x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1[$ e si ha:

$$\frac{d}{dx} f(x, y_0 + \Delta y) = f_x(x, y_0 + \Delta y) \quad \forall x \in]x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1[$$

Pertanto il teorema di Lagrange, riferito all'intervallo compatto di estremi x_0 e $x_0 + \Delta x$ assicura l'esistenza $\vartheta_1(\Delta P) \in]0, 1[$ tale che:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) = f_x(x_0 + \vartheta_1(\Delta P)\Delta x, y_0 + \Delta y)\Delta x \quad (3.7.5)$$

La funzione della variabile y , $f(x_0, y)$ è derivabile nell'intervallo $]x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2[$ e si ha:

$$\frac{d}{dy}f(x_0, y) = f_y(x_0, y) \quad \forall y \in]y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2[$$

Di conseguenza lo stesso teorema di Lagrange, riferito all'intervallo compatto di estremi y_0 e $y_0 + \Delta y$, garantisce l'esistenza di $\vartheta_2(\Delta P) \in]0, 1[$ in modo che

$$f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0 + \vartheta_2(\Delta P)\Delta y)\Delta y \quad (3.7.6)$$

Dalle (3.7.4), (3.7.5) e (3.7.6) si trae che:

$$f(P_0 + \Delta P) - f(P_0) = f_x(x_0 + \vartheta_1(\Delta P)\Delta x, y_0 + \Delta y)\Delta x + f_y(x_0, y_0 + \vartheta_2(\Delta P)\Delta y)\Delta y$$

cosicch 

$$\begin{aligned} & \frac{f(P_0 + \Delta P) - f(P_0) - \nabla f(P_0) \times \Delta P}{|\Delta P|} \\ &= \frac{[f_x(x_0 + \vartheta_1(\Delta P)\Delta x, y_0 + \Delta y)\Delta x - f_x(x_0, y_0)]\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} + \\ &+ \frac{[f_y(x_0, y_0 + \vartheta_2(\Delta P)\Delta y)\Delta y - f_y(x_0, y_0)]\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(P_0 + \Delta P) - f(P_0) - \nabla f(P_0) \times \Delta P}{|\Delta P|} \right| \leq \\ & \leq |f_x(x_0 + \vartheta_1(\Delta P)\Delta x, y_0 + \Delta y)\Delta x - f_x(x_0, y_0)| \frac{|\Delta x|}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} + \\ & + |f_y(x_0, y_0 + \vartheta_2(\Delta P)\Delta y)\Delta y - f_y(x_0, y_0)| \frac{|\Delta y|}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \leq \\ & \leq |f_x(x_0 + \vartheta_1(\Delta P)\Delta x, y_0 + \Delta y)\Delta x - f_x(x_0, y_0)| + \\ & + |f_y(x_0, y_0 + \vartheta_2(\Delta P)\Delta y)\Delta y - f_y(x_0, y_0)| \end{aligned} \quad (3.7.7)$$

Osserviamo che essendo $\vartheta_1(\Delta P)$ e $\vartheta_2(\Delta P)$ funzioni limitate, si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta P \rightarrow \mathbf{0}} (x_0 + \vartheta_1(\Delta P)\Delta x, y_0 + \Delta y) &= (x_0, y_0) \\ \lim_{\Delta P \rightarrow \mathbf{0}} (x_0, y_0 + \vartheta_2(\Delta P)\Delta y) &= (x_0, y_0) \end{aligned}$$

e ciò, stante la continuità in P_0 delle derivate parziali prime di f , comporta che:

$$\lim_{\Delta P \rightarrow \mathbf{0}} f_x(x_0 + \vartheta_1(\Delta P)\Delta x, y_0 + \Delta y) = f_x(x_0, y_0) \quad (3.7.8)$$

$$\lim_{\Delta P \rightarrow \mathbf{0}} f_y(x_0, y_0 + \vartheta_2(\Delta P)\Delta y) = f_y(x_0, y_0) \quad (3.7.9)$$

Dalle (3.7.7), (3.7.8) e (3.7.9) si deduce che:

$$\lim_{\Delta P \rightarrow \mathbf{0}} \frac{f(P_0 + \Delta P) - f(P_0) - \nabla f(P_0) \times \Delta P}{|\Delta P|} = 0$$

ossia che f è differenziabile in P_0 . □

Conseguenza immediata del teorema (3.4) è il

Teorema 3.5 *Una funzione reale che sia di classe C^1 in un aperto Ω di \mathbb{R}^k , è differenziabile in Ω (i.e. differenziabile in ogni punto di Ω) e quindi continua in Ω .*

Dimostrazione — Omessa. □

3.7.2 Funzioni vettoriali

Siano: $f = (f_1, \dots, f_m)$ una funzione vettoriale definita in $A \subseteq \mathbb{R}^k$, $P_0 \in A$.
Posto

$$A(P_0) = \left\{ \Delta P \in \mathbb{R}^k : P_0 + \Delta P \in A \right\}$$

la funzione

$$\begin{aligned} \Delta f(P_0) : \Delta P \in A(P_0) &\rightarrow f(P_0 + \Delta P) - f(P_0) = \\ &= (f_1(P_0 + \Delta P) - f_1(P_0), \dots, f_m(P_0 + \Delta P) - f_m(P_0)) \end{aligned}$$

dicesi l'incremento di f relativo al punto P_0 .

Da notare che

$$\Delta f(P_0) = (\Delta f_1(P_0), \dots, \Delta f_m(P_0)).$$

Si dice che f è **differenziabile in P_0** se esiste una matrice reale $A = (a_{ij})$ ad m righe e k colonne tale che:

$$\lim_{\Delta P \rightarrow \mathbf{0}} \frac{f(P_0 + \Delta P) - f(P_0) - A \nabla P}{|\Delta P|} = \mathbf{0}$$

Poichè

$$\begin{aligned} \forall \Delta P \in A(P_0) - \{0\} \quad & \frac{f(P_0 + \Delta P) - f(P_0) - A \nabla P}{|\Delta P|} = \\ = & \left(\frac{f_1(P_0 + \Delta P) - f_1(P_0) - \sum_{j=1}^k a_{1j} \Delta x_j}{|\Delta P|}, \dots, \right. \\ & \left. \dots, \frac{f_m(P_0 + \Delta P) - f_m(P_0) - \sum_{j=1}^k a_{mj} \Delta x_j}{|\Delta P|} \right) \end{aligned}$$

si ha che f è differenziabile in P_0 se e solo se sono differenziabili in P_0 le sue componenti. Pertanto, tenendo presente il teorema 3.3 possiamo enunciare il

Teorema 3.6 *Se f è differenziabile in P_0 , allora:*

1. f è continua in P_0 ;
2. f è dotata in P_0 di tutte le derivate prime e si ha $Jf(P_0) = A$.

Dimostrazione — Omessa. □

Se f è differenziabile in P_0 , la matrice jacobiana di f in P_0 assume la denominazione di **derivata (prima) di f in P_0** e viene indicata con uno dei simboli

$$f'(P_0) \quad , \quad f^{(1)}(P_0) \quad , \quad [Df(P)]_{P=P_0} \quad , \quad [D^{(1)}f(P)]_{P=P_0}$$

L'operatore lineare definito nello spazio vettoriale \mathbb{R}^k ed a valori nello spazio vettoriale \mathbb{R}^m .

$$df(P_0) [d^1 f(P_0)] : \Delta P \in \mathbb{R}^k \rightarrow Jf(P_0) \Delta P$$

dicesi il **differenziale (primo) di f relativo a P_0** .

Da notare che:

$$df(P_0) = (df_1(P_0), \dots, df_m(P_0))$$

3.8 Derivazione delle funzioni composte

3.8.1 Funzione composte reali di una variabile reale

Siano : $f(P)$ una funzione reale definita per $P = (x_1, \dots, x_m) \in A \subseteq \mathbb{R}^m$,
 $x(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))$ una funzione vettoriale definita per $t \in T \subseteq \mathbb{R}$.

Ammesso che

$$x(t) \in A \quad \forall t \in T,$$

consideriamo la funzione composta

$$F(t) = f(x(t)) = f(x(t)) \quad \forall t \in A$$

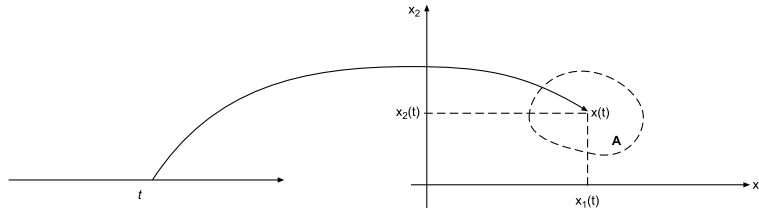


Figura 3.6: Funzioni composte reali di una variabile reale.

Teorema 3.7 *Nelle ipotesi:*

$i_1)$ x è derivabile nel punto $t_0 \in T \cap DT$;

$i_2)$ $x(t_0) \in \overset{\circ}{A}$ ed f differenziabile in $x(t_0)$,

la funzione F è derivabile in t_0 e si ha:

$$F'(t_0) = \text{grad } f(x(t_0)) \times x'(t_0) = \sum_{i=1}^m f_{x_i}(x(t_0)) x'_i(t_0) \quad (3.8.1)$$

Dimostrazione — Consideriamo la funzione di $\Delta P = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_m)$:

$$r(\Delta P) = f(x(t_0) + \Delta P) - f(x(t_0)) - \text{grad } f(x(t_0)) \times \Delta P$$

definita per $\Delta P \in \mathbb{R}^m$ tale che $[x(t_0) + \delta P] \in A$.

La $i_2)$ ci dice che:

$$\lim_{\Delta P \rightarrow \mathbf{0}} \frac{r(\Delta P)}{|\Delta P|} = 0$$

cosicché, posto

$$\varpi(\Delta P) = \begin{cases} \frac{r(\Delta P)}{|\Delta P|} & \text{se } \Delta P \neq \mathbf{0} \\ 0 & \text{se } \Delta P = \mathbf{0} \end{cases}$$

si ha:

$$\lim_{\Delta P \rightarrow \mathbf{0}} \varpi(\Delta P) = 0 \quad (3.8.2)$$

ed inoltre

$$f(x(t_0) + \Delta P) - f(x(t_0)) = \text{grad } f(x(t_0)) \times \Delta P + \varpi(\Delta P) |\Delta P| \quad (3.8.3)$$

per ogni $\Delta P \in \mathbb{R}^m$ tale che $x(t_0) + \Delta P \in A$.

