

Capitolo 4

Integrazione

4.1 Teoria della misura secondo Peano—Jordan in \mathbb{R}^k

Siano $a = (a_1, \dots, a_k)$ e $b = (b_1, \dots, b_k)$ punti di \mathbb{R}^k ($k \geq 1$) con

$$a_i \leq b_i \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}.$$

Sia

$$\mathcal{R} = \prod_{i=1}^k [a_i, b_i]$$

il rettangolo chiuso di \mathbb{R}^k di estremi a e b .

Diremo che \mathcal{R} è **degenere** se

$$\exists i \in \{1, \dots, k\} : a_i = b_i.$$

Osservazione 30 I rettangoli degeneri di \mathbb{R} sono rappresentati geometricamente dai punti di una retta, quelli non degeneri dai segmenti della stessa retta. I rettangoli degeneri di \mathbb{R}^2 sono rappresentati geometricamente dai segmenti di un piano parallelo ad uno degli assi ordinati oppure da punti, quelli non degeneri da rettangoli dello stesso piano.

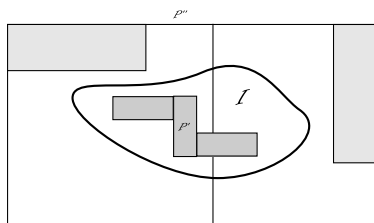
Definizione 41 Si chiama **misura di \mathcal{R}** il numero reale non negativo

$$\mu_k(\mathcal{R}) = \prod_{i=1}^k (b_i - a_i)$$

Definizione 42 Un **plurirettangolo chiuso** di \mathbb{R}^k , diciamolo \mathcal{P} , è l'unione di un numero finito di rettangoli chiusi

$$\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_n$$

a due a due privi di punti interni comuni.

Figura 4.1: Decomposizione di I .

Diremo che \mathcal{P} è **degenere** se ciascuno dei rettangoli è degenere. Si chiama **misura di \mathcal{P}** il numero reale non negativo:

$$\mu_k(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n \mu_k(\mathcal{R}_i)$$

non è difficile dimostrare il

Teorema 4.1 Se \mathcal{P}' e \mathcal{P}'' sono plurirettangolo chiusi di \mathbb{R}^k , con

$$\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}''$$

allora

$$\mu_k(\mathcal{P}') \leq \mu_k(\mathcal{P}'')$$

• • •

Sia I una parte limitata di \mathbb{R}^k . Denotiamo con $A(I)$ l'insieme delle misure dei plurirettangoli chiusi contenuti in I , $B(I)$ l'insieme delle misure dei plurirettangoli chiusi contenenti I .

In base al teorema (4.1) $A(I)$ e $B(I)$ sono **separati**; risulta i.e.

$$\sup A(I) \leq \inf B(I).$$

Definizione 43 Si dice che I è **misurabile** secondo Peano—Jordan se $A(I)$ e $B(I)$ sono **contigui**, i.e. se

$$\sup A(I) = \inf B(I)$$

In tal caso si chiama **misura di I** il numero reale non negativo

$$\mu_k(I) = \sup A(I) = \inf B(I)$$

Si conviene che la parte vuota di \mathbb{R}^k è misurabile ed ha misura nulla.

Rileviamo esplicitamente che se I_1 e I_2 sono parti limitate e misurabili di \mathbb{R}^k con $I_1 \subseteq I_2$, risulta

$$\mu_k(I_1) \leq \mu_k(I_2)$$

Osservazione 31 La proprietà testè definita è nota come **proprietà di monotonia**.

Teorema 4.2 Sia I una parte limitata di \mathbb{R}^k . Le affermazioni seguenti sono equivalenti:

1. I è misurabile;
2. Per ogni $\varepsilon > 0$ esistono due plurirettangoli chiusi \mathcal{P}' e \mathcal{P}'' tali che:

$$\mathcal{P}' \subseteq I \subseteq \mathcal{P}'', \mu_k(\mathcal{P}'') - \mu_k(\mathcal{P}') < \varepsilon$$

Dimostrazione — Dire che I è misurabile significa che $A(I)$ e $B(I)$ sono contigui e ciò accade se e solo se è vera la (2). \square

Teorema 4.3 Sia I una parte limitata di \mathbb{R}^k . Le affermazioni seguenti sono equivalenti:

1. I è misurabile
2. Per ogni $\varepsilon > 0$ esistono due parti limitate e misurabili di \mathbb{R}^k I_1 e I_2 tali che

$$I_1 \subseteq I \subseteq I_2, \mu_k(I_2) - \mu_k(I_1) < \varepsilon$$

Dimostrazione — L'implicazione

$$(1) \Rightarrow (2)$$

è vera in virtù del teorema (4.2). Verifichiamo che

$$(2) \Rightarrow (1).$$

Fissato $\varepsilon > 0$, per ipotesi esistono due parti limitate e misurabili di \mathbb{R}^k I_1 e I_2 tali che

$$I_1 \subseteq I \subseteq I_2, \mu_k(I_2) - \mu_k(I_1) < \frac{\varepsilon}{2}$$

D'altra parte visto che

$$\begin{aligned} \mu_k(I_1) &= \sup A(I_1) \\ \mu_k(I_2) &= \inf B(I_2) \end{aligned}$$

la seconda proprietà dell'estremo superiore e la seconda proprietà dell'estremo inferiore garantiscono l'esistenza di due plurirettangoli chiusi \mathcal{P}' e \mathcal{P}'' tali che:

$$\mathcal{P}' \subseteq I \quad \text{e} \quad \mu_k(\mathcal{P}') > \mu_k(I_1) - \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\mathcal{P}'' \subseteq I \quad \text{e} \quad \mu_k(\mathcal{P}'') < \mu_k(I_2) + \frac{\varepsilon}{4}$$

Ne segue $\mathcal{P}' \subseteq I \subseteq \mathcal{P}''$

$$\begin{aligned} \mu_k(P'') - \mu_k(P') &< \mu_k(I_2) + \frac{\varepsilon}{4} - \mu_k(I_1) + \frac{\varepsilon}{4} = \\ &= \mu_k(I_2) - \mu_k(I_1) + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

e ciò, stante il teorema (4.2), comporta che I è misurabile □

Osservazione 32 . Sia I una parte limitata di \mathbb{R}^k . Se I è priva di punti interni i plurirettangoli chiusi contenuti in I sono soltanto quelli degeneri che hanno misura nulla sicchè $A(I) = \{0\}$.

Pertanto I è misurabile se e solo se

$$\inf B(I) = 0$$

Dunque le parti limitate e misurabili di \mathbb{R}^k privi di punti interni hanno misura nulla.

• • •

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ denotiamo con Q_n il quadrato di \mathbb{R}^k di centro l'origine e di lato n , poniamo cioè:

$$Q_n = [-n, n]^k$$

Sia I una parte non limitata di \mathbb{R}^k . Si dice che I è **misurabile secondo Peano—Jordan** se per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'insieme limitato $I \cap Q_n$ è misurabile. In tal caso osservato che

$$I \cap Q_n \subseteq I \cap Q_{n+1} \Rightarrow \mu_k(I \cap Q_n) \leq \mu_k(I \cap Q_{n+1})$$

Il teorema sui limiti delle successioni monotone ci consente di asserire che:

$$\lim_n \mu_k(I \cap Q_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mu_k(I \cap Q_n)$$

Orbene si chiama misura di I l'elemento di $[0, +\infty]$:

$$\mu_k(I) = \lim_n \mu_k(I \cap Q_n)$$

Quindi se I è non limitato e misurabile la sua misura potrebbe essere $+\infty$.

Se $\mu_k(I) = +\infty$, suol dirsi che I ha **misura infinita**.

Di facile dimostrazione sono i teoremi seguenti:

Teorema 4.4 *Se I è una parte di \mathbb{R}^k (limitata e non) misurabile e di misura nulla, allora ogni parte di I è misurabile ed ha misura nulla.*

Dimostrazione — Omessa. □

Teorema 4.5 Se I_1 e I_2 sono parti di \mathbb{R}^k (limitate o non) misurabili allora ciascuno degli insiemi

$$I_1 \cup I_2, \quad I_1 \cap I_2, \quad I_1 - I_2$$

è misurabile. Inoltre, se $I_1 \cup I_2$ ha misura finita risulta:

$$\mu_k(I_1 \cup I_2) = \mu_k(I_1) + \mu_k(I_2) - \mu_k(I_1 \cap I_2)$$

Osservazione 33 Se I_1 e I_2 non hanno punti interni in comune (in particolare se I_1 e I_2 sono disgiunti), poichè $\mu_k(I_1 \cap I_2) = 0$ si ha:

$$\mu_k(I_1 \cup I_2) = \mu_k(I_1) + \mu_k(I_2).$$

Osservazione 34 Se $I_1 \supseteq I_2$ visto che,

$$I_1 = I_2 \cup (I_1 - I_2)$$

risulta

$$\mu_k(I_1) = \mu_k(I_2) + \mu_k(I_1 - I_2) \quad (4.1.1)$$

si ha quindi:

$$\mu_k(I_1 - I_2) = \mu_k(I_1) - \mu_k(I_2)$$

Rileviamo esplicitamente che dalla (4.1.1) si ricava che:

$$\mu_k(I_1) \geq \mu_k(I_2)$$

È facile verificare che la frontiera di un insieme misurabile è misurabile ed ha misura nulla, come del resto accade per la frontiera di un poligono. Anzi è possibile dimostrare che la proprietà di avere la frontiera di misura nulla è caratteristica degli insiemi misurabili; in altri termini, vale il teorema:

Teorema 4.6 Sia I una parte di \mathbb{R}^k limitata o non. Le affermazioni seguenti sono equivalenti:

1. I è misurabile
2. La frontiera di I è misurabile ed ha misura nulla.

Osservazione 35 Nel caso $k = 1$ [$k = 2$, $k = 3$] la parola **misura** è sinonimo di **lunghezza** [**area**, **volume**].