Osservato che

$$x(t_0) + (x(t) - x(t_0)) \in A \quad \forall t \in T$$

(in quanto $x(t_0) + (x(t) - x(t_0)) = x(t) \in A$) assumendo nella (3.8.3) $\Delta P = x(t) - x(t_0)$, si ottiene

$$F(t) - F(t_0) = \text{grad } f(x(t_0)) \times (x(t) - x(t_0)) + \varpi(x(t) - x(t_0)) |x(t) - x(t_0)| \quad \forall t \in T \quad (3.8.4)$$

da cui

$$\begin{aligned} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} &= \text{grad } f(x(t_0)) \times \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} + \\ &+ \varpi(x(t) - x(t_0)) \frac{|x(t) - x(t_0)|}{t - t_0} \quad \forall t \in T - \{t_0\} \end{aligned}$$

Poichè per la i_1 :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} &= x'(t_0) \quad (3.8.5) \\ \lim_{t \rightarrow t_0} (x(t) - x(t_0)) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

tenendo presente la (3.8.2), risulta:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} \varpi(x(t) - x(t_0)) \frac{|x(t) - x(t_0)|}{t - t_0} &= \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \varpi(x(t) - x(t_0)) \frac{|x(t) - x(t_0)|}{|t - t_0|} = \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} |\varpi(x(t) - x(t_0))| \frac{|x(t) - x(t_0)|}{|t - t_0|} = 0 |x'(t_0)| = 0. \end{aligned}$$

ossia

$$= \lim_{t \rightarrow t_0} \left[\varpi(x(t) - x(t_0)) \frac{|x(t) - x(t_0)|}{t - t_0} \right] = 0 \quad (3.8.6)$$

Dalla (3.8.4), (3.8.5) e (3.8.6) si trae che:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} &= \lim_{t \rightarrow t_0} \sum_{i=1}^m f_{x_i}(x(t_0)) \frac{[x_i(t) - x_i(t_0)]}{t - t_0} = \\ &= \sum_{i=1}^m f_{x_i}(x(t_0)) \cdot x'_i(t_0) \end{aligned}$$

i.e. la (3.8.1). □

Osservazione 20 Nelle ipotesi del teorema 3.7 si ha:

$$\begin{aligned} \forall \Delta t \in \mathbb{R} \quad F'(t_0) \Delta t &= \left(\sum_{i=1}^m f_{x_i}(x(t_0)) \cdot x'_i(t_0) \right) \Delta t = \\ &= \sum_{i=1}^m f_{x_i}(x(t_0)) \cdot x'_i(t_0) \Delta t \end{aligned}$$

i.e.

$$dF(t_0) = \sum_{i=1}^m f_{x_i}(x(t_0)) \cdot dx_i(t_0).$$

Dunque: il differenziale di F relativo al punto t_0 si ottiene **formalmente** dal differenziale di f relativo al punto $x(t_0)$ sostituendo dx_i col differenziale della funzione x_i relativo al punto t_0 .

Tale circostanza va sotto il nome di **invarianza del differenziale primo**. Avvertiamo che ciò non vale per il differenziale di ordine superiore al primo.

• • •

Siano: $f(P)$ una funzione reale definita per $P = (x_1, \dots, x_m) \in \Omega$ (con Ω aperto di \mathbb{R}^m) $x(t) = x_1(t), \dots, x_m(t)$ una funzione vettoriale definita per $t \in T$, con T intervallo di \mathbb{R} , con T intervallo di \mathbb{R} tale che $x(t) \in \Omega \quad \forall t \in T$, $F(t) = f(x(t)) \quad \forall t \in T$.

Se $f(P)$ è di classe C^0 in Ω (f continua in Ω) e $x(t)$ è di classe C^0 in T , allora $F(t)$ è di classe C^0 in T (**una funzione composta da funzioni continue è continua**).

Supponiamo che $f(P)$ sia di classe C^1 in Ω e $x(t)$ di classe C^1 in T . Essendo $f(P)$ differenziabile in ogni punto di Ω , in base al teorema 3.7 $F(t)$ è derivabile con T e si ha:

$$F'(t) = \sum_{i=1}^m f_{x_i}(x_1(t), \dots, x_m(t)) \cdot x'_i(t) \quad \forall t \in T \quad (3.8.7)$$

da cui si evince che $F'(t)$ è continua in T , ossia: $F(t)$ è di classe C^1 in T . Supponiamo ora che $f(P)$ sia di classe C^2 in Ω e $x(t)$ di classe C^2 in T . Poichè le derivate parziali prime di f sono di classe C^1 in Ω , per quanto stabilito poc'anzi la funzione composta

$$f_{x_i}(x_1(t), \dots, x_m(t))$$

è di classe C^1 in T ; pertanto, avendo ipotizzato che la derivata prima di $x(t)$ è di classe C^1 in T , il prodotto

$$f_{x_i}(x_1(t), \dots, x_m(t)) \cdot x'_i(t)$$

è di classe C^1 in T . Dalla (3.8.7) si deduce che $F'(t)$ è di classe C^1 in T , i.e. che $F(t)$ è di classe C^2 in T . Così procedendo, si vede che, se $f(P)$ è di classe C^n in Ω e $x(t)$ è di classe C^n in T , la funzione $F(t)$ risulta di classe C^n in T .

3.8.2 Funzioni composte reali di più variabili reali.

Siano: $f(P)$ una funzione reale definita per $P = (x_1, \dots, x_m) \in A \subseteq \mathbb{R}^m$, $X(t) = (X_1(t), \dots, X_m(t))$ una funzione vettoriale definita per $t = (t_1, \dots, t_k) \in T \subseteq \mathbb{R}^k$.

Amnesso che $x(t) \in A \quad \forall t \in T$, consideriamo la funzione composta:

$$F(t_1, \dots, t_k) = f(x_1(t_1, \dots, t_k), \dots, x_m(t_1, \dots, t_k)) \quad \forall (t_1, \dots, t_k) \in T$$

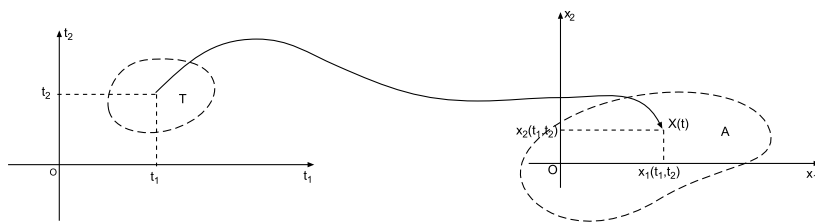


Figura 3.7: Funzioni composte reali di k variabili reali.

Teorema 3.8 Nelle ipotesi:

$i_1)$ $X(t)$ parzialmente derivabile rispetto a t_j nel punto $t_0 = (t_1^0, \dots, t_k^0) \in \overset{\circ}{T}$;

$i_2)$ $X(t_0) \in \overset{\circ}{A}$ ed f differenziabile nel punto $X(t_0)$,

la funzione F è derivabile parzialmente rispetto a t_j nel punto t_0 e si ha:

$$\frac{\partial F}{\partial t_j}(t_0) = \text{grad } f(x(t_0))_x \frac{\partial X}{\partial t_j}(t_0) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(X(t_0)) \frac{\partial X_i}{\partial t_j}(t_0) \quad (3.8.8)$$

Dimostrazione — Consideriamo la funzione della sola variabile t_j

$$F(t_1^0, \dots, t_j, \dots, t_k^0) = f(X(t_1^0, \dots, t_j, \dots, t_k^0))$$

la quale è composta dalla funzione vettoriale della sola variabile t_j :

$$X(t_1^0, \dots, t_j, \dots, t_k^0) = (X_1(t_1^0, \dots, t_j, \dots, t_k^0), \dots, X_m(t_1^0, \dots, t_j, \dots, t_k^0))$$

e della funzione f .

Per la i_1) $X(t_1^0, \dots, t_j, \dots, t_k^0)$ è derivabile nel punto t_j^0 , per la i_2)

$$X(t_1^0, \dots, t_j^0, \dots, t_k^0) \in \overset{o}{A}$$

ed inoltre f è differenziabile nel punto $X(t_1^0, \dots, t_j^0, \dots, t_k^0)$.

Pertanto in base al teorema 3.7 la funzione della sola variabile t_j

$$F(t_1^0, \dots, t_j, \dots, t_k^0)$$

risulta derivabile nel punto t_j^0 e si ha:

$$\left[\frac{d}{dt_j} F(t_1^0, \dots, t_j, \dots, t_k^0) \right]_{t_j=t_j^0} = \text{grad } f(X(t_0)) \times \left[\frac{d}{dt_j} X(t_1^0, \dots, t_j, \dots, t_k^0) \right]_{t_j=t_j^0}$$

ciò significa che F è derivabile parzialmente rispetto a t_j nel punto t_j^0 e che vale la (3.8.8). \square

Osservazione 21 Se la i_1) sussiste $\forall j \in \{1, \dots, k\}$ si ha:

$$\begin{aligned} dF(t_0) &= \sum_{j=1}^k F_{t_j}(t_0) \Delta t_j = \sum_{j=1}^k \left[\sum_{i=1}^m f_{x_i}(X(t_0)) \cdot \frac{\partial X_i}{\partial t_j}(t_0) \right] \Delta t_j = \\ &= \sum_{i=1}^m f_{x_i}(X(t_0)) \sum_{j=1}^k \frac{\partial X_i}{\partial t_j}(t_0) \Delta t_j = \sum_{i=1}^m f_{x_i}(X(t_0)) dX_i(t_0) \end{aligned}$$

sicchè anche in tal caso vale la proprietà di invarianza del differenziale primo. Avvertiamo che essa non è valida per i differenziali di ordine superiore al primo.

3.8.3 Funzioni composte vettoriali di una variabile reale.

Siano $f(P) = (f_1(P), \dots, f_n(P))$ una funzione vettoriale definita per $P = (X_1, \dots, X_m) \in A \subseteq \mathbb{R}^m$, $X(t) = (X_1(t), \dots, X_m(t))$ una funzione vettoriale definita per $t \in T \subseteq \mathbb{R}$.

Am messo che

$$X(t) \in A \quad \forall t \in T,$$

consideriamo la funzione composta $\forall t \in T$:

$$F(t) = f(X(t)) = (f_1(X_1(t), \dots, X_m(t)), \dots, f_n(X_1(t), \dots, X_m(t)))$$

la cui componente h -ma è la funzione:

$$F_h(t) = f_h(X_1(t), \dots, X_m(t)) \quad \forall t \in T$$

Supponiamo:

X derivabile nel punto $t_0 \in T \cap DT$
 $X(t_0) \in \overset{\circ}{A}$ ed f differenziabile in $X(t_0)$

Poichè

(f differenziabile in $X(t_0)$) $\Leftrightarrow (\forall h \in \{1, \dots, n\}$ f_h differenziabile in $X(t_0)$)

a norma del teorema 3.7 F_h è derivabile nel punto t_0 e si ha

$$F'_h(t_0) = \text{grad } f_h(X(t_0)) \times X'(t_0)$$

ciò implica che F è derivabile in t_0 e che:

$$F'(t_0) = (\text{grad } f_1(X(t_0)) \times X'(t_0), \dots, \text{grad } f_n(X(t_0)) \times X'(t_0)).$$

Osservato che

$$\begin{aligned} f_{x_1}(X(t_0)) X'_1(t_0) + \dots + f_{x_m}(X(t_0)) X'_m(t_0) &= \\ &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X(t_0)), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(X(t_0)) \right) X'_1(t_0) + \dots + \\ &+ \dots + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_m}(X(t_0)), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(X(t_0)) \right) X'_m(t_0) = \\ &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X(t_0)) X'_1(t_0), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(X(t_0)) X'_1(t_0) \right) + \dots + \\ &+ \dots + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_m}(X(t_0)) X'_m(t_0), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(X(t_0)) X'_m(t_0) \right) = \\ &= (\text{grad } f_1(X(t_0)) \times X'(t_0), \dots, \text{grad } f_n(X(t_0)) \times X'(t_0)) \end{aligned}$$

si ha:

$$F'(t_0) = f_{x_1}(X(t_0)) X'_1(t_0) + \dots + f_{x_m}(X(t_0)) X'_m(t_0)$$

3.8.4 Funzioni composte vettoriali di k variabili reali

Siano: $f(P) = (f_1(P), \dots, f_n(P))$ una funzione vettoriale definita per $P = (x_1, \dots, x_m) \in A \subseteq \mathbb{R}^m$, $X(t) = (X_1(t), \dots, X_m(t))$ una funzione vettoriale definita per $t = (t_1, \dots, t_k) \in T \subseteq \mathbb{R}^k$.