4.2 Integrazione per le funzioni reali di una variabile reale.

4.2.1 Nozioni preliminari

Sia f reale, continua in $[a, b]$ compatto di \mathbb{R} . In $]a, b[$ fissiamo i punti $x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1}$ e poniamo $x_0 = a$ e $x_n = b$. Consideriamo gli intervalli

$$[x_0, x_1[, [x_1, x_2[, \dots, [x_{n-2}, x_{n-1}[, [x_{n-1}, x_n] \quad (4.2.1)$$

a due a due privi di punti interni comuni e la loro unione è pari ad $[a, b]$. Per tale ragione suol dirsi che gli intervalli (4.2.1) costituiscono **una decomposizione di $[a, b]$ (in intervalli compatti)**.

Tale decomposizione sarà denotata col simbolo $D(x_0, x_1, \dots, x_n)$; si chiama **ampiezza della decomposizione** la più grande ampiezza degli intervalli della partizione, i.e. il numero positivo:

$$\delta(D) = \max \{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}\} = \max_{i \in \{0, 1, \dots, n-1\}} \{(x_{i+1} - x_i)\}$$

Sia f una funzione reale definita nella parte X di \mathbb{R} . Le funzioni reali:

$$f^+ : x \in X \rightarrow \frac{f(x) + |f(x)|}{2} = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

$$f^- : x \in X \rightarrow \frac{f(x) - |f(x)|}{2} = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) < 0 \\ 0 & \text{se } f(x) \geq 0 \end{cases}$$

diconsi, rispettivamente, **la parte non negativa** di f e **la parte non positiva** di f . Evidentemente:

$$f = f^+ + f^- \quad |f| = f^+ - f^-$$

Aggiungiamo che se f è continua in X tali sono anche f^+ e f^- .

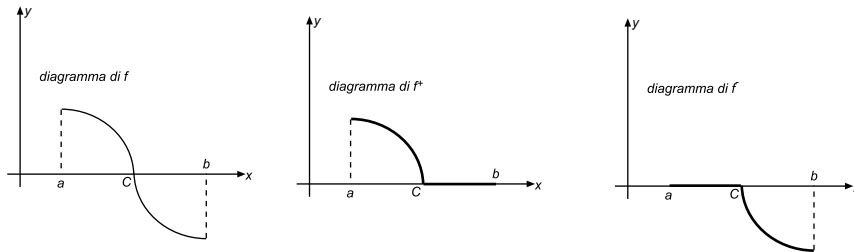


Figura 4.2: I diagrammi di f , f^+ e f^-

4.3 Rettangoloide

Sia f una funzione reale definita nell'intervallo $[a, b]$ limitata o non ed ivi non negativa [non positiva].

Si chiama **rettangoloide relativo ad f e di base (a, b)** la parte di \mathbb{R}^2 :

$$\mathcal{R}(f) = \{P(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (a, b) \text{ e } 0 \leq y \leq f(x)\}$$

$$[\mathcal{R}(f) = \{P(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (a, b) \text{ e } f(x) \leq y \leq 0\}]$$

Teorema 4.7 *Se f è una funzione reale continua e non negativa nell'intervallo compatto $[a, b]$, allora il rettangoloide $\mathcal{R}(f)$ relativo ad f e di base $[a, b]$ è misurabile.*

Gli insiemi numerici descritti dalle somme s_D ed S_D al variare della partizione D sono contigui, e l'area del rettangoloide ne costituisce l'elemento di separazione. Si ha cioè:

$$\mu_2(\mathcal{R}(f)) = \sup_D s_D(f) = \inf_D S_D(f) \quad (4.3.1)$$

Dimostrazione — Considerata una partizione $D = D(x_0, x_1, \dots, x_n)$ dell'intervallo $[a, b]$, per ogni $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ diciamo m'_i, m''_i rispettivamente il minimo e il massimo della funzione f nell'intervallo $[x_i, x_{i+1}]$, ed $\mathcal{R}'_i, \mathcal{R}''_i$ i rettangoli di base $[x_i, x_{i+1}]$ ed altezze m'_i, m''_i , le cui aree sono:

$$m'_i(x_{i+1} - x_i) \quad , \quad m''_i(x_{i+1} - x_i)$$

L'unione dei rettangoli \mathcal{R}'_i è allora un poligono contenuto in \mathcal{R} , e l'unione

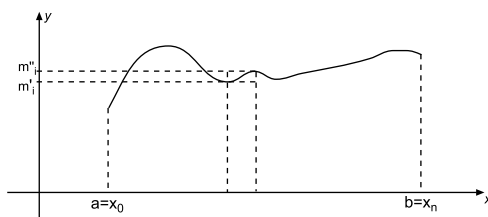


Figura 4.3: Plurirettangolo inscritto nel rettangoloide e plurirettangolo circoscritto al rettangoloide.

dei rettangoli \mathcal{R}''_i è un poligono contenente \mathcal{R} . Indicheremo tali poligoni con $p(D)$ e $P(D)$, e li diremo rispettivamente il **plurirettangolo inscritto** nel rettangoloide e il **plurirettangolo circoscritto** al rettangoloide, **associati alla partizione D** ; le aree di $p(D)$ e $P(D)$ sono espresse dalle somme:

$$s_D = \sum_{i=0}^{n-1} m'_i(x_{i+1} - x_i) \quad , \quad S_D = \sum_{i=0}^{n-1} m''_i(x_{i+1} - x_i).$$

Se ora si fa variare la partizione D dell'intervallo $[a, b]$, facendo variare sia i punti x_i sia il numero n , e se per ogni partizione si considerano il plurirettangolo inscritto e il plurirettangolo circoscritto ad essa associati, è ovvio che qualunque siano le partizioni D' , D'' risulta:

$$p(D') \subseteq \mathcal{R}(f) \subseteq P(D'')$$

e quindi:

$$s_{D'} \leq S_{D''}.$$

Pertanto gli insiemi numerici descritti dalle somme s_D e S_D al variare della partizione D sono separati.

Per provare che \mathcal{R} è misurabile occorre mostrare che, qualunque sia $\varepsilon > 0$, esistono un poligono $p_e \subseteq \mathcal{R}$ ed un poligono $P_e \supseteq \mathcal{R}$ tali che:

$$\text{area } P_e - \text{area } p_e < \varepsilon.$$

Poichè f è continua nell'intervallo compatto $[a, b]$ per il teorema di Heine—Cantor¹ essa è ivi uniformemente continua, e quindi per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un numero $\delta_\varepsilon > 0$ tale che, per $x', x'' \in [a, b]$, si abbia:

$$|x' - x''| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}. \quad (4.3.2)$$

Se allora $D_0 = D_0(x_0^0, x_1^0, \dots, x_n^0)$ è una partizione dell'intervallo $[a, b]$ di ampiezza $\delta < \delta_\varepsilon$, e se x'_i, x''_i sono punti dell'intervallo $[x_i^0, x_{i+1}^0]$ tali che

$$f(x'_i) = m'_i, \quad f(x''_i) = m''_i,$$

si ha

$$|x''_i - x'_i| \leq x_{i+1}^0 - x_i^0 \leq \delta < \delta_\varepsilon,$$

e di conseguenza per la (4.3.2) risulta

$$m''_i - m'_i < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Ne segue:

$$S_{D_0} - s_{D_0} = \sum_{i=0}^{n-1} (m''_i - m'_i) (x_{i+1}^0 - x_i^0) < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1}^0 - x_i^0) = \varepsilon$$

e ciò, essendo s_{D_0} l'area di un plurirettangolo inscritto nel rettangoloide ed S_{D_0} l'area di un plurirettangolo circoscritto al rettangoloide, prova che il rettangoloide è misurabile.

Il discorso precedente mostra altresì che gli insiemi numerici descritti da s_D e S_D al variare di D sono contigui, sicchè risulta

$$\sup s_D = \inf S_D.$$

¹Una funzione continua in un insieme compatto è ivi uniformemente continua.