Ammesso che:

$$X(t) \in A \quad \forall t \in T$$

consideriamo la funzione composta

$$F(t) = f(X(t)) = (f_1(X(t)), \dots, f_n(X(t))) \quad \forall t \in T$$

la cui componente h -ma, $\forall t = (t_1, \dots, t_k) \in T$, è la funzione

$$F_h(t) = f_h(X(t)) = f_h(X_1(t_1, \dots, t_k), \dots, X_m(t_1, \dots, t_k))$$

Supponiamo:

X derivabile parzialmente rispetto a t_j nel punto $t_0 \in \overset{\circ}{T}$
 $X(t_0) \in \overset{\circ}{A}$ ed f differenziabile in $X(t_0)$

Poichè:

(f differenziabile in $X(t_0)$) \Leftrightarrow ($\forall h \in \{1, \dots, n\}$ f_h differenziabile in $X(t_0)$)

a norma del teorema 3.8 la funzione F_h risulta derivabile parzialmente rispetto a t_j nel punto t_0 e si ha:

$$\frac{\partial F_h}{\partial t_j}(t_0) = \text{grad } f_h(X(t_0)) \times \frac{\partial X}{\partial t_j}(t_0)$$

Ciò implica che F è derivabile parzialmente rispetto a t_j nel punto t_0 e vale l'uguaglianza:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t_j}(t_0) &= \left(\frac{\partial F_1}{\partial t_j}(t_0), \dots, \frac{\partial F_n}{\partial t_j}(t_0) \right) = \\ &= \left(\text{grad } f_1(X(t_0)) \times \frac{\partial X}{\partial t_j}(t_0), \dots, \text{grad } f_n(X(t_0)) \times \frac{\partial X}{\partial t_j}(t_0) \right) \end{aligned} \quad (3.8.9)$$

Se X è dotata in t_0 di tutte le derivate parziali prime, la (3.8.9) sussiste $\forall j \in \{1, \dots, k\}$ e di conseguenza:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial t_1}(t_0) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial t_k}(t_0) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial t_1}(t_0) & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial t_k}(t_0) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X(t_0)) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(X(t_0)) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(X(t_0)) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(X(t_0)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial t_1}(t_0) & \cdots & \frac{\partial X_1}{\partial t_k}(t_0) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial X_m}{\partial t_1}(t_0) & \cdots & \frac{\partial X_m}{\partial t_k}(t_0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

cioè

$$\left[\frac{\partial (F_1, \dots, F_n)}{\partial (t_1, \dots, t_k)}(t_0) \right] = \left[\frac{\partial (f_1, \dots, f_n)}{\partial (x_1, \dots, x_m)}(X(t_0)) \right] \cdot \left[\frac{\partial (X_1, \dots, X_m)}{\partial (t_1, \dots, t_k)}(t_0) \right]$$

Pertanto, se $m = n = k$, risulta:

$$\frac{\partial (F_1, \dots, F_n)}{\partial (t_1, \dots, t_n)}(t_0) = \frac{\partial (f_1, \dots, f_n)}{\partial (x_1, \dots, x_n)}(X(t_0)) \cdot \frac{\partial (X_1, \dots, X_n)}{\partial (t_1, \dots, t_k)}(t_0)$$

i.e. :

$$\det JF(t_0) = \det Jf(X(t_0)) \cdot \det JX(t_0).$$

3.9 Derivate direzionali

Siano: $f(x, y)$ una funzione reale definita in $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $P_0 = (x_0, y_0) \in \overset{\circ}{A}$. Consideriamo un asse (i.e. una retta orientata) r passante per P_0 , di versore \mathbf{r} e di coseni direttori (α, β) .

Ricordiamo che:

$$\mathbf{r} = \alpha \mathbf{i} + \beta \mathbf{j}$$

e che il sostegno di r è il codominio della funzione vettoriale

$$P_0 + t\mathbf{r} = (x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Essendo P_0 interno ad A , esiste un cerchio aperto $B_\delta(P_0)$ di centro P_0 e raggio $\delta > 0$ incluso in A . Risultando:

$$\forall t \in]-\delta, \delta[\quad |P_0 + t\mathbf{r} - P_0| = |t\mathbf{r}| = |t| |\mathbf{r}| = |t| < \delta$$

si ha:

$$P_0 + t\mathbf{r} \in B_\delta(P_0) \quad \forall t \in]-\delta, \delta[\quad (3.9.1)$$

La (3.9.1) ci permette di considerare la funzione composta

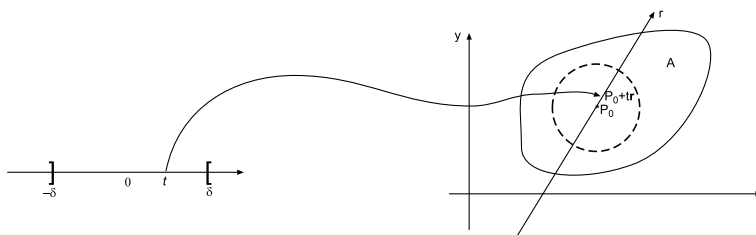


Figura 3.8: Funzione composta $F(t)$.

$$F(t) = f(P_0 + t\mathbf{r}) = f(x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t) \quad \forall t \in]-\delta, \delta[$$

Si dice che f è **derivabile nel punto P_0 secondo la direzione dell'asse r** , se F è derivabile nel punto 0, i.e. se esiste ed è finito il limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t) - F(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t) - f(x_0, y_0)}{t} \quad (3.9.2)$$

La derivata di F nel punto 0, ossia il limite (3.9.2), dicesi **la derivata direzionale di f nel punto P_0 secondo la direzione dell'asse r** , e viene indicata con uno dei simboli

$$f_r(P_0) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial r}(P_0)$$

Se f è differenziabile nel punto P_0 , tenuto conto che $P_0 = P_0 + 0\mathbf{r}$, in virtù del teorema 3.7 f è derivabile in P_0 secondo la direzione dell'asse r e si ha:

$$f_r(P_0) = f_x(P_0)\alpha + f_y(P_0)\beta = \text{grad } f(P_0) \times r$$

Aggiungiamo che, se $\text{grad } f(P_0) \neq \mathbf{0}$, detto $\vartheta_r \in [0, \pi]$ l'angolo dei vettori $\text{grad } f(P_0)$ e \mathbf{r} , risulta

$$f_r(P_0) = |\text{grad } f(P_0)| \cos \vartheta_r$$

da cui si evince che $f(P_0)$ assume il valore massimo quando ϑ_r è nullo, i.e. quando il gradiente di f in P_0 è parallelo ed equiverso all'asse r .

Osservazione 22 Se l'asse r è parallelo ed equiverso all'asse x [y], essendo $\alpha = 1$ e $\beta = 0$ [$\alpha = 0$, $\beta = 1$], si ha:

$$\forall t \in]-\delta, \delta[\quad F(t) = f(x_0 + t, y_0)$$

$$[\forall t \in]-\delta, \delta[\quad F(t) = f(x_0, y_0 + t)]$$

e di conseguenza il limite (3.9.2) si riscrive:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} \quad \left[\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t} \right]$$

cosicché f è derivabile nel punto P_0 secondo la direzione dell'asse r se e solo se essa è derivabile rispetto a x [y] in P_0 , e quando ciò accade, vale l'uguaglianza:

$$f_r(P_0) = f_x(P_0) \quad [f_r(P_0) = f_y(P_0)]$$

Le definizioni precedenti e le considerazioni relative si danno pari pari per una funzione reale di 3 variabili reali.

3.10 Piano tangente e asse normale positivo a una superficie diagramma in un punto Q_0 .

Sia $f(x, y)$ una funzione reale di due variabili definita in un insieme $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Indichiamo con S il diagramma di f nello spazio (O, x, y, z) o, ciò che è lo stesso, l'insieme dei punti dello spazio (O, x, y, z) di equazione $z = f(x, y)$. Facciamo ora le due ipotesi seguenti:

1. f è continua in D ;
2. D è uno pseudodominio¹ internamente connesso di \mathbb{R}^2

¹A pag. 22 abbiamo definito il **dominio** dicendo che esso è un insieme D di \mathbb{R}^k chiuso e tale che **tutti i punti della sua frontiera sono di accumulazione per l'interno di D** . Quest'ultima proprietà caratterizza una classe di insiemi, che noi definiamo **pseudodomini**, alla quale appartengono, in particolare, i domini.

3.10 Piano tangente e asse normale positivo a una superficie diagramma in un punto Q_0 .

91

Nelle due ipotesi fatte il diagramma di f si chiama, per definizione, **una superficie**, e più precisamente **la superficie diagramma di f** o **la superficie di equazione $z = f(x, y)$** .

Consideriamo ora un punto $P_0(x_0, y_0) \in \overset{\circ}{D}$, e diciamo Q_0 il punto della

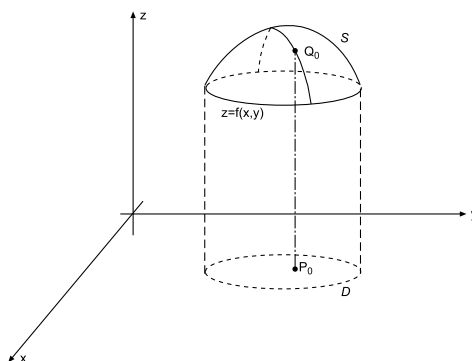


Figura 3.9: Piano tangente e asse normale a una superficie diagramma in un punto Q_0 .

superficie S che si proietta in P_0 , i.e. poniamo $Q_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Facciamo ora l'ulteriore ipotesi seguente:

3. $f(x, y)$ è differenziabile in $P_0 = (x_0, y_0)$.

Si dimostra che in questa ulteriore ipotesi tutte le sezioni della superficie S con i piani ortogonali al piano (O, x, y) passanti per P_0 , e quindi anche per Q_0 , sono dotate di retta tangente nel punto Q_0 ; si dimostra inoltre che le tangenti in Q_0 alle suddette sezioni si trovano tutte in uno stesso piano (passante per Q_0) e che tale piano ha equazione

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

o, ciò che è lo stesso, equazione:

$$(z - f(x_0, y_0)) - f_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

Orbene, questo piano si chiama per definizione **il piano tangente alla superficie S** nel punto Q_0 .

Si chiama poi retta normale alla superficie S in Q_0 la retta che passa per Q_0 ed è normale al piano tangente a S in Q_0 . Questa retta ha ovviamente i seguenti coseni direttori:

$$-f_x(x_0, y_0), -f_y(x_0, y_0), 1.$$

Si chiama asse normale **positivo** alla superficie S nel punto Q_0 la retta normale a S in Q_0 orientata in modo tale da formare un angolo **acuto** con

l'asse z e cioè orientata verso l'alto.