4.4 Integrale di una funzione continua in un intervallo compatto 23

La (4.3.1) è allora stabilita, essendo

$$s_D \leq \mu(\mathcal{R}) \leq S_D$$

per ogni D □

Ragionando allo stesso modo, si dimostra il

Teorema 4.8 *Se f è una funzione reale continua in $[a, b]$ compatto ed ivi non positiva, allora il rettangoloide $\mathcal{R}(f)$ relativo ad f e di base $[a, b]$ compatto è misurabile e si ha:*

$$\mu_2(\mathcal{R}(f)) = \mu_2(\mathcal{R}(-f))$$

Dai teoremi (4.7) e (4.8) si deduce il

Teorema 4.9 *Se f è una funzione reale continua in $[a, b]$ compatto ed ivi non negativa [non positiva], allora il suo diagramma Γ_f è misurabile ed ha area nulla.*

4.4 Integrale di una funzione continua in un intervallo compatto

Sia f una funzione continua nell'intervallo $[a, b]$. Detta $D = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ una partizione di $[a, b]$ di ampiezza δ , e scelto, per ogni $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, un punto ξ_i nell'intervallo $[x_i, x_{i+1}]$, consideriamo la somma:

$$\sigma_D = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \tag{4.4.1}$$

Nella notazione σ_D abbiamo evidenziato la partizione D dalla quale la somma dipende. Avendo denotato con δ l'ampiezza della partizione D , si può dire che σ_D dipende anche da δ : si deve però osservare che, fissato un numero positivo $\delta < b - a$, esistono infinite partizioni D di ampiezza δ , e fissata una di esse, è possibile associare infinite somme σ_D , in dipendenza della scelta dei punti ξ_i . Pertanto la corrispondenza che ad ogni δ associa tutte le somme σ_D relative alle partizioni D di ampiezza δ , è una corrispondenza plurivoca e non una funzione della variabile δ .

Tuttavia, in virtù della continuità della funzione f nell'intervallo compatto $[a, b]$, se si fa variare la partizione D in modo che l'ampiezza δ tenda a 0, le somme σ_D tendono ad un ben determinato numero λ , nel senso precisato dal seguente teorema:

Teorema 4.10 *Se f è una funzione continua nell'intervallo compatto $[a, b]$, esiste uno ed un solo numero reale λ avente la seguente proprietà:*

*) Ad ogni $\varepsilon > 0$ è possibile associare un $\delta_\varepsilon > 0$ in modo che, per ogni partizione D di ampiezza $\delta < \delta_\varepsilon$ e qualunque siano i punti ξ_i , si abbia:

$$|\sigma_D - \lambda| < \varepsilon.$$

La *) si esprime sinteticamente scrivendo:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sigma_D = \lambda. \quad (4.4.2)$$

Dimostrazione — Cominciamo col provare l'unicità del numero λ .

Se λ' e λ'' sono due numeri tali da verificare la (4.4.2), ad ogni $\varepsilon > 0$ è possibile associare due numeri positivi δ'_ε e δ''_ε in modo che, per ogni partizione D di ampiezza $\delta < \delta'_\varepsilon$ si abbia $|\sigma_D - \lambda'| < \varepsilon$ e per ogni partizione D di ampiezza $\delta < \delta''_\varepsilon$ si abbia $|\sigma_D - \lambda''| < \varepsilon$, comunque si scelgano i punti ξ_i . Detto δ_ε il più piccolo dei numeri $\delta'_\varepsilon, \delta''_\varepsilon$ se D è una partizione di ampiezza $\delta < \delta_\varepsilon$ sussistono entrambe le disuguaglianze precedenti, e quindi si ha:

$$|\lambda' - \lambda''| \leq |\lambda' - \sigma_D| + |\sigma_D - \lambda''| < 2\varepsilon$$

donde, per l'arbitrarietà di ε , segue $\lambda' = \lambda''$.

Per dimostrare l'esistenza del numero λ , supporremo in un primo momento che la funzione sia non negativa o non positiva, quindi esamineremo il caso generale.

1. Nel caso che f sia non negativa, è facile verificare che il numero λ non è altro che l'area del rettangoloide \mathcal{R} di base $[a, b]$ relativo ad f , i.e. che vale la (4.4.2) con

$$\lambda = \mu(\mathcal{R}).$$

Invero, detta $D = D(x_0, x_1, \dots, x_n)$ una partizione di $[a, b]$, consideriamo le somme:

$$s_D = \sum_{i=0}^{n-1} m'_i (x_{i+1} - x_i) \quad , \quad S_D = \sum_{i=0}^{n-1} m''_i (x_{i+1} - x_i)$$

già precedentemente introdotte.

Poichè tali somme rappresentano rispettivamente l'area del plurirettangolo inscritto e l'area del plurirettangolo circoscritto al rettangoloide \mathcal{R} , associati alla partizione D , risulta:

$$s_D \leq \mu(\mathcal{R}) \leq S_D$$

D'altra parte, comunque si scelgano i punti $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, si ha

$$m'_i \leq f(\xi_i) \leq m''_i$$

e quindi risulta:

$$s_D \leq \sigma_D \leq S_D$$

4.4 Integrale di una funzione continua in un intervallo compatto

Ne segue:

$$|\sigma_D - \mu(\mathcal{R})| \leq S_D - s_D = \sum_{i=0}^{n-1} (m_i'' - m_i') (x_{i+1} - x_i). \quad (4.4.3)$$

Poichè f è uniformemente continua in $[a, b]$, ad ogni $\varepsilon > 0$ si può associare un $\delta_\varepsilon > 0$ in modo che si abbia:

$$|x' - x''| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Ragionando allora come si è fatto a proposito della misurabilità del rettangoloide, si riconosce che, se D è un'arbitraria partizione di ampiezza $\delta < \delta_\varepsilon$, risulta

$$m_\varepsilon'' - m_\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

e pertanto dalla (4.4.3) (quindi indipendentemente dalla scelta dei punti ξ_i) consegue:

$$|\sigma_D - \mu(\mathcal{R})| < \varepsilon.$$

Ciò prova, come volevamo dimostrare, che:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sigma_D = \mu(\mathcal{R})$$

2. Se la funzione f è non positiva, vale la (4.4.2) con

$$\lambda = -\mu(\mathcal{R}).$$

Invero il rettangoloide \mathcal{R} relativo ad f è il simmetrico, rispetto all'asse delle x , del rettangoloide \mathcal{R}' relativo alla funzione non negativa $-f$, e quindi si ha

$$\mu(\mathcal{R}) = \mu(\mathcal{R}').$$

D'altra parte, per ogni partizione D e qualunque siano i punti ξ_i , il numero $-\sigma_D$ rappresenta la somma analoga alla (4.4.1) relativa alla funzione non negativa $-f$, e pertanto, in base a quanto si è visto nel numero precedente, risulta:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} (-\sigma_D) = \mu'(R) = \mu(R).$$

Ne segue:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sigma_D = -\mu(R)$$

3. Nel caso generale, i.e. quando f può assumere sia valori positivi, sia valori negativi, sia valori nulli, l'esistenza del numero λ si dimostra

sulla base di quanto già stabilito in 1 e in 2.

A tale scopo ricordiamo che f si decompone nella somma:

$$f = f^+ + f^-$$

dove f^+ ed f^- sono rispettivamente la parte non negativa e la parte non positiva di f , e sono quindi funzioni continue in $[a, b]$.

Il diagramma di f^+ [di f^-] si compone dei punti del diagramma di f di ordinata positiva [negativa] e dei punti dell'asse delle x nei quali f ha valore non positivo [non negativo]. Indichiamo con \mathcal{R}^+ il rettangoloide di base $[a, b]$ relativo ad f^+ , e con \mathcal{R}^- il rettangoloide di base $[a, b]$ relativo ad f^- .

Per ogni partizione $D = D(x_0, x_1, \dots, x_n)$ dell'intervallo $[a, b]$ e per ogni scelta dei punti ξ_i , consideriamo la somma σ_D definita dalla (4.4.1) relativa alla funzione f , e diciamo σ_D^+ e σ_D^- le somme analoghe relative ad f^+ ed f^- . Si ha:

$$\sigma_D = \sigma_D^+ + \sigma_D^-,$$

nonchè:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sigma_D^+ = \mu(\mathcal{R}^+) \quad , \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \sigma_D^- = -\mu(\mathcal{R}^-).$$

Dalla disuguaglianza:

$$|\sigma_D - [\mu(\mathcal{R}^+) - \mu(\mathcal{R}^-)]| \leq |\sigma_D - \mu(\mathcal{R}^+)| + |\sigma_D + \mu(\mathcal{R}^-)|$$

si trae allora:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sigma_D = \mu(\mathcal{R}^+) - \mu(\mathcal{R}^-),$$

e ciò dimostra l'asserto, con

$$\lambda = \mu(\mathcal{R}^+) - \mu(\mathcal{R}^-).$$

□

Si pone la seguente:

Definizione 44 Si chiama *integrale definito della funzione continua $f(x)$ esteso all'intervallo $[a, b]$* , il limite:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \quad (4.4.4)$$

e si indica con uno dei simboli:

$$\int_a^b f(x) dx \quad , \quad \int_{[a,b]} f(x) dx \quad (4.4.5)$$

che si leggono **integrale definito esteso all'intervallo $[a, b]$ di $f(x) dx$** .