L'asse normale positivo a S in Q_0 si denota con n e ha ovviamente i seguenti coseni direttori:

$$n_1 = \frac{-f_x(x_0, y_0)}{\sqrt{1 + f_x^2(x_0 + y_0) + f_y^2(x_0 + y_0)}}, n_2 = \frac{-f_y(x_0, y_0)}{\sqrt{1 + f_x^2(x_0 + y_0) + f_y^2(x_0 + y_0)}},$$

$$n_3 = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2(x_0 + y_0) + f_y^2(x_0 + y_0)}}$$

dove è da notare che il terzo coseno direttore è positivo coerentemente col fatto che è il coseno di un angolo acuto.

Si chiama **versore normale positivo** a S in Q_0 , e si denota con \mathbf{n} , il versore dell'asse normale positivo a S in Q_0 .

3.11 Il teorema di Lagrange e la formula di Taylor per le funzioni reali di più variabili reali. Funzioni reali con gradiente nullo.

Teorema 3.9 (di Lagrange) Consideriamo una funzione reale di k variabili reali $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ con Ω aperto di \mathbb{R}^k .

Se f è differenziabile in Ω , comunque si considerano due punti di Ω , $P' = (x'_1, \dots, x'_k)$ e $P'' = (x''_1, \dots, x''_k)$ tali che risulti $P' \neq P''$ e $P'P'' \subset \Omega$, esiste un punto Q interno al segmento $P'P''$ per il quale risulta:

$$f(P'') - f(P') = f_{x_1}(Q)(x''_1 - x'_1) + f_{x_2}(Q)(x''_2 - x'_2) + \dots + f_{x_k}(Q)(x''_k - x'_k) \quad (3.11.1)$$

Equivalentemente, se f è differenziabile in Ω , comunque si considerano due punti di Ω , $P' = (x'_1, \dots, x'_k)$ e $P'' = (x''_1, \dots, x''_k)$ con $P' \neq P''$ e $P'P'' \subset \Omega$, esiste un numero $\vartheta \in]0, 1[$ per il quale risulta:

$$f(x''_1, \dots, x''_k) - f(x'_1, \dots, x'_k) = \sum_{i=1}^k f_{x_i}(x'_1 + \vartheta(x''_1 - x'_1), \dots, x'_k + \vartheta(x''_k - x'_k))(x''_i - x'_i) \quad (3.11.2)$$

Osservazione 23 Si osservi che l'eguaglianza (3.11.1) si può riscrivere come segue:

$$f(P'') - f(P') = \text{grad } f(Q) \times (P'' - P').$$

Si osservi ancora che, se $k = 1$, l'eguaglianza (3.11.1) diventa l'eguaglianza:

$$f(x'') - f(x') = f'(\xi)(x'' - x')$$

con ξ punto opportuno compreso fra x' e x'' , e quindi il teorema enunciato restituisce il teorema di Lagrange per le funzioni di una variabile reale.

3.11 Il teorema di Lagrange e la formula di Taylor per le funzioni reali di più variabili reali. Funzioni reali con gradiente nullo. 93

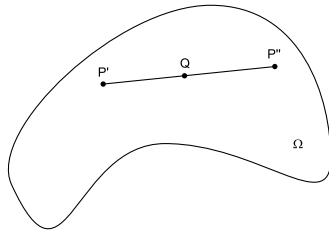


Figura 3.10: Sottoinsieme Ω aperto di \mathbb{R}^k .

Dimostrazione — Ricordiamo che il segmento $P'P''$ è per definizione l'insieme dei punti di \mathbb{R}^k che soddisfano le equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x_1 &= x'_1 + t(x''_1 - x'_1) \\ \dots & \dots \quad \dots \\ x_k &= x'_k + t(x''_k - x'_k) \end{cases} \quad \text{con } t \in [0, 1]$$

Consideriamo ora la funzione della sola variabile t che si ottiene calcolando la funzione $f(x_1, \dots, x_k)$ lungo il segmento $P'P''$, i.e. la funzione:

$$F(t) = f(x'_1 + t(x''_1 - x'_1), \dots, x'_k + t(x''_k - x'_k)) \quad \text{con } t \in [0, 1].$$

La funzione $F(t)$ può considerarsi composta mediante le funzioni:

$$\begin{aligned} x : t \in [0, 1] &\rightarrow x(t) = (x'_1 + t(x''_1 - x'_1), \dots, x'_k + t(x''_k - x'_k)) \in \mathbb{R}^k \\ f : P \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^k &\rightarrow f(P) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Poichè la funzione $x(t)$ è derivabile in $[0, 1]$ e $f(P)$ è differenziabile in Ω , la funzione $F(t)$ risulta derivabile in $[0, 1]$ e si ha:

$$F'(t) = \sum_{i=1}^k f_{x_i}(x'_1 + t(x''_1 - x'_1), \dots, x'_k + t(x''_k - x'_k)) (x''_i - x'_i) \quad \forall t \in [0, 1] \quad (3.11.3)$$

Poichè $F(t)$ è derivabile in $[0, 1]$, per il teorema di Lagrange per le funzioni di una variabile, si ha che:

$$\exists \vartheta \in]0, 1[: F(1) - F(0) = F'(\vartheta)(1 - 0)$$

Questa eguaglianza per la (3.11.3) si riscrive come segue:

$$\begin{aligned} f(x''_1, \dots, x''_k) - f(x'_1, \dots, x'_k) &= \\ &= \sum_{i=1}^k f_{x_i}(x'_1 + \vartheta(x''_1 - x'_1), \dots, x'_k + \vartheta(x''_k - x'_k)) \cdot (x''_i - x'_i). \end{aligned}$$

Questa eguaglianza è proprio la (3.11.2). cvd. □

Teorema 3.10 (formula di Taylor) Consideriamo una funzione

$$f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$$

con Ω aperto di \mathbb{R}^k e un punto $P_0 = (x_1^0, \dots, x_k^0) \in \Omega$.

Se f è di classe $C^{(n+1)}(\Omega)$,

$\forall P = (x_1, \dots, x_k) \in \Omega : P \neq P_0$ e $P_0P \subset \Omega, \exists Q$ interno a P_0P

per il quale risulta:

$$\begin{aligned} f(P) = f(P_0) + \sum_{h=1}^n \frac{1}{h!} \left(\sum_{i=1}^k f_{x_i}(P_0) (x_i - x_i^0) \right)^{(h)} + \\ + \frac{1}{(n+1)!} \left(\sum_{i=1}^k f_{x_i}(Q) (x_i - x_i^0) \right)^{(n+1)} \end{aligned} \quad (3.11.4)$$

La (3.11.4) è nota come **formula di Taylor di ordine n relativa ad f e di punto iniziale P_0** .

Dimostrazione — Il segmento di estremi P_0 e P è per definizione il codominio della funzione vettoriale di classe C^∞ in $[0, 1]$:

$$P_0 + t(P - P_0) = (x_1^0 + t(x_1 - x_1^0), \dots, x_k^0 + t(x_k - x_k^0)) \quad \forall t \in [0, 1]$$

Essendo tale codominio incluso in Ω , possiamo considerare, $\forall t \in [0, 1]$, la funzione composta

$$F(t) = f(P_0 + t(P - P_0)) = f(x_1^0 + t(x_1 - x_1^0), \dots, x_k^0 + t(x_k - x_k^0))$$

la quale è di classe C^{n+1} in $[0, 1]$ e si ha:

$$\begin{aligned} \forall h \in \{1, \dots, n+1\} \text{ e } \forall t \in [0, 1] \quad F^{(h)}(t) = \\ = \left(\sum_{i=1}^k f_{x_i}(P_0 + t(P - P_0)) (x_i - x_i^0) \right)^{(h)} \end{aligned}$$

Alla funzione F è allora applicabile la formula di Taylor di ordine n con il resto nella forma di Lagrange, in base alla quale esiste un $\vartheta \in]0, 1[$ tale che

$$F(1) - F(0) = \sum_{h=1}^n \frac{1}{h!} F^{(h)}(0) + \frac{1}{(n+1)!} F^{(n+1)}(\vartheta)$$

Ne segue la (3.11.4) assumendo $Q = P_0 + \vartheta(P - P_0)$. □

3.11 Il teorema di Lagrange e la formula di Taylor per le funzioni reali di più variabili reali. Funzioni reali con gradiente nullo. 95

Teorema 3.11 Consideriamo una funzione reale di k variabili reali

$$f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$$

con Ω aperto di \mathbb{R}^k .

Vale la seguente implicazione:

$$\left(\begin{array}{l} 1) \text{ Le derivate parziali prime di } f \\ \text{esistono e sono identicamente nulle} \\ \text{in } \Omega \\ 2) \Omega \text{ è connesso} \end{array} \right) \implies (f \text{ è costante in } \Omega)$$

Dimostrazione — Siano P' e P'' due punti distinti di Ω . Poichè Ω è un aperto connesso, per un teorema sugli aperti connessi, esiste una poligonale congiungente P' e P'' , tutta contenuta in Ω . Siano

$$P_1 = P', P_2, P_3, \dots, P_n = P''$$

i vertici di questa poligonale. Per il teorema di Lagrange per le funzioni di più variabili si ha:

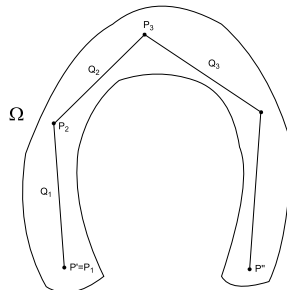


Figura 3.11: teorema sulle funzioni con derivate parziali prime nulle: Ω aperto di \mathbb{R}^k .

$$\begin{aligned} f(P_{i+1}) - f(P_i) &= \text{grad } f(Q_i) \times (P_{i+1} - P_i) = \\ &= \mathbf{0} \times (P_{i+1} - P_i) = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\}, \end{aligned}$$

essendo Q_i un punto opportuno interno al segmento $P_i P_{i+1}$.

Quindi si ha

$$f(P_1) = f(P_2) = \dots = f(P_n)$$

e quindi $f(P') = f(P'')$.

Da tale eguaglianza, per l'arbitrarietà di P' e P'' , segue che f è costante in Ω . \square

Teorema 3.12 Sia f una funzione reale definita e continua nel dominio D di \mathbb{R}^k , dotata nell'interno di D di tutte le derivate parziali prime. Se D è internamente connesso e se le derivate parziali prime di f sono identicamente nulle nell'interno di D , allora f è costante in D .

Dimostrazione — L'interno di D , che è un aperto, per ipotesi è anche connesso. Pertanto, avendo ammesso che le derivate parziali prime di f sono identicamente nulle nell'interno di D , in base al teorema 3.11 la restrizione di f all'interno di D è costante, sicchè esiste una costante reale c tale che:

$$f(P) = c \quad \forall P \in \overset{\circ}{D}.$$

Sia ora P_0 un arbitrario punto della frontiera di D . Tenendo presente che per ipotesi f è continua in P_0 , si ha:

$$f(P_0) = \lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = \lim_{\substack{P \rightarrow P_0 \\ P \in \overset{\circ}{D}}} f(P) = c$$

Dunque f assume il valore c anche nei punti della frontiera di D . □

3.12 Funzioni omogenee

3.12.1 Funzioni positivamente omogenee

Sia f una funzione reale definita in $A \subseteq \mathbb{R}^k$. Supponiamo che A goda delle proprietà:

$$*) \forall (x_1, \dots, x_k) \in A \text{ e } \forall t > 0 \quad (tx_1, \dots, tx_k) \in A$$

Detto α un numero reale, si dice che f è **positivamente omogenea di grado** α se

$$\forall (x_1, \dots, x_k) \in A \text{ e } \forall t > 0 \quad f(tx_1, \dots, tx_k) = t^\alpha f(x_1, \dots, x_k). \quad (3.12.1)$$

La parola **positivamente** sta a ricordare che f verifica l'eguaglianza (3.12.1) per i valori positivi di t , e può anche non verificarsi per i valori negativi di t .

Osservazione 24 E' implicito nella definizione data, che, se una funzione reale $f(x_1, \dots, x_k)$ è positivamente omogenea di un certo grado $\alpha (\in \mathbb{R})$ in un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^k$, l'insieme A deve godere della seguente proprietà:

$$p) \left(\begin{array}{l} \text{Se } A \text{ contiene un punto } P = (x_1, \dots, x_k) \text{ distinto dall'origine, } A \\ \text{contiene anche tutti i punti di } \mathbb{R}^k \text{ del tipo } (tx_1, \dots, tx_k) \text{ con } t > 0 \end{array} \right)$$

Quindi A contiene anche tutta la semiretta di \mathbb{R}^k uscente dall'origine O e passante per il punto P , evidentemente privata dell'origine.

Si noti che certamente gode della proprietà \mathcal{P} ogni sottoinsieme di \mathbb{R}^2 che si rappresenta sul piano (O, x, y) con un angolo con vertice nell'origine o con una unione di angoli con vertice nell'origine, evidentemente privati del vertice O .

Esempio 20 La funzione

$$f(x, y) = x^2y + xy^2 + xy\sqrt{x|y|}$$

è definita nella parte di \mathbb{R}^2

$$A = \{P = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$$

che gode ovviamente della proprietà (3.12.1). Risultando:

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in A \text{ e } \forall t > 0 \quad f(tx, ty) &= (tx)^2(ty) + (tx)(ty)^2 + txy\sqrt{tx|tx|} = \\ &= t^3f(x, y) \end{aligned}$$

f è positivamente omogenea di grado 3.

Esempio 21 La funzione

$$f(x, y) = \frac{1}{y^2} + \frac{\log x - \log y}{x^2}$$

è definita nella parte di \mathbb{R}^2

$$A = \{P = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$$

la quale gode della proprietà (3.12.1). risultando

$$\forall (x, y) \in A \text{ e } \forall t > 0 \quad f(tx, ty) = \frac{1}{(ty)^2} + \frac{\log(tx) - \log(ty)}{(tx)^2} = t^{-2}f(x, y)$$

f è positivamente omogenea di grado -2 .

Teorema 3.13 (di Eulero) *Se A è un aperto di \mathbb{R}^k che gode della proprietà (3.12.1) e se f è differenziabile in ogni punto di A , condizione necessaria e sufficiente affinché f sia positivamente omogenea di grado α è che valga l'identità di Eulero*

$$\begin{aligned} x_1 f_{x_1}(x_1, \dots, x_k) + \dots + x_k f_{x_k}(x_1, \dots, x_k) &= \alpha f(x_1, \dots, x_k) \\ \forall (x_1, \dots, x_k) \in A \end{aligned} \quad (3.12.2)$$

Dimostrazione — Dimostriamo che la condizione è necessario, i.e.:

$$\left(\begin{array}{l} f \text{ è positivamente omogenea} \\ \text{di grado } \alpha \text{ in } A \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{l} \forall (x_1, \dots, x_k) \in A \\ \sum_{i=1}^k x_i f_{x_i}(x_1, \dots, x_k) = \alpha f(x_1, \dots, x_k) \end{array} \right)$$

Detto (x_1, \dots, x_k) un punto di A , consideriamo la funzione

$$F(t) = f(t x_1, \dots, t x_k) \quad \forall t \in]0, +\infty[$$

Essendo f differenziabile in ogni punto dell'aperto A , F è derivabile in $]0, +\infty[$ e si ha:

$$F'(t) = \sum_{i=1}^k f_{x_i}(t x_1, \dots, t x_k) x_i \quad \forall t \in]0, +\infty[\quad (3.12.3)$$

D'altra parte, poichè per ipotesi f è positivamente omogenea di grado α si ha anche

$$F'(t) = \alpha t^{\alpha-1} f(x_1, \dots, x_k) \quad \forall t \in]0, +\infty[\quad (3.12.4)$$

Dalle (3.12.3), (3.12.4) si deduce che

$$\sum_{i=1}^k f_{x_i}(t x_1, \dots, t x_k) x_i = \alpha t^{\alpha-1} f(x_1, \dots, x_k) \quad \forall t \in]0, +\infty[$$

da cui la (3.12.2) per $t = 1$.

Proviamo che la condizione è sufficiente.

Detto x_1, \dots, x_k un punto di A , consideriamo la funzione

$$G(t) = t^{-\alpha} f(x_1 t_1, \dots, x_k t) \quad \forall t \in]0, +\infty[$$

la quale, anche per il teorema di derivazione delle funzioni composte è derivabile in $]0, +\infty[$ e si ha:

$$G'(t) = -\alpha t^{-\alpha-1} f(x_1 t_1, \dots, x_k t) + t^{-\alpha} \sum_{i=1}^k f_{x_i}(x_1 t_1, \dots, x_k t) x_i \quad \forall t \in]0, +\infty[\quad (3.12.5)$$

La (3.12.2), che ora stiamo supponendo, utilizzata con $(x_1 t_1, \dots, x_k t)$ in luogo di (x_1, \dots, x_k) , ci dice che

$$\sum_{i=1}^k f_{x_i}(x_1 t_1, \dots, x_k t) t x_i = \alpha f(x_1 t_1, \dots, x_k t) \quad \forall t \in]0, +\infty[$$

i.e.

$$\sum_{i=1}^k f_{x_i}(x_1 t_1, \dots, x_k t) x_i = \alpha t^{-1} f(x_1 t_1, \dots, x_k t) \quad \forall t \in]0, +\infty[$$

Da ciò e dalla (3.12.5) si deduce che

$$G'(t) = 0 \quad \forall t \in]0, +\infty[$$

sicchè G è costante e di conseguenza deve essere

$$G(t) = G(1) \quad \forall t \in]0, +\infty[$$

ossia

$$f(x_1 t_1, \dots, x_k t_k) = t^\alpha f(x_1, \dots, x_k)$$

□

3.13 Funzioni omogenee

Consideriamo una funzione reale di k variabili reali

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$$

e un numero $\alpha \in \mathbb{Z}$ di modo che ha senso considerare la potenza $t^\alpha \quad \forall t \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Si dice che f è **omogenea di grado α in A** quando f verifica la condizione:

$$f(tx_1, \dots, tx_k) = t^\alpha f(x_1, \dots, x_k) \quad \forall t \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ e } \forall (x_1, \dots, x_k) \in A. \quad (3.13.1)$$

Ad esempio, la funzione

$$f(x, y, z) = \frac{\sqrt[3]{x^3 + y^3}}{z^4}$$

il cui insieme di definizione A è tutto lo spazio privato del piano $z = 0$, è omogenea di grado -3 giacché:

$$\begin{aligned} \forall (x, y, z) \in A \text{ e } \forall t \in \mathbb{R} - \{0\} \quad f(tx, ty, tz) &= \frac{\sqrt[3]{(tx)^3 + (ty)^3}}{(tz)^4} = \\ &= t^{-3} f(x, y, z) \end{aligned}$$

Evidentemente se f è omogenea di grado α , allora essa è anche positivamente omogenea di grado α . Pertanto, se A è un aperto di \mathbb{R}^k soddisfacente alla condizione (3.13.1) e se f è differenziabile in ogni punto di A condizione necessaria (ma non sufficiente) affinché f sia omogenea di grado α è che valga l'identità di Eulero.

3.14 Estremi relativi

Siano: $f(P)$ una funzione reale definita per $P = (x_1, \dots, x_k) \in A \subseteq \mathbb{R}^k$, $P_0 = (x_1^0, \dots, x_k^0) \in A \cap DA$.

Si dice che P_0 è **punto di massimo [minimo] relativo per f** se esiste un suo intorno I_0 tale che:

$$f(P) \leq f(P_0) \quad \forall P \in I_0 \cap A \quad [f(P) \geq f(P_0) \quad \forall P \in I_0 \cap A]$$

Si dice che P_0 è **punto di massimo [minimo] relativo proprio per f** se esiste un suo intorno I_0 tale che

$$f(P) < f(P_0) \quad \forall P \in I_0 \cap A - \{P_0\} \quad [f(P) > f(P_0) \quad \forall P \in I_0 \cap A - \{P_0\}]$$

Teorema 3.14 *Se P_0 è interno ad A e se f è differenziabile, allora condizione necessaria affinché P_0 sia punto di massimo o di minimo relativo per f è che si abbia*

$$\nabla f(P_0) = \mathbf{0}$$

Dimostrazione — Supponiamo, per fissare le idee, che P_0 sia punto di minimo relativo per f . Esiste allora un cerchio aperto di centro P_0 e raggio $\delta > 0$, $B_\delta(P_0)$, incluso in A , in modo che

$$f(P) \geq f(P_0), \quad \forall P \in B_\delta(P_0) \quad (3.14.1)$$

Sia $\lambda \in \mathbb{R}^k - \{\mathbf{0}\}$. Osservato che

$$\forall t \in \left] -\frac{\delta}{|\lambda|}; \frac{\delta}{|\lambda|} \right[\quad |P_0 + t\lambda - P_0| = |t| \cdot |\lambda| < \frac{\delta}{|\lambda|} \cdot |\lambda| = \delta,$$

si ha

$$P_0 + t\lambda \in B_\delta(P_0) \quad \forall t \in \left] -\frac{\delta}{|\lambda|}; \frac{\delta}{|\lambda|} \right[\quad (3.14.2)$$

Consideriamo la funzione composta

$$F(t) = f(P_0 + t\lambda) \quad \forall t \in \left] -\frac{\delta}{|\lambda|}; \frac{\delta}{|\lambda|} \right[$$

la quale, avendo ipotizzato f differenziabile in P_0 , è derivabile nel punto 0 e si ha

$$F'(0) = \nabla f(P_0) \times \lambda$$

Osserviamo che, sussistendo (3.14.1) e (3.14.2), risulta:

$$F(t) = f(P_0 + t\lambda) \geq f(P_0) = F(0) \quad \forall t \in \left] -\frac{\delta}{|\lambda|}; \frac{\delta}{|\lambda|} \right[$$

sicché 0 è punto di minimo assoluto per F . Ne segue:

$$F'(0) = \nabla f(P_0) \times \lambda = \mathbf{0}$$

Assumendo

$$\lambda = \mathbf{e}_i \equiv \left(0, \dots, \frac{1}{i}, \dots, 0 \right),$$

si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0) = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}$$

□

Osservazione 25 Sia $f(x, y)$ una funzione reale definita in $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e differenziabili nel punto $P_0 = (x_0, y_0) \in \overset{\circ}{A}$. La differenziabilità di f in P_0 assicura che il suo grafico G_f è dotato di piano tangente nel punto $Q_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, il quale ha equazione

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Pertanto se P_0 è punto di massimo o di minimo relativo per f , in base al teorema 3.14 detto piano è parallelo al piano (x, y) .

• • •

Sia f una funzione reale definita in $A \subseteq \mathbb{R}^k$. Supponiamo che f sia di classe C^1 nell'interno di A . In base al teorema 3.14 gli eventuali punti interni ad A , che siano o di massimo o di minimo relativi per f , vanno ricercati tra le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} f_{x_1}(x_1, \dots, x_k) = 0 \\ \dots \dots \dots \\ f_{x_k}(x_1, \dots, x_k) = 0 \end{cases} \quad (3.14.3)$$

che cadono nell'interno di A .