4.4 Integrale di una funzione continua in un intervallo compatto 27

I numeri a e b diconsi **estremi** dell'integrale, e precisamente: a si chiama **estremo inferiore**, b **estremo superiore** dell'integrale. La funzione $f(x)$ chiamasi **funzione integranda**, la variabile x **variabile d'integrazione**. Per definizione si ha quindi:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) (x_{i+1} - x_i)$$

nell'ipotesi, s'intende, che $f(x)$ sia continua in $[a, b]$.

Osservazione 36 L'origine del segno \int è da ricercarsi in una deformazione della lettera S , iniziale della parola somma, ed esso sta a rammentare che l'integrale definito proviene, mediante un passaggio al limite, da una somma. Il prodotto $f(x) dx$, nella scrittura (4.4.5), è posto per ricordare che la somma, da cui l'integrale deriva, ha per elemento generico il valore $f(\xi_i)$ della funzione moltiplicato per l'ampiezza $(x_{i+1} - x_i)$ la quale, nel passaggio al limite considerato, diventa un infinitesimo.

Osservazione 37 Dal contesto della dimostrazione del teorema 4.10 si evince quanto segue:

— se f è **non negativa**, allora:

$$\int_{[a,b]} f(x) dx = \mu_2(\mathcal{R}(f)),$$

— se f è **non positiva**, allora

$$\int_{[a,b]} f(x) dx = -\mu_2(\mathcal{R}(f))$$

— se f assume sia valori positivi che valori negativi, allora:

$$\int_{[a,b]} f(x) dx = \mu_2(\mathcal{R}(f^+)) - \mu_2(\mathcal{R}(f^-))$$

i.e.

$$\int_{[a,b]} f(x) dx = \int_{[a,b]} f^+(x) dx + \int_{[a,b]} f^-(x) dx$$

4.5 L'integrale definito di una funzione reale continua in un intervallo.

Sia f una funzione continua nell'intervallo $X \subseteq \mathbb{R}$, limitato o non. Detti a e b due punti di X , abbiamo introdotto il simbolo:

$$\int_{[a,b]} f(x) dx$$

nell'ipotesi che $a < b$.

Si pone allora per definizione:

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx,$$

nonchè:

$$\int_b^a f(x) dx = 0 \quad \text{se} \quad a = b.$$

Pertanto, qualunque siano i punti x_1, x_2 dell'intervallo X , ha significato l'integrale:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx, \tag{4.5.1}$$

che si chiama **integrale definito** della funzione f **esteso all'intervallo orientato** di estremi x_1 ed x_2 .

4.6 Proprietà dell'integrale definito

Dalla definizione di integrale definito è possibile subito affermare che:

Proposizione 4 *Scambiando fra loro gli estremi d'integrazione il valore dell'integrale cambia solo di segno.*

Proposizione 5 *Indicando con k un numero qualsiasi, risulta:*

$$\int_a^b k dx = k(b - a).$$

Infatti, essendo in tal caso $f(x) = k$, abbiamo:

$$\begin{aligned} \int_a^b k dx &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) (x_{i+1} - x_i) = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} k (x_{i+1} - x_i) = \lim_{\delta \rightarrow 0} k (b - a) = k (b - a) \end{aligned}$$

Più in generale, si ha la seguente proposizione nota come **proprietà di linearità**:

Proposizione 6 Se $f_1(x)$ e $f_2(x)$ sono due funzioni continue nell'intervallo $[a, b]$ e k_1 e k_2 due costanti, si ha:

$$\int_{[a,b]} [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)] dx = k_1 \int_{[a,b]} f_1(x) dx + k_2 \int_{[a,b]} f_2(x) dx.$$

Ed inverso si ha:

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)] dx &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} [k_1 f_1(\xi_i) + k_2 f_2(\xi_i)] (x_{i+1} - x_i) = \\ &= k_1 \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f_1(\xi_i) (x_{i+1} - x_i) + k_2 \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f_2(\xi_i) (x_{i+1} - x_i) = \\ &= k_1 \int_{[a,b]} f_1(x) dx + k_2 \int_{[a,b]} f_2(x) dx. \end{aligned}$$

Proposizione 7 Se $f(x)$ è continua in $[a, b]$, con $a < b$, si ha:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad (4.6.1)$$

Diviso, al solito, l'intervallo $[a, b]$ in n intervalli parziali si osservi che è:

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) (x_{i+1} - x_i) \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |f(\xi_i)| (x_{i+1} - x_i)$$

donde:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left| \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) (x_{i+1} - x_i) \right| \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} |f(\xi_i)| (x_{i+1} - x_i)$$

i.e.:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx,$$

come volevamo provare.

In generale è:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \left| \int_a^b |f(x)| dx \right|. \quad (4.6.2)$$

Quest'ultima relazione è nota come **proprietà del modulo**. Dimostriamo la (4.6.2).

- Se $a = b$ la (4.6.2) è vera.
- Se $a < b$ e $f \geq 0$ la (4.6.2) è vera.
- Se $a < b$ e $f \leq 0$ la (4.6.2) è vera.
- Se $a < b$ e f assume sia valori positivi sia valori negativi, si ha:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx \right| &= \left| \int_a^b f^+(x) dx + \int_a^b f^-(x) dx \right| \leq \\ &\leq \left| \int_a^b f^+(x) dx \right| + \left| \int_a^b f^-(x) dx \right| = \int_a^b f^+(x) dx - \int_a^b f^-(x) dx = \\ &= \int_a^b [f^+(x) - f^-(x)] dx = \int_a^b |f(x)| dx = \left| \int_a^b |f(x)| dx \right| \end{aligned}$$

- Se $a > b$, per quanto visto sopra, risulta:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx \right| &= \left| - \int_b^a f(x) dx \right| = \left| \int_b^a f(x) dx \right| \leq \left| \int_b^a |f(x)| dx \right| = \\ &= \left| - \int_a^b |f(x)| dx \right| = \left| \int_a^b |f(x)| dx \right| \end{aligned}$$

Dimostriamo, adesso, la **proprietà additiva**.

Proposizione 8 Se $f(x)$ è continua in $[a, b]$ e se c è un punto interno ad $[a, b]$, risulta:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (4.6.3)$$

Se, invero, dividiamo gli intervalli $[a, c]$ e $[c, b]$ in intervalli parziali, rispettivamente mediante i punti:

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k = c$$

$$x_k = c < x_{k+1} < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

e diciamo δ la più grande di tutte le differenze $x_{i+1} - x_i$, abbiamo:

$$\int_{[a,c]} f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{k-1} f(\xi_i) (x_{i+1} - x_i);$$

$$\int_{[c,b]} f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=k}^{n-1} f(\xi_i) (x_{i+1} - x_i)$$

da cui, come volevasi:

$$\int_{[a,c]} f(x) dx + \int_{[c,b]} f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) (x_{i+1} - x_i) = \int_{[a,b]} f(x) dx$$

Di grande importanza è il seguente

Teorema 4.11 (teorema della media.) *Detti m ed M il minimo ed il massimo assoluto di $f(x)$ in $[a, b]$, si ha:*

$$m(b-a) \leq \int_{[a,b]} f(x) dx \leq M(b-a) \quad (4.6.4)$$

Esiste inoltre almeno un punto ξ dell'intervallo $[a, b]$ per il quale riesce:

$$\int_{[a,b]} f(x) dx = f(\xi)(b-a) \quad (4.6.5)$$

Dimostrazione — Per dimostrare questo teorema cominciamo con l'osservare che, qualunque sia la prescelta decomposizione dell'intervallo $[a, b]$ in intervalli parziali, si ha:

$$m \leq f(\xi_i) \leq M \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

da cui:

$$m(x_{i+1} - x_i) \leq f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \leq M(x_{i+1} - x_i)$$

e quindi:

$$\sum_{i=0}^{n-1} m(x_{i+1} - x_i) \leq \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \leq \sum_{i=0}^{n-1} M(x_{i+1} - x_i)$$

ossia:

$$m(b-a) \leq \sigma_D \leq M(b-a)$$

e da tale relazione, passando al limite per δ tendente a zero, segue la (4.6.4). Dalla (4.6.4) segue poi, ovviamente, che:

$$\int_{[a,b]} f(x) dx = \mu(b-a) \quad (4.6.6)$$

designando μ un conveniente numero compreso fra m ed M .

D'altra parte, poichè $f(x)$ è continua, in virtù dei teoremi di Bolzano e di Weierstrass², si può trovare almeno un punto ξ di $[a, b]$ per il quale riesca:

$$f(\xi) = \mu \quad (4.6.7)$$

e dopo ciò, dalle (4.6.6) e (4.6.7) segue la (4.6.5). \square

Dal teorema della media segue subito che:

Proposizione 9 *Se una funzione $f(x)$ è continua in $[a, b]$, con $a < b$, ed è ivi sempre positiva [negativa], anche l'integrale:*

$$\int_{[a,b]} f(x) dx$$

è positivo [negativo].

Sussiste anche la seguente proposizione:

Proposizione 10 *Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due funzioni continue in $[a, b]$ ed è sempre $f(x) \geq g(x)$, si ha:*

$$\int_{[a,b]} f(x) dx \geq \int_{[a,b]} g(x) dx.$$

Basta osservare che:

$$\int_{[a,b]} [f(x) - g(x)] dx \geq 0$$

e che per la proprietà di linearità (cfr. proposizione n.6 di pag. 129) è:

$$0 \leq \int_{[a,b]} [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

²Una funzione $f(x)$ continua in un intervallo chiuso e limitato assume tutti i valori dell'intervallo $[m, M]$, i.e. il codominio di f è $[m, M]$

Sussiste, poi, anche la seguente proposizione:

Proposizione 11 Se $f(x)$ è una funzione continua nell'intervallo $[a, b]$ e se l'integrale:

$$\int_{[p,q]} f(x) dx$$

è sempre nullo **qualunque** sia l'intervallo d'integrazione $[p, q]$ appartenente ad $[a, b]$, allora $f(x)$ è nulla in ogni punto di $[a, b]$.

Supponiamo che ciò non sia, e diciamo c un punto di $[a, b]$ dove $f(x)$ non è nulla; per fissare le idee sia $f(x) > 0$. Per la continuità di $f(x)$ esiste un intorno $[p, q]$ del punto c , con $p < q$, contenuto in $[a, b]$, per ogni x del quale risulta $f(x) > 0$. Segue allora, per la proposizione 9, che è:

$$\int_p^q f(x) dx > 0,$$

contro l'ipotesi.

4.7 Il teorema fondamentale del calcolo integrale.

Sia $f(x)$ una funzione continua nell'intervallo $[a, b]$ e x un punto variabile in $[a, b]$.

L'integrale di $f(x)$ esteso all'intervallo $[a, x]$ è allora una funzione del punto x che indichiamo con $F(x)$, ponendo:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad (4.7.1)$$

ove nell'integrale abbiamo indicato con t la variabile d'integrazione, affinché non vada confusa con l'estremo superiore dell'integrale che è x .

Definizione 45 La funzione $F(x)$ chiamasi **funzione integrale** relativa ad $f(x)$ e di punto iniziale a .

Sussiste il seguente:

Teorema 4.12 (Teorema fondamentale del calcolo integrale) Se la funzione $f(x)$ è continua nell'intervallo $[a, b]$ la funzione integrale $F(x)$ è derivabile nell'intervallo $[a, b]$ e la sua derivata nel punto x è eguale al valore che la funzione integranda assume nello stesso punto; i.e.:

$$F'(x) = f(x)$$

ossia F è una **primitiva** di f .

Dimostrazione — Sia x un punto qualsiasi di $[a, b]$ e $x + \Delta x$ un altro punto appartenente ad $[a, b]$; abbiamo:

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt.$$

Applicando all'ultimo integrale il teorema della media, si ottiene:

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \Delta x f(\xi)$$

dove ξ è un conveniente punto compreso fra x e $x + \Delta x$.

Di qui si trae:

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(\xi).$$

Se, tenuto fissa x , si fa tendere Δx a zero, il punto ξ , compreso fra x e $x + \Delta x$ tende ad x . Inoltre, essendo $f(x)$ continua, risulta:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = f(x),$$

e perciò si ha:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x)$$

e quindi:

$$F'(x) = f(x)$$

che è quanto volevasi dimostrare. □

Dal teorema fondamentale si ricava:

Teorema 4.13 *Ogni funzione $f(x)$, continua in un intervallo X di \mathbb{R} è dotata di primitiva. Tutte e sole le primitive di $f(x)$ sono della forma:*

$$\int_a^x f(t) dt + c$$

indicando c un numero arbitrario.

Questo teorema è di grandissima importanza perchè permette di ricondurre il calcolo di un integrale definito di una funzione continua a quello di una funzione primitiva della funzione integranda.

Infatti, se $\phi(x)$ è una **qualsiasi** primitiva di $f(x)$ per il teorema precedente dev'essere:

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t) dt + k \tag{4.7.2}$$

4.8 Regole d'integrazione definita per parti e per sostituzione. 135

con k numero conveniente.

Ponendo nella (4.7.2) $x = a$, si ottiene $\phi(a) = k$, e quindi la (4.7.2) può anche scriversi:

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t) dt + \varphi(a)$$

ossia:

$$\int_a^x f(t) dt = \varphi(x) - \varphi(a)$$

Questa relazione vale qualunque sia x in $[a, b]$ e quindi, in particolare, anche per $x = b$, e perciò:

$$\int_a^b f(t) dt = \varphi(b) - \varphi(a). \quad (4.7.3)$$

Si ha quindi il seguente:

Teorema 4.14 *L'integrale definito fra a e b di una funzione continua $f(x)$ è uguale alla differenza fra i valori che una **qualunque** primitiva $\phi(x)$ della $f(x)$, assume in b e in a .*

La (4.7.3) è nota come **formula fondamentale del calcolo integrale**. Il secondo membro di essa a volte viene espresso tramite la scrittura:

$$[\varphi(x)]_a^b$$

denotando con tale simbolo la differenza fra i valori di $\phi(x)$ in b ed in a .

Esempio 25

$$\int_0^{\pi/2} \cos x dx = [\sin x]_0^{\pi/2} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

Esempio 26

$$\int_2^3 \frac{1}{x} dx = [\log x]_2^3 = \log 3 - \log 2 = \log \frac{3}{2}.$$

4.8 Regole d'integrazione definita per parti e per sostituzione.

Sussistono i teoremi seguenti:

Teorema 4.15 (Regola d'integrazione per parti) *Se f e g sono funzioni reali di classe C^1 nell'intervallo compatto $[a, b]$, allora:*

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = [f(x) g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) dx$$

Dimostrazione — Infatti:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) g'(x) dx &= \int_a^b [D[f(x) g(x)] - f'(x) g(x)] dx = \\ &= \int_a^b D[f(x) g(x)] dx - \int_a^b [f'(x) g(x)] dx = \\ &= [f(x) g(x)]_a^b - \int_a^b [f'(x) g(x)] dx \end{aligned}$$

□

L'applicazione di tale formula costituisce appunto la regola di integrazione definita per parti.

Esempio 27

$$\begin{aligned} \int_0^1 \arctan x dx &= [x \arctan x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} [\log(1+x^2)]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2 \end{aligned}$$

Teorema 4.16 (Regola d'integrazione per sostituzione) *Sia $f(x)$ una funzione reale continua nell'intervallo compatto $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Se $\gamma(t)$ è una funzione reale di classe C^1 nell'intervallo compatto $[c, d] \subset \mathbb{R}$ ivi strettamente monotona ed avente per codominio $[a, b]$, allora*

$$\int_a^b f(x) dx = \begin{cases} \int_c^d f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt, & \text{se } \gamma \text{ è strettamente crescente} \\ \int_d^c f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt, & \text{se } \gamma \text{ è strettamente decrescente} \end{cases}$$

Dimostrazione — Supponiamo, per fissare le idee, che γ sia strettamente decrescente. Detta ϕ una primitiva di f , intanto si ha:

$$\int_a^b f(x) dx = \phi(b) - \phi(a). \quad (4.8.1)$$

4.8 Regole d'integrazione definita per parti e per sostituzione. 137

D'altra parte, posto

$$\psi(t) = \varphi(\gamma(t)) \quad \forall t \in [c, d]$$

avendosi:

$$\psi'(t) = \varphi'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \quad \forall t \in [c, d]$$

allora

$$\psi(t) \text{ è una primitiva di } f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

e quindi:

$$\begin{aligned} \int_c^d f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt &= \psi(d) - \psi(c) = \\ &= \varphi(\gamma(d)) - \varphi(\gamma(c)) = \varphi(a) - \varphi(b) \end{aligned}$$

L'uguaglianza precedente, stante la (4.8.1), si riscrive:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_c^d f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_d^c f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

□

Esempio 28 Calcolare:

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x} dx$$

Osservato che la funzione

$$\gamma(t) = \sin t \quad \forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

è strettamente crescente ed ha per codominio $[0, 1]$, si ha:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x} dx &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{1+\sin t} \cos t dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 t}{1+\sin t} dt = \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{1-\sin^2 t}{1+\sin t} dt = \int_0^{\pi/2} (1-\sin t) dt = \int_0^{\pi/2} dt - \int_0^{\pi/2} \sin t dt = \\ &= \frac{\pi}{2} - [\cos t]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} + 1 \end{aligned}$$

4.9 Funzioni integrabili.

Sia f una funzione reale e continua in un intervallo qualsiasi $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$. Si dice che f è **integrabile in** (a, b) se accade che una sua primitiva φ (e quindi ogni altra sua primitiva) converge nei punti a e b . In tal caso si pone, per definizione:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{x \rightarrow b} \varphi(x) - \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) \quad (4.9.1)$$

Esempio 29 La funzione

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

continua in \mathbb{R} , è integrabile in \mathbb{R} in quanto $\phi(x) = \arctan x$, che è una sua primitiva, converge nei punti $\pm\infty$, e si ha:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$$

Esempio 30 La funzione

$$f(x) = \frac{1}{x},$$

continua in $]0, 1]$, non è integrabile in $(0, 1)$ in quanto $\phi(x) = \log|x|$, che è una sua primitiva, diverge negativamente nel punto zero.