Ogni punto $P = (x_1, \dots, x_k) \in \overset{\circ}{A}$, che sia soluzione del sistema (3.14.3), dicesi **punto estremale [stazionario, critico] per f** . Un punto estremale per f che sia o di massimo o di minimo relativo per f , si chiama **estremante**. I punti estremali che non sono estremanti si chiamano **punti sella**.

• • •

Sia f una funzione reale definita in $A \subseteq \mathbb{R}^k$, di classe C^2 nell'interno di A . Per ogni $P \in A$ la matrice simmetrica di ordine k

$$\begin{pmatrix} f_{x_1^2}(P) & f_{x_1x_2}(P) & \dots & f_{x_1x_k}(P) \\ f_{x_2x_1}(P) & f_{x_2^2}(P) & \dots & f_{x_2x_k}(P) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ f_{x_kx_1}(P) & f_{x_kx_2}(P) & \dots & f_{x_k^2}(P) \end{pmatrix}$$

è nota come **matrice hessiana di f relativa a P** ; la **forma quadratica**

$$\Phi : \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k \rightarrow \sum_{i,j=1}^k f_{x_i x_j}(P) \lambda_i \lambda_j$$

si chiama **forma quadratica hessiana di f relativa a P** .

Teorema 3.15 *Se f è una funzione reale definita in $A \subseteq \mathbb{R}^k$ e classe C^2 nell'interno di A , condizione necessaria affinché il punto $P_0 \in \overset{\circ}{A}$ sia di minimo [massimo] relativo per f è che la forma quadratica hessiana di f relativa a P_0 sia semidefinita positiva [semidefinita negativa].*

Dimostrazione — Supponiamo, per fissare le idee che P_0 sia punto di minimo relativo per f . Esiste allora un cerchio aperto di centro P_0 e raggio $\delta > 0$, $B_\delta(P_0)$, incluso in A , tale che

$$f(P) \geq f(P_0) \quad \forall P \in B_\delta(P_0) \quad (3.14.4)$$

Sia $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k - \{0\}$. Visto che

$$\forall t \in \left] -\frac{\delta}{|\lambda|}; \frac{\delta}{|\lambda|} \right[\quad |P_0 + t\lambda - P_0| < \delta$$

si ha:

$$\forall t \in \left] -\frac{\delta}{|\lambda|}; \frac{\delta}{|\lambda|} \right[\quad P_0 + t \cdot \lambda \in B_\delta(P_0) \quad (3.14.5)$$

Consideriamo la funzione composta

$$F(t) = f(P_0 + \lambda t) \quad \forall t \in \left] -\frac{\delta}{|\lambda|}; \frac{\delta}{|\lambda|} \right[$$

la quale, avendo ipotizzato f di classe C^2 nell'interno di A è di classe C^2 in $\left] -\frac{\delta}{|\lambda|}; \frac{\delta}{|\lambda|} \right[$ e si ha:

$$F'(t) = \nabla f(P_0 + \lambda t) \times \lambda \quad \forall t \in \left] -\frac{\delta}{|\lambda|}; \frac{\delta}{|\lambda|} \right[$$

$$\begin{aligned} F''(t) &= (f_{x_1}(P_0 + \lambda t) \lambda_1 + \dots + f_{x_k}(P_0 + \lambda t) \lambda_k)^{(2)} = \\ &= \sum_{i,j=1}^k f_{x_i x_j}(P_0 + \lambda t) \lambda_i \lambda_j \quad \forall t \in \left] -\frac{\delta}{|\lambda|}; \frac{\delta}{|\lambda|} \right[\end{aligned}$$

Poichè per le (3.14.4) e (3.14.5) il punto 0 è di minimo assoluto per F , dev'essere necessariamente

$$F'(0) = 0$$

nonchè

$$F''(0) \geq 0$$

ossia

$$\sum_{i,j=1}^k f_{x_i x_j}(P_0) \lambda_i \lambda_j \geq 0$$

□

Dal teorema 3.15 si deduce il

Teorema 3.16 *Sia f una funzione reale definita in $A \subseteq \mathbb{R}^k$, di classe C^2 nell'interno di A . Sia P_0 un punto interno ad A stazionario per f . Condizione sufficiente affinché P_0 sia punto sella per f è che la forma quadratica hessiana di f relativa a P_0 risulti indefinita.*

Dimostrazione — Omessa. □

Dimostriamo, infine, il

Teorema 3.17 *Sia f una funzione reale definita in $A \subseteq \mathbb{R}^k$, di classe C^2 nell'interno di A . Sia $P_0 = (x_1^0, \dots, x_k^0)$ un punto interno ad A stazionario per f . Se la forma quadratica hessiana di f relativa a P_0 è definita positiva [definita negativa] allora P_0 è punto di minimo [massimo] relativo proprio per f .*

Dimostrazione — Posto $\forall i \in \{1, \dots, k\} \quad \forall P \in \overset{\circ}{A}$

$$H_i(P) = \begin{vmatrix} f_{x_1^2}(P) & f_{x_1 x_2}(P) & \cdots & f_{x_1 x_i}(P) \\ f_{x_2 x_1}(P) & f_{x_2^2}(P) & \cdots & f_{x_2 x_i}(P) \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ f_{x_i x_1}(P) & f_{x_i x_2}(P) & \cdots & f_{x_i^2}(P) \end{vmatrix}$$

supponiamo, per fissare le idee, che la forma quadratica hessiana di f relativa a P_0 sia definita positiva. Un noto teorema sulle forme quadratiche simmetriche assicura allora che:

$$H_i(P) > 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, k\} \quad (3.14.6)$$

Poichè le funzioni

$$H_1(P), H_2(P), \dots, H_k(P)$$

sono continue in P_0 , sussistendo la (3.14.6), il teorema della permanenza del segno garantisce l'esistenza di un cerchio aperto di centro P_0 e raggio $\delta > 0$, $B_\delta(P_0)$, contenuto in A tale che

$$H_i(P) > 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, k\} \text{ e } \forall P \in B_\delta(P_0) \quad (3.14.7)$$

Sia $P = (x_1, \dots, x_k) \in B_\delta(P_0) - \{P_0\}$. Rilevato che il segmento di estremi P_0 e P è contenuto in $B_\delta(P_0)$ e tenuto conto che P_0 è per ipotesi punto stazionario per f , utilizzando la formula di Taylor di ordine 1 e di punto iniziale P_0 , si ha:

$$\begin{aligned} f(P) - f(P_0) &= 0 + \frac{1}{2} (f_{x_1}(Q)(x_1 - x_1^0) + \dots + f_{x_k}(Q)(x_k - x_k^0))^{(2)} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k f_{x_i x_j}(Q)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) \quad (3.14.8) \end{aligned}$$

dove Q è un opportuno punto interno al segmento di estremi P e P_0 . Osserviamo ora che per la (3.14.7)

$$H_i(Q) > 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}$$

ciò implica che la forma quadratica hessiana di f relativa a Q è definita positiva. Di conseguenza, essendo $P - P_0 \neq \mathbf{0}$, risulta:

$$\sum_{i,j=1}^k f_{x_i x_j}(Q)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) > 0$$

Da ciò e dalla (3.14.8) si trae che

$$f(P) > f(P_0)$$

□

3.15 Funzioni implicite

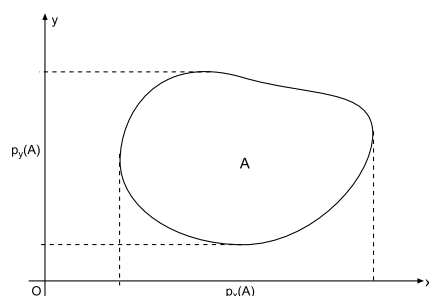
3.15.1 Equazioni implicitamente definite da un'equazione del tipo $f(x, y) = 0$

Consideriamo una funzione reale di due variabili $f(x, y)$ definita in un insieme A del piano (O, x, y) . Indichiamo con $p_x(A)$ l'insieme delle ascisse dei punti di A e con $p_y(A)$ l'insieme delle ordinate dei punti di A .

L'insieme $p_x(A)$ si chiama **la prima proiezione di A** o **la proiezione di A sull'asse x** , l'insieme $p_y(A)$ si chiama **la seconda proiezione di A** o **la proiezione di A sull'asse delle y** .

Consideriamo ora due insiemi di numeri reali X e Y .

Si dice che **nell'insieme $X \times Y$ l'equazione $f(x, y) = 0$ definisce implicitamente y come funzione di x** o anche che **nell'insieme $X \times Y$ l'equazione $f(x, y) = 0$ permette di ricavare in modo univoco y come funzione di x** quando si verifica la seguente proprietà:

Figura 3.12: insieme A del piano (O, x, y) .

$\alpha) \forall x \in X, \exists! y \in Y : y$ è sol.ne dell'equazione (nell'incognita y) $f(x, y) = 0$

ossia:

$$\forall x \in X, \exists! y \in Y : (x, y) \in A \text{ e } f(x, y) = 0.$$

Se la proprietà $\alpha)$ si verifica, ha senso considerare la funzione

$$y : x \in X \rightarrow \text{l'unica } y \in Y : f(x, y) = 0$$

Questa funzione si chiama **la funzione della variabile x implicitamente definita dall'equazione $f(x, y) = 0$ in $X \times Y$** o anche **la funzione implicita della variabile x definita dall'equazione $f(x, y) = 0$ in $X \times Y$** . Si noti che tale funzione, pur chiamandosi *la funzione implicitamente definita dall'equazione $f(x, y) = 0$ in $X \times Y$* , è in realtà una funzione definita in X . Si noti anche che, se si verifica la proprietà $\alpha)$, necessariamente risulta $X \subseteq p_x(A)$ e $Y \cap p_y(A) \neq \emptyset$.

Pertanto il più grande prodotto cartesiano $X \times Y$ in cui l'equazione $f(x, y) = 0$ può definire implicitamente y come funzione di x è il prodotto cartesiano $p_x(A) \times \mathbb{R}$.

Orbene si dice che **l'equazione $f(x, y) = 0$ definisce implicitamente y come funzione di x** , senza precisare il prodotto cartesiano $X \times Y$ in cui ciò avviene, quando tale prodotto cartesiano è proprio $p_x(A) \times \mathbb{R}$, i.e. il più grande possibile.

Considerati ora sempre due generici insiemi di numeri reali X e Y , si dice che nell'insieme $X \times Y$ l'equazione $f(x, y)$ definisce implicitamente x come funzione di y quando si verifica la seguente proprietà:

$\beta) \forall y \in Y, \exists! x \in X : x$ è sol.ne dell'equazione (nell'incognita x) $f(x, y) = 0$

ossia

$$y \in Y, \exists! x \in X : (x, y) \in A \text{ e } f(x, y) = 0$$

Se la proprietà $\beta)$ si verifica, la funzione

$$x : y \in Y \rightarrow \text{l'unica } x \in X : f(x, y) = 0$$

ha senso e si chiama **la funzione della variabile y definita implicitamente dall'equazione $f(x, y) = 0$ in $X \times Y$** .

Si noti che tale funzione è in realtà definita in Y .

Si noti che, se la proprietà β) si verifica, risulta $Y \subseteq p_y(A)$ e $X \cap p_x(A) \neq \emptyset$.