Osservazione 38 Ogni funzione reale f continua in un intervallo compatto $[a, b]$ è integrabile in (a, b) giacché le sue primitive sono continue nei punti a e b . Inoltre stante la formula fondamentale del calcolo dell'integrale la definizione (4.9.1) coincide con quella data nel paragrafo precedente.

Osservazione 39 Se f è una funzione reale continua nell'intervallo $[a, b[$ con $b \leq +\infty$, poichè una primitiva di f è la funzione

$$x \in [a, b[\rightarrow \int_a^x f(t) dt$$

quest'ultima è integrabile in (a, b) se e solo se esiste ed è finito il

$$\lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t) dt$$

si scrive quindi:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t) dt$$

Osservazione 40 Se f è una funzione reale continua in $]a, b]$ con $-\infty \leq a$, poichè la funzione

$$x \in]a, b] \rightarrow \int_b^x f(t) dt$$

è una primitiva di f , quest'ultima è integrabile in (a, b) se e solo se esiste ed è finito il

$$\lim_{x \rightarrow a} \int_b^x f(t) dt$$

e si ha:

$$\int_a^b f(x) dx = - \lim_{x \rightarrow a} \int_b^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow a} \int_x^b f(t) dt$$

Osservazione 41 Se f è una funzione reale continua in $]a, b[$ con $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, fissato $c \in]a, b[$ e visto che la funzione

$$x \in]a, b] \rightarrow \int_c^x f(t) dt$$

è una primitiva di f , quest'ultima è integrabile in (a, b) se e solo se esistono e sono finiti i limiti:

$$\lim_{x \rightarrow a} \int_c^x f(t) dt \quad , \quad \lim_{x \rightarrow b} \int_c^x f(t) dt,$$

e si ha:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \lim_{x \rightarrow b} \int_c^x f(t) dt - \lim_{x \rightarrow a} \int_c^x f(t) dt = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \int_x^c f(t) dt + \lim_{x \rightarrow b} \int_c^x f(t) dt \end{aligned}$$

Di facile dimostrazione sono i teoremi seguenti.

Teorema 4.17 (Proprietà di linearità) Se f_1, \dots, f_n sono funzioni reali continue ed integrabili nell'intervallo (a, b) , qualunque siano le costanti reali k_1, \dots, k_n , anche la funzione $k_1 f_1, \dots, k_n f_n$ è integrabile in (a, b) e si ha:

$$\int_a^b [k_1 f_1(x) + \dots + k_n f_n(x)] dx = k_1 \int_a^b f_1(x) dx + \dots + k_n \int_a^b f_n(x) dx$$

Dimostrazione — Omessa. □

Teorema 4.18 (Regola d'integrazione per parti) Siano f e g funzioni reali di classe C^1 nell'intervallo (a, b) . Se $f \cdot g$ converge nei punti a e b e se $f' \cdot g$ è integrabile in (a, b) , allora $f \cdot g'$ è integrabile in (a, b) e si ha:

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = \lim_{x \rightarrow b} f(x) g(x) - \lim_{x \rightarrow a} f(x) g(x) - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx$$

Dimostrazione — Omessa. □

Esempio 31

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx &= - \int_0^{+\infty} x D[e^{-x}] dx = - \left\{ \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} - \lim_{x \rightarrow 0} x e^{-x} - \int_0^{+\infty} e^{-x} dx \right\} = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^{+\infty} = 1 \end{aligned}$$

Aggiungiamo, omettendone la dimostrazione, il

Teorema 4.19 (Regola d'integrazione per sostituzione) Sia $f(x)$ una funzione reale continua nell'intervallo (a, b) . Se $\gamma(t)$ è una funzione reale di classe C^1 nell'intervallo $]c, d[$, ivi strettamente monotona ed avente per codominio $]a, b[$, allora $f(x)$ è integrabile in (a, b) se e solo se $f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ è integrabile in (c, d) e si ha:

$$\int_a^b f(x) dx = \begin{cases} \int_c^d f(\gamma(t)) \gamma'(t) & \text{se } \gamma \text{ è strettamente crescente.} \\ \int_d^c f(\gamma(t)) \gamma'(t) & \text{se } \gamma \text{ è strettamente decrescente.} \end{cases}$$

Introduciamo ora il teorema seguente, che caratterizza le funzioni integrabili non negative o non positive, e fornisce l'interpretazione geometrica del relativo integrale:

Teorema 4.20 Se f è una funzione reale continua e non negativa [non positiva] nell'intervallo non compatto (a, b) , allora il rettangoloide $\mathcal{R}(f)$ relativo ad f e di base (a, b) è misurabile, ed ha misura finita, se e solo se f è integrabile in (a, b) . In questo caso si ha:

$$\int_a^b f(x) dx = \mu(\mathcal{R}) \quad \left[\int_a^b f(x) dx = -\mu(\mathcal{R}) \right].$$

Per l'interpretazione geometrica dell'integrale di una funzione f che assume sia valori positivi che valori negativi, è necessario decomporre f nella somma della parte non negativa f^+ e della parte non positiva f^- :

$$f = f^+ + f^-$$

e considerare i rettangoloidi \mathcal{R}^+ ed \mathcal{R}^- relativi ad f^+ ed f^- .

Teorema 4.21 (Criterio di integrabilità) *Siano f e g funzioni reali continue in un intervallo $[a, b[$, con $b \leq +\infty$ $[a, b]$ con $a \geq -\infty$. Se le primitive di f sono limitate e se g è monotona ed infinitesima in b $[a]$, allora il prodotto $f \cdot g$ è integrabile in (a, b) .*

Dimostrazione — Omessa. □

Esempio 32 Le funzioni $\sin x$ e $\frac{1}{x}$ sono continue in $[\pi, +\infty[$. Poichè le primitive di $\sin x$ sono limitate ed $\frac{1}{x}$ è strettamente decrescente ed infinitesima in $+\infty$, in base al criterio d'integrabilità

$$\frac{\sin x}{x}$$

risulta integrabile in $[\pi, +\infty[$

4.10 Funzioni sommabili

Definizione 46 *Sia f una funzione reale continua nell'intervallo non compatto (a, b) . Si dice che f è **sommabile** (o **assolutamente integrabile**) in (a, b) , se $|f|$ è integrabile in (a, b) , i.e. se il suo modulo è integrabile in (a, b) .*

Osservazione 42 Osserviamo che esistono funzioni continue in un intervallo non compatto, ivi integrabili e non sommabili. In altri termini *la sommabilità è una proprietà più forte dell'integrabilità.*

Consideriamo, ad esempio, la funzione dell'esempio 32 di pagina 141. Tale funzione è, come abbiamo visto, integrabile in $[\pi, +\infty[$. Verifichiamo che f **non è sommabile** in $[\pi, +\infty[$, cioè che:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\pi}^x \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt = +\infty. \quad (4.10.1)$$

A tale scopo, rilevato che il limite in questione esiste giacché la funzione:

$$\mathcal{F} : x \in [\pi, +\infty[\rightarrow \int_{\pi}^x \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt$$

è crescente, consideriamo la successione $[\pi, +\infty[, \{\pi n\}$, la quale diverge positivamente.

Da un lato si ha:

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, F(\pi n) &= \int_{\pi}^{\pi n} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{i\pi}^{(i+1)\pi} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \int_{i\pi}^{(i+1)\pi} \frac{|\sin t|}{|t|} dt \geq \sum_{i=1}^{n-1} \int_{i\pi}^{(i+1)\pi} \frac{|\sin t|}{(i+1)\pi} dt = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(i+1)\pi} \int_{i\pi}^{(i+1)\pi} |\sin t| dt \end{aligned}$$

d'altra parte, effettuando la sostituzione:

$$t = i\pi + \tau$$

risulta:

$$\begin{aligned} \int_{i\pi}^{(i+1)\pi} |\sin t| dt &= \int_0^{\pi} |\sin(i\pi + \tau)| d\tau = \int_0^{\pi} |\cos i\pi \cdot \sin \tau| d\tau = \\ &= \int_0^{\pi} |(-1)^i \sin \tau| d\tau = \int_0^{\pi} \sin \tau d\tau = \\ &= [-\cos]_0^{\pi} = 2 \end{aligned}$$

Pertanto

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{F}(\pi n) \geq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{2}{(i+1)\pi} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right).$$

Da cui

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{F}(\pi n) = +\infty$$

in quanto:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) - 1 \right] = +\infty$$

Ne segue la (4.10.1) in virtù dell'uguaglianza:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\pi}^{n\pi} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\pi}^x \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt$$

Osservazione 43 Se f è una funzione che non cambia segno in (a, b) , parlare di sommabilità di f in (a, b) o d'integrabilità di f in (a, b) è la stessa cosa.

— Se f è una funzione reale continua e non negativa, essendo $|f| = f$, si ha:

$$(f \text{ integrabile in } (a, b)) \Leftrightarrow (f \text{ sommabile in } (a, b)) \quad (4.10.2)$$

— Se f è una funzione reale continua e non positiva in (a, b) , allora vale ancora la proprietà (4.10.2) in quanto:

$$|f| = -f$$

Detta φ una primitiva di f , $-\varphi$ è una primitiva di $|f|$ e la convergenza di φ nei punti (a, b) equivale alla convergenza di $-\varphi$ in detti punti.

Osservazione 44 Se f è una funzione reale continua in un intervallo compatto $[a, b]$, allora essa è sommabile in (a, b) . Infatti il suo modulo, essendo continuo in $[a, b]$, risulta integrabile.

Il teorema seguente fornisce un criterio di assoluta integrabilità, che diremo *criterio del confronto*:

Teorema 4.22 (Criterio del confronto.) Siano f e g funzioni reali continue in (a, b) con

$$f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in (a, b)$$

Se g è sommabile in (a, b) tale è anche f .

Dimostrazione — Supponiamo, per fissare le idee, che f e g siano continue in $[a, b[$ con $b \leq +\infty$. Consideriamo le funzioni integrali:

$$\mathcal{F}(x) = \int_a^x |f(t)| dt \quad \forall x \in [a, b[,$$

$$\mathcal{G}(x) = \int_a^x g(t) dt \quad \forall x \in [a, b[$$

le quali, essendo crescenti, sono entrambe regolari (dotate di limite) per $t \rightarrow b$. Avendosi:

$$\mathcal{F}(x) \leq \mathcal{G}(x) \quad \forall x \in [a, b[$$

dev'essere:

$$\lim_{x \rightarrow b} \mathcal{F}(x) \leq \lim_{x \rightarrow b} \mathcal{G}(x)$$

i.e.

$$\lim_{x \rightarrow b} \int_a^x |f(t)| dt \leq \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x g(t) dt$$

da cui:

$$\lim_{x \rightarrow b} \int_a^x |f(t)| dt \leq +\infty$$

in quanto per ipotesi g è integrabile in (a, b) . □

Teorema 4.23 *Una funzione reale f , continua in un intervallo (a, b) ed assumente ivi sia valori positivi sia valori negativi, è misurabile in (a, b) se e solo se lo sono f^+ e f^- .*

Dimostrazione — Rilevato che:

$$|f(x)| = f^+(x) - f^-(x) = f^+(x) + (-f^-(x)) \quad \forall x \in (a, b) \quad (4.10.3)$$

si ha $\forall x \in (a, b)$:

$$f^+(x) \leq |f(x)|$$

$$-f^-(x) \leq |f(x)|$$

Pertanto se f è sommabile in (a, b) , in base al *criterio del confronto* f^+ e $-f^-$ sono sommabili in (a, b) .

Viceversa se f^+ e f^- (e quindi anche $-f^-$) sono sommabili in (a, b) sussistendo la (4.10.3), in base alla **proprietà di linearità** (cfr. teorema n. 4.17 di pag. 139) $|f|$ è integrabile in (a, b) . □

Teorema 4.24 *Sia f una funzione reale continua nell'intervallo (a, b) ed assumente ivi sia valori positivi sia valori negativi. Se f è sommabile in (a, b) , allora essa è integrabile in (a, b) e si ha*

$$\int_a^b f(x) dx = \mu_2(\mathcal{R}(f^+)) - \mu_2(\mathcal{R}(f^-))$$

dove $\mathcal{R}(f^+)$ e $\mathcal{R}(f^-)$ sono i rettangoloidi di base (a, b) relativi a f^+ e a f^- .

Dimostrazione — La sommabilità di f in (a, b) comporta, a norma del teorema 4.23, l'integrabilità in (a, b) di f^+ e f^- . Di conseguenza stante l'uguaglianza

$$f = f^+ + f^-,$$

in virtù del teorema 4.17 f è integrabile in (a, b) e si ha:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f^+(x) dx + \int_a^b f^-(x) dx$$

i.e.:

$$\int_a^b f(x) dx = \mu_2(\mathcal{R}(f^+(x))) - \mu_2(\mathcal{R}(f^-(x)))$$

□

Teorema 4.25 *Siano f_1, \dots, f_n funzioni continue in (a, b) ed ivi sommabili. Qualunque siano le costanti reali k_1, \dots, k_n la funzione $k_1 f_1 + \dots, k_n f_n$ è sommabile in (a, b)*

Dimostrazione — Basta osservare che:

$$\forall x \in (a, b) \quad |k_1 f_1(x) + \dots + k_n f_n(x)| \leq |k_1| |f_1(x)| + \dots + |k_n| |f_n(x)|$$

□

Teorema 4.26 *Sia f una funzione reale continua in (a, b) . Se per un $c \in]a, b[$ f è sommabile in (a, b) e in (c, b) , allora essa è sommabile in (a, b) e si ha:*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Dimostrazione — Omessa.

□

Teorema 4.27 (Proprietà del modulo) *Sia f una funzione reale continua in (a, b) . Se f è sommabile in (a, b) , allora:*

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Dimostrazione — Omessa.

□

4.11 Integrale improprio

Sia f una funzione reale continua in (a, b) . Supponiamo che f assume in (a, b) sia valori positivi sia valori negativi.

Definizione 47 Si dice che f è **semplicemente integrabile in** (a, b) se essa è integrabile in (a, b) ma non è ivi sommabile.

Ammettiamo che f sia semplicemente integrabile in (a, b) . In tale situazione la funzione f^+ e f^- non sono integrabili in (a, b) , infatti se ad esempio f^+ fosse integrabile in (a, b) , stante l'uguaglianza

$$f^- = f - f^+$$

anche f^- verrebbe ad essere integrabile in (a, b) e di conseguenza valendo il teorema 4.23 f sarebbe sommabile in (a, b) .

La non integrabilità in (a, b) di f^+ e f^- comporta, a norma del teorema 4.20, che i rettangoloidi $\mathcal{R}(f^+)$ e $\mathcal{R}(f^-)$ abbiano misura infinita. In tal modo viene meno il significato geometrico dell'integrale espresso dall'uguaglianza

$$\int_a^b f(x) dx = \mu_2(\mathcal{R}(f^+)) - \mu_2(\mathcal{R}(f^-))$$

Per tale ragione l'integrale definito di una funzione continua e semplicemente integrabile in (a, b) dicesi **improprio**, mentre la funzione stessa dicesi **integrabile in senso improprio in** (a, b) .

4.12 Criteri di sommabilità

4.12.1 Funzioni reali continue in un intervallo limitato.

Incominciamo col

Teorema 4.28 Sia f una funzione reale continua nell'intervallo (a, b) con $b < +\infty$. Se f converge in b , allora essa è sommabile in (a, b) .

Dimostrazione — Posto

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x) = l$$

consideriamo il prolungamento continuo di f su b :

$$\bar{f} : x \in [a, b] \rightarrow \begin{cases} f(x), & \text{se } x < b \\ l, & \text{se } x = b \end{cases}$$

Poichè per il teorema di Weierstrass \bar{f} è limitata in $[a, b]$, esiste $M > 0$ tale che:

$$\forall x \in [a, b] \quad |\bar{f}(x)| \leq M$$

Sicchè $\forall x \in [a, b[\quad |\bar{f}(x)| \leq M$. Da cui segue l'asserto a norma del criterio del confronto. \square

Allo stesso modo si dimostra il teorema seguente.

Teorema 4.29 *Sia f una funzione reale continua in $]a, b]$ con $-\infty < a$. Se f converge in a , allora essa è sommabile in (a, b) .*

Teorema 4.30 *Qualunque sia $\alpha > 0$, nell'intervallo compatto $[a, b[$ la funzione:*

$$\frac{1}{(b-x)^\alpha} \tag{4.12.1}$$

è sommabile se $\alpha < 1$, non è sommabile se $\alpha \geq 1$.

Se $\alpha < 1$, risulta:

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \tag{4.12.2}$$

Dimostrazione — Osservato che:

$$\forall x \in [a, b[\quad \int_a^x \frac{dt}{(b-t)^\alpha} = \begin{cases} [-\log(b-t)]_a^x & \text{se } \alpha = 1 \\ \left[-\frac{(b-t)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_a^x & \text{se } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

si ha:

- per $\alpha = 1 \quad \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x \frac{dt}{(b-t)^\alpha} = +\infty$
- per $\alpha > 1 \quad \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x \frac{dt}{(b-t)^\alpha} = +\infty$
- per $\lim_{x \rightarrow b} \int_a^x \frac{dt}{(b-t)^\alpha} = \frac{(b-t)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}$

\square

Allo stesso modo si stabilisce il

Teorema 4.31 *Siano: $]a, b]$, $\alpha > 0$. La funzione*

$$g(x) = \frac{1}{(x-a)^\alpha} \forall x \in]a, b]$$

è sommabile in $]a, b]$ se $\alpha < 1$. Non è sommabile in $]a, b]$ se $\alpha \geq 1$.