Si dice che **l'equazione $f(x, y) = 0$ definisce implicitamente x come funzione di y** , senza precisare il prodotto cartesiano $X \times Y$ in cui ciò avviene, quando tale prodotto cartesiano è proprio $\mathbb{R} \times p_y(A)$, i.e. il più grande possibile.

Osservazione 26 Ogni funzione reale di una variabile reale si può sempre considerare come una funzione implicitamente definita da un'equazione del tipo $f(x, y) = 0$. Infatti, detta $\varphi(x)$ una funzione reale di una variabile reale e detto X l'insieme di definizione di $\varphi(x)$, la funzione $\varphi(x)$ coincide con la funzione della variabile x definita implicitamente dall'equazione $\varphi(x) - y = 0$ nell'insieme $X \times \varphi(X)$; se poi la funzione $\varphi(x)$ è anche invertibile, l'equazione $\varphi(x) - y = 0$ definisce implicitamente anche x come funzione di y nell'insieme $X \times \varphi(X)$, e la funzione di y implicitamente definita in $X \times \varphi(X)$ dall'equazione $\varphi(x) - y$ risulta eguale alla funzione $x = \varphi^{-1}(y)$, i.e. alla funzione inversa di $\varphi(x)$.

Esempio 22 Consideriamo l'equazione

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (3.15.1)$$

La funzione a 1° membro è definita in tutto il piano (O, x, y) , e quindi risulta $p_x(A) = \mathbb{R}$ e $p_y(A) = \mathbb{R}$.

Osserviamo che l'equazione (3.15.1) è equivalente all'equazione

$$y = \pm \sqrt{1 - x^2} \quad (3.15.2)$$

nel senso che ogni punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ che soddisfa la (3.15.1) soddisfa anche la (3.15.2) per un'opportuna determinazione del segno a 2° membro, e vale anche il viceversa.

L'equazione (3.15.1) definisce implicitamente y come funzione di x ?, i.e. l'equazione (3.15.1) definisce implicitamente y come funzione di x nel più grande insieme in cui è possibile, i.e. in $p_x(A) \times \mathbb{R} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$?

No, perchè considerato un $x \in p_x(A)$, se risulta $|x| < 1$ esistono due numeri $y \in \mathbb{R}$ che sono soluzioni della (3.15.1); se risulta $|x| > 1$ non esiste alcun $y \in \mathbb{R}$ che è soluzione della (3.15.1).

L'equazione (3.15.1) definisce implicitamente y come funzione di x in $[-1, 1] \times \mathbb{R}$?

No, perchè fissato un $x \in]-1, 1[$ esistono due numeri $y \in \mathbb{R}$ che soddisfano la (3.15.1).

L'equazione (3.15.1) definisce implicitamente y come funzione di x in $[-1, 1] \times$

$[0, +\infty[$?
Si, perchè

$$\forall x \in [-1, 1] \exists! y \in [0, +\infty[: y \text{ è sol.ne dell'eq.ne (3.15.1),}$$

e ovviamente si ha: $y = +\sqrt{1-x^2}$.
 La funzione

$$g : x \in [-1, 1] \rightarrow +\sqrt{1-x^2} \in [0, +\infty[$$

è la funzione della variabile x implicitamente definita dalla (3.15.1) in $[-1, 1] \times [0, +\infty[$.

Ovviamente la (3.15.1) definisce implicitamente y come funzione di x anche in $[-1, 1] \times]-\infty, 0]$, e la funzione di x implicitamente definita dalla (3.15.1) in tale insieme è la funzione:

$$h : x \in [-1, 1] \rightarrow -\sqrt{1-x^2} \in]-\infty, 0]$$

Sembrerebbe che l'equazione (3.15.1) definisca implicitamente solo due funzioni della variabile x : g e h .

Ma ciò non è vero perchè, come si riconosce facilmente, $\forall X \subseteq [-1, 1]$, anche le restrizioni g_X e h_X sono funzioni implicitamente definite dalla (3.15.1) (rispettivamente in $X \times [0, +\infty[$ e in $X \times]-\infty, 0]$).

Quindi in realtà l'equazione (3.15.1) definisce implicitamente infinite funzioni della variabile x .

Esempio 23 Consideriamo l'equazione

$$x^2 + y^2 + 1 = 0. \tag{3.15.3}$$

Poichè l'equazione (3.15.3) è priva di soluzioni in \mathbb{R}^2 , comunque si considerano due insiemi $X \subseteq \mathbb{R}$ e $Y \subseteq \mathbb{R}$, l'equazione (3.15.3) in $X \times Y$ non può definire implicitamente né y come funzione di x , né x come funzione di y . Pertanto l'equazione (3.15.3) non definisce implicitamente nessuna funzione.

Dalle definizioni date si deduce, con facili considerazioni, la seguente:

Proposizione 3 Consideriamo un'equazione $f(x, y) = 0$ con $f(x, y)$ funzione reale di due variabili definita in un insieme A del piano (O, x, y) , e

consideriamo due insiemi $X \subseteq \mathbb{R}$ e $Y \subseteq \mathbb{R}$. vale la seguente equivalenza:

$$\left(\begin{array}{l} \text{In } X \times Y \text{ l'equazione } f(x, y) = 0 \\ \text{definisce implicitamente} \\ y \text{ come funzione di } x \\ (x \text{ come funzione di } t) \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \text{In } X \times Y \text{ la curva} \\ \text{di equazione } f(x, y) = 0 \\ \text{s'identifica con un} \\ \text{diagramma rispetto} \\ \text{all'asse delle } x \\ \text{di una funzione definita} \\ \text{in tutto } X \\ \left(\begin{array}{l} \text{un diagramma rispetto} \\ \text{all'asse delle } y \\ \text{di una funzione} \\ \text{definita in tutto } Y \end{array} \right) \end{array} \right)$$

Esempio 24 Sia $f(x, y)$ una funzione definita in un insieme A del piano (O, x, y) .

Supponiamo che la curva Γ del piano (O, x, y) di equazione cartesiana $f(x, y) = 0$ abbia la configurazione rappresentata nella figura 3.13. Diciamo R_1 , R_2 e

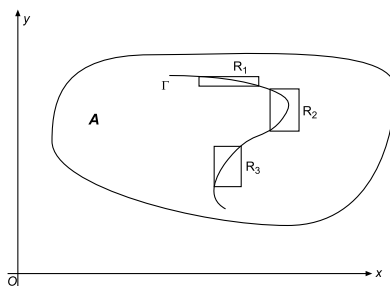


Figura 3.13: Rappresentazione della curva $f(x, y) = 0$.

R_3 i tre rettangoli di \mathbb{R}^2 rappresentati nel piano (O, x, y) con i rettangoli in figura.

Allora, per la proposizione 3, l'equazione $f(x, y) = 0$ nei rettangoli R_1 e R_3 definisce implicitamente sia y come funzione di x , sia x come funzione di y ; nel rettangolo R_2 l'equazione $f(x, y) = 0$ definisce x come funzione di y , ma non definisce y come funzione di x .

3.16 Il teorema del Dini per un'equazione del tipo $f(x, y) = 0$

Osservazione 27 Abbiamo visto che non sempre un'equazione del tipo $f(x, y) = 0$ con x e y variabili reali definisce implicitamente y come funzione di x o x come funzione di y in qualche insieme del tipo $X \times Y$. Si pensi

3.16 Il teorema del Dini per un'equazione del tipo $f(x, y) = 0$ 109

ad esempio all'equazione $x^2 + y^2 + 1 = 0$.

C'è da aggiungere poi che non sempre è facile stabilire ricorrendo alla definizione se un'equazione $f(x, y) = 0$ definisce implicitamente y come funzione di x o x come funzione di y in qualche insieme del tipo $X \times Y$.

Ha perciò grande importanza il seguente teorema, dovuto al Dini², che fornisce una condizione sufficiente, ma non necessaria, affinché un'equazione del tipo $f(x, y) = 0$ definisca implicitamente y come funzione di x in qualche intorno **rettangolare**, e quindi del tipo $X \times Y$, di un punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

[N.B. : un intorno circolare di un punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ non è mai un prodotto cartesiano.]

Teorema 3.18 (del Dini) Consideriamo una funzione reale di due variabili $f(x, y)$ definita in un insieme A del piano (O, x, y) e un punto $P_0 = (x_0, y_0) \in \overset{\circ}{A}$. Supponiamo che $f(x, y)$ sia di classe C^1 in un intorno di P_0 , $I(P_0)$. Supponiamo, inoltre, verificate le seguenti due ipotesi:

1. $f(x_0, y_0) = 0$
2. $f_y(x_0, y_0) \neq 0$

Orbene nelle ipotesi fatte l'equazione $f(x, y) = 0$ definisce implicitamente y come funzione di x in un opportuno intorno rettangolare del punto $P_0 = (x_0, y_0)$.

Più precisamente nelle ipotesi fatte si ha che esiste un intorno X di x_0 e un intorno Y di y_0 che godono delle seguenti proprietà:

- 1^a) Nell'insieme $X \times Y$, che è un intorno rettangolare di (x_0, y_0) , l'equazione $f(x, y) = 0$ definisce implicitamente y come funzione di x .
- 2^a) Detta $y(x)$ la funzione della variabile x implicitamente definita in $X \times Y$ dall'equazione $f(x, y) = 0$, la funzione $y(x)$ verifica la condizione $y(x_0) = y_0$; inoltre $y(x)$ è di classe $C^1(X)$ e la sua derivata $y'(x)$ è legata alla funzione $y(x)$ mediante la seguente relazione:

$$y'(x) \equiv \frac{dy(x)}{dx} = -\frac{f_x(x, y(x))}{f_y(x, y(x))} \quad \forall x \in X$$

[In altri termini la funzione $y(x)$ è una soluzione dell'equazione differenziale

$$y'(x) = -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)}$$

]

²Ulisse Dini, illustre matematico italiano. Nato il 14 novembre del 1845 a Pisa muore a Pisa il 28 ottobre del 1918.

Dimostrazione — Per fissare le idee sia

$$f_y(x_0, y_0) > 0.$$

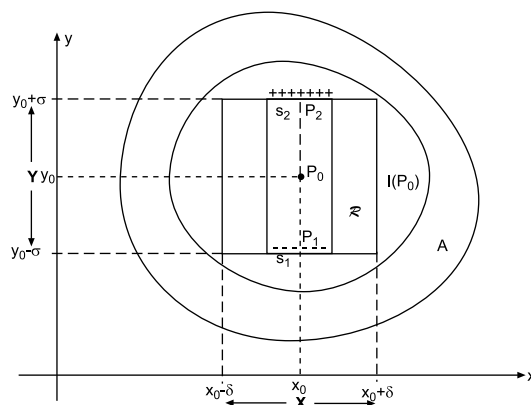


Figura 3.14: Teorema del Dini: rappresentazione grafica di A , $I(P_0)$ e \mathcal{R} .