Teorema 4.32 Sia f una funzione reale continua nell'intervallo $[a, b[$. Se per un $\alpha \in]0, 1[$ risulta:

$$\lim_{x \rightarrow b} |(b-x)^\alpha f(x)| = l \quad \text{con } 0 \leq l < +\infty \quad (4.12.3)$$

allora f è sommabile in $[a, b[$.

Se

$$\lim_{x \rightarrow b} |(b-x)^\alpha f(x)| = l \quad \text{con } 0 < l \leq +\infty \quad (4.12.4)$$

allora f non è sommabile in $[a, b[$.

Dimostrazione — Proviamo la prima affermazione.

L'ipotesi (4.12.3) garantisce l'esistenza di un $\delta > 0$ e di un $c \in]a, b[$ in modo che:

$$\forall x \in [c, b[\quad |(b-x)^\alpha f(x)| < \delta$$

ossia:

$$\forall x \in [c, b[\quad |f(x)| < \frac{\delta}{(b-x)^\alpha}$$

D'altra parte, avendo ammesso che α è un numero positivo minore di 1, il teorema 4.30 ci dice che $1/(b-x)^\alpha$ è sommabile su $[a, b[$. Ne segue l'asserto a norma del criterio del confronto.

Proviamo ora la seconda affermazione.

L'ipotesi (4.12.4) comporta l'esistenza di un $\delta > 0$ e di $c \in]a, b[$ in modo che:

$$\forall x \in [c, b[\quad |(b-x) f(x)| > \delta$$

i.e.

$$\forall x \in [c, b[\quad \delta \cdot \frac{1}{(b-x)} < |f(x)|.$$

D'altra parte la funzione $1/(b-x)$ non è sommabile in $[a, b[$. Ne segue l'asserto in virtù del criterio del confronto.

Proviamo ora la seconda affermazione.

□

4.12.2 Funzioni reali continue in un insieme non limitato

Teorema 4.33 f è una funzione reale costante nell'intervallo $[a, +\infty[$. f è integrabile in $[a, +\infty[$ se e solo se è identicamente nulla.

Dimostrazione — Infatti, posto

$$k = f(x) \quad \forall x \in [a, +\infty[$$

ed osservato che:

$$\forall x \in [a, +\infty[\quad \int_a^x k dt = k(x - a),$$

si ha:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x k dt = \begin{cases} +\infty & \text{se } k > 0 \\ 0 & \text{se } k = 0 \\ -\infty & \text{se } k < 0 \end{cases}$$

□

Teorema 4.34 *Sia f una funzione reale continua in $[a, +\infty[$. Condizione necessaria affinché f sia sommabile in $[a, +\infty[$ è che si abbia:*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} m' |f(x)| = 0.$$

Dimostrazione — Posto

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} m' |f(x)| = l \quad (0 \leq l \leq +\infty)$$

ragionando per assurdo ammettiamo che sia $l \neq 0$.

Se $l = +\infty$, sicchè:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} m' |f(x)| = +\infty$$

esiste un $c \in]a, +\infty[$ in modo che:

$$\forall x \in [c, +\infty[\quad 1 < |f(x)|.$$

Pertanto, tenendo presente il teorema teo:foto11.8 ed il criterio del confronto, f non è sommabile in $[a, +\infty[$, ma ciò è contro l'ipotesi.

Se $0 < l < +\infty$, la prima proprietà caratteristica del minimo limite assicura l'esistenza di un $c \in [a, +\infty[$ tale che:

$$\forall x \in [c, +\infty[\quad \frac{l}{2} < |f(x)|$$

da cui si deduce che f non è sommabile in $[a, +\infty[$ il che è contro l'ipotesi. □

Teorema 4.35 *Siano: $[a, +\infty[$ con $a > 0$, $\alpha > 0$. La funzione*

$$g(x) = \frac{1}{x^\alpha} \quad \forall x \in [a, +\infty[$$

è sommabile in $[a, +\infty[$ se $\alpha > 1$, non è sommabile in $[a, +\infty[$ se $\alpha \leq 1$.

Dimostrazione — Infatti, osservando che:

$$\forall x \in [a, +\infty[\quad \int_a^x \frac{1}{t^\alpha} dt = \begin{cases} [\log t]_a^x & \text{se } \alpha = 1 \\ \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_a^x & \text{se } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

si ha:

$$\begin{aligned} \text{per } \alpha = 1 & \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x \frac{1}{t} dt = +\infty \\ \text{per } \alpha < 1 & \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x \frac{1}{t} dt = +\infty \\ \text{per } \alpha > 1 & \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x \frac{1}{t} dt = \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1} \end{aligned}$$

□

Allo stesso modo si dimostra il

Teorema 4.36 *Siano $] -\infty, a]$, $a > 0$, $\alpha > 0$. La funzione*

$$g(x) = -\frac{1}{x^\alpha} \quad \forall x \in] -\infty, a]$$

è sommabile in $] -\infty, a]$ se $\alpha > 1$. Non è sommabile in $] -\infty, a]$ se $\alpha \leq 1$.

Teorema 4.37 *Sia f una funzione reale continua nell'intervallo $[a, +\infty[$ ($a > 0$) ed infinitesima in $+\infty$. Se f è un infinitesimo di ordine maggiore o pari ad α ($\alpha > 1$), allora essa è sommabile in $(a, +\infty)$.*

Se f è un infinitesimo di ordine minore o uguale a 1 allora essa non è sommabile in $(a, +\infty)$.

Dimostrazione — Circa la prima affermazione, poichè per ipotesi:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|f(x)|}{\frac{1}{|x|^\alpha}} = l \quad \text{con } 0 \leq l < +\infty$$

esistono $M > 0$ e $c > a$ tale che:

$$\forall x \in [c, +\infty[\quad \frac{|f(x)|}{\frac{1}{|x|^\alpha}} < M$$

i.e.

$$\forall x \in [c, +\infty[\quad |f(x)| < M \frac{1}{|x|^\alpha}$$

La relazione precedente, stante il criterio del confronto ed il teorema 4.35 assicura che f è sommabile in $(c, +\infty)$ e quindi anche in $(a, +\infty)$. Per quanto concerne la seconda affermazione, visto che per ipotesi:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|f(x)|}{\frac{1}{|x|}} = l \quad \text{con } 0 \leq l \leq +\infty$$

esistono $M > 0$ e $c > a$ tali che

$$\forall x \in [c, +\infty[\quad |f(x)| > M \frac{1}{|x|}$$

tenendo presente il criterio del confronto ed il teorema 4.35 si ha che f non è sommabile in $[c, +\infty[$ e neppure in $[a, +\infty[$. \square

Allo stesso modo si dimostra il

Teorema 4.38 *Sia f una funzione reale continua nell'intervallo $] -\infty, -a]$ ($a > 0$) ed infinitesima in $-\infty$. Se f è un infinitesimo di ordine maggiore o uguale ad α con $\alpha > 1$, allora essa è sommabile in $(-\infty, -a)$. Se f è un infinitesimo di ordine maggiore o uguale ad 1, allora essa è sommabile in $(-\infty, -a)$.*

4.13 Integrale di una funzione generalmente continua in un intervallo.

Premettiamo le definizioni seguenti:

Definizione 48 *Una funzione si dice **generalmente continua nell'intervallo limitato** (a, b) , se l'insieme dei punti di (a, b) , che sono di discontinuità per f è vuoto o finito.*

Definizione 49 *Una funzione reale f si dice **generalmente continua nell'intervallo illimitato** X se essa è generalmente continua in ogni intervallo limitato incluso in X .*

Sia f una funzione reale generalmente continua in un intervallo (a, b) limitato o non.

Supponiamo che f presenti in (a, b) un numero finito di punti di discontinuità. In questo caso l'intervallo (a, b) privato delle discontinuità che f presentava in esso, si può sempre decomporre in un numero finito d'intervalli I_1, I_2, \dots, I_n del tipo $[\alpha, \beta[$ oppure $] \alpha, \beta]$ in ciascuno dei quali f è continua.

Si dice che f è **integrabile in** (a, b) quando f è integrabile in ciascuno degli intervalli I_1, I_2, \dots, I_n e si pone, in tal caso, per definizione:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{I_1} f(x) dx + \int_{I_2} f(x) dx + \dots + \int_{I_n} f(x) dx$$

Notiamo ora che se f è una funzione generalmente continua e con un numero **infinito** di discontinuità in un intervallo (a, b) , l'intervallo (a, b) deve necessariamente essere illimitato, i.e. deve necessariamente essere o del tipo $(a, +\infty[$ con $a \in \mathbb{R}$, o del tipo $] -\infty, b)$ con $b \in \mathbb{R}$, o del tipo $] -\infty, +\infty[$.

Definizione 50 Sia f una funzione generalmente continua con un numero infinito di discontinuità in un intervallo del tipo $(a, +\infty[$ con $a \in \mathbb{R}$. Si dice che f è **integrabile** in