Essendo la funzione f_y continua in $I(P_0)$ per il teorema della permanenza del segno per le continue si ha che esiste un rettangolo **chiuso** \mathcal{R} di centro $P_0 = (x_0, y_0)$ incluso in I , i.e. esiste un rettangolo del tipo:

$$\mathcal{R} = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \sigma, y_0 + \sigma] \subseteq I(P_0)$$

tale che risulta $f_y(x, y) > 0 \quad \forall (x, y) \in \mathcal{R}$. Da ciò segue che la funzione $f(x, y)$ è strettamente crescente sui segmenti verticali del rettangolo \mathcal{R} nel senso che $\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ la funzione di y $f(x, y)$ è strettamente crescente in $[y_0 - \sigma, y_0 + \sigma]$. In particolare la funzione $f(x, y)$ è strettamente crescente sul segmento verticale passante per P_0 nel senso che la funzione $f(x_0, y)$ è strettamente crescente in $[y_0 - \sigma, y_0 + \sigma]$, e quindi, essendo per ipotesi $f(P_0) = 0$, risulterà $f(P_1) < 0$ e $f(P_2) > 0$, avendo indicato con P_1 e P_2 i due punti in figura 3.14, i.e. i punti $P_1 = (x_0, y_0 - \sigma)$ e $P_2 = (x_0, y_0 + \sigma)$. Essendo $f(P_1) < 0$ e $f(P_2) > 0$, sempre per il teorema della permanenza del segno, esisterà un segmento orizzontale di centro P_1 , diciamolo s_1 , e un segmento orizzontale di centro P_2 , diciamolo s_2 , tali che risulta

$$f(P) < 0 \quad \forall P \in s_1 \quad \text{e} \quad f(P) > 0 \quad \forall P \in s_2$$

Naturalmente si può supporre che i due segmenti s_1 e s_2 abbiano la stessa lunghezza.

Da quanto detto segue che esiste un intorno X di x_0 contenuto in $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, i.e. un intorno di x_0 del tipo

$$X =]x_0 - \delta', x_0 + \delta'[$$

3.16 Il teorema del Dini per un'equazione del tipo $f(x, y) = 0$ 111

con $\delta' \leq \delta$, tale che:

$$\forall x \in X \text{ risulta } f(x, y_0 - \sigma) < 0 \text{ e } f(x, y_0 + \sigma) > 0.$$

Da ciò, tenendo presente che $\forall x \in X$ la funzione di y $f(x, y)$ è continua e strettamente crescente in $]y_0 - \sigma, y_0 + \sigma[$, e tenendo presente il teorema degli zeri per le funzioni continue, si deduce che:

$$\forall x \in X, \exists! y \in]y_0 - \sigma, y_0 + \sigma[: f(x, y) = 0.$$

Ciò equivale a dire per definizione che, posto $Y =]y_0 - \sigma, y_0 + \sigma[$, l'equazione $f(x, y)$ definisce implicitamente y come funzione di x nell'intorno rettangolare di (x_0, y_0) $X \times Y$. Diciamo $y(x)$ la funzione di x implicitamente definita dall'equazione $f(x, y) = 0$ in $X \times Y$, i.e. diciamo $y(x)$ la funzione:

$$y : x \in X \rightarrow \text{l'unico } y \in Y : f(x, y) = 0$$

Si vede subito che la funzione $y(x)$ verifica la condizione $y(x_0) = y_0$. Infatti, per il modo in cui è definita la funzione $y(x)$, il numero $y(x_0)$ è l'unico numero $y \in Y =]y_0 - \sigma, y_0 + \sigma[$ per il quale risulta $f(x_0, y) = 0$; d'altra parte, per l'ipotesi 1), y_0 è un numero di $]y_0 - \sigma, y_0 + \sigma[$ per il quale risulta $f(x_0, y_0) = 0$; pertanto si ha $y(x_0) = y_0$.

resta da far vedere che la funzione $y(x)$ è di classe $C^1(X)$ e che risulta:

$$y'(x) = -\frac{f_x(x, y(x))}{f_y(x, y(x))} \quad \forall x \in X.$$

A tale scopo fissiamo un punto $\bar{x} \in X$ e diciamo Δx un incremento della variabile x piccolo in modo tale che $\bar{x} + \Delta x$ appartenga a X ; poniamo poi :

$$\Delta y = y(\bar{x} + \Delta x) - y(\bar{x}).$$

Poichè risulta $f(x, y(x)) = 0 \quad \forall x \in X$, si ha in particolare:

$$f(\bar{x}, y(\bar{x})) = 0 \text{ e } f(\bar{x} + \Delta x, y(\bar{x} + \Delta x)) = 0$$

i.e.

$$f(\bar{x} + \Delta x, y(\bar{x}) + \Delta y) = 0.$$

E quindi risulta:

$$f(\bar{x} + \Delta x, y(\bar{x}) + \Delta y) - f(\bar{x}, y(\bar{x})) = 0.$$

D'altra parte per il teorema di Lagrange per le funzioni di più variabili, si ha che

$$\begin{aligned} \exists \vartheta \in]0, 1[\text{ (dipendente da } x) : f(\bar{x} + \Delta x, y(\bar{x}) + \Delta y) - f(\bar{x}, y(\bar{x})) = \\ = f_x(\bar{x} + \vartheta \Delta x, y(\bar{x}) + \vartheta \Delta y) \cdot \Delta x + f_y(\bar{x} + \vartheta \Delta x, y(\bar{x}) + \vartheta \Delta y) \cdot \Delta y, \end{aligned}$$

pertanto, essendo il primo membro di questa eguaglianza eguale a zero, si conclude che:

$$\forall \Delta x : \bar{x} + \Delta x \in X, \exists \vartheta \in]0, 1] \text{ (dipendente da } x) :$$

$$f_x(\bar{x} + \vartheta \Delta x, y(\bar{x}) + \vartheta \Delta y) \cdot \Delta x + f_y(\bar{x} + \vartheta \Delta x, y(\bar{x}) + \vartheta \Delta y) \cdot \Delta y = 0$$

Si noti ora che risulta

$$f_y(\bar{x} + \vartheta \Delta x, y(\bar{x}) + \vartheta \Delta y) \neq 0,$$

perchè il punto $(\bar{x} + \vartheta \Delta x, y(\bar{x}) + \vartheta \Delta y)$ è un punto interno al segmento di estremi $(\bar{x}, y(\bar{x})) \in X \times Y$ e $(\bar{x} + \vartheta \Delta x, y(\bar{x}) + \vartheta \Delta y) \equiv (\bar{x} + \Delta x, y(\bar{x} + \Delta x)) \in X \times Y$, e quindi appartiene a $X \times Y$, e quindi al rettangolo \mathcal{R} nel quale risulta $f_y(x, y) > 0$.

Pertanto dall'eguaglianza ottenuta si deduce la seguente eguaglianza:

$$\Delta y = - \frac{f_x(\bar{x} + \vartheta \Delta x, y(\bar{x}) + \vartheta \Delta y)}{f_y(\bar{x} + \vartheta \Delta x, y(\bar{x}) + \vartheta \Delta y)} \cdot \Delta x \quad (3.16.1)$$

Dall'eguaglianza (3.16.1) si deduce che risulta

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$$

Giustificazione errata dell'eguaglianza $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$

Dall'eguaglianza (3.16.1) segue che $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ poichè applicando alla (3.16.1) il teorema sul limite del prodotto di due funzioni convergenti si ha:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = - \frac{f_x(\bar{x}, y(\bar{x}))}{f_y(\bar{x}, y(\bar{x}))} \cdot 0 = 0.$$

Tale giustificazione è **errata** perchè in essa si è utilizzato il fatto che $\Delta y \rightarrow 0$ per $\Delta x \rightarrow 0$, e cioè proprio il fatto che si deve dimostrare.

Giustificazione corretta dell'eguaglianza $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$

Dalla eguaglianza (3.16.1) segue che $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ perchè, per il teorema di Weierstrass, la funzione

$$- \frac{f_x(\bar{x}, y(\bar{x}))}{f_y(\bar{x}, y(\bar{x}))}$$

è limitata nel rettangolo chiuso \mathcal{R} , e quindi anche la funzione

$$- \frac{f_x(\bar{x} + \vartheta \Delta x, y(\bar{x}) + \vartheta \Delta y)}{f_y(\bar{x} + \vartheta \Delta x, y(\bar{x}) + \vartheta \Delta y)}$$

è limitata al variare di Δx (nell'insieme dei $\Delta x : \bar{x} + \Delta x \in X$); d'altra parte, come è noto, il prodotto di una funzione limitata per una funzione

3.16 Il teorema del Dini per un'equazione del tipo $f(x, y) = 0$ 113

infinitesima (in un punto) è ancora un infinitesimo (in quel punto).
Dunque effettivamente risulta

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0.$$

Si noti che, essendo $\Delta y = y(\bar{x} + \Delta x) - y(\bar{x})$, dall'eguaglianza $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ già segue che la funzione $y(x)$ è continua in \bar{x} ; ma ciò non è essenziale per il seguito perchè dall'eguaglianza $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ dedurremo molto di più.

Infatti, poichè $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ dividendo 1° e 2° membro dell'eguaglianza (3.16.1) per Δx e passando al limite per $\Delta x \rightarrow 0$, si ottiene:

$$y'(x) = -\frac{f_x(\bar{x}, y(\bar{x}))}{f_y(\bar{x}, y(\bar{x}))}$$

e quindi, poichè \bar{x} è stato fissato a piacere in X , si ha:

$$y'(x) = -\frac{f_x(x, y(x))}{f_y(x, y(x))} \quad \forall x \in X.$$

Questa eguaglianza innanzitutto ci dice che la funzione $y(x)$ è derivabile in tutto X , e quindi è anche continua in X ; inoltre, poichè il 2° membro è certamente una funzione continua in X , l'eguaglianza ottenuta ci dice che anche la derivata $y'(x)$ è continua in X .

Pertanto resta dimostrato che $y(x)$ è di classe $C^1(X)$ e resta anche dimostrata la formula che esprime la relazione tra $y'(x)$ e $y(x)$.

Il teorema è completamente dimostrato. \square

Osservazione 28 Partendo dalla relazione

$$y'(x) = -\frac{f_x(x, y(x))}{f_y(x, y(x))} \quad \forall x \in X$$

si può facilmente dimostrare che, se la funzione $f(x, y)$ è di classe C^n nell'intorno $I(P_0)$ menzionato nell'enunciato del teorema del Dini, anche la funzione $y(x)$ implicitamente definita in $X \times Y$ dall'equazione $f(x, y) = 0$ è di classe C^n nel suo intervallo di definizione X . In particolare, se $f(x, y)$ è di classe C^∞ nell'intervallo $I(P_0)$, anche la funzione $y(x)$ è di classe C^∞ nel suo intervallo di definizione X .

Osservazione 29 Sostituendo alle ipotesi

$$1) f(x_0, y_0) = 0 \quad \text{e} \quad 2) f_y(x_0, y_0) \neq 0$$

le ipotesi

$$1) f(x_0, y_0) = 0 \quad \text{e} \quad 2') f_x(x_0, y_0) \neq 0,$$

il teorema del Dini si trasforma in un teorema analogo, detto sempre del Dini, il quale fornisce una condizione sufficiente affinché l'equazione $f(x, y) = 0$ definisca implicitamente x come funzione di y in un opportuno intorno rettangolare $X \times Y$ del punto (x_0, y_0) .

In questo nuovo teorema, detta $x(y)$ la funzione di y implicitamente definita dall'equazione $f(x, y) = 0$ in $X \times Y$, si avrà che la funzione $x(y)$ verifica la condizione $x(y_0) = x_0$; inoltre essa è di classe $C^1(Y)$ e la derivata $x'(y)$ è legata alla funzione $x(y)$ dalla seguente relazione:

$$x'(y) = \frac{d}{dy}x(y) = -\frac{f_y(x(y), y)}{f_x(x(y), y)} \quad \forall y \in Y$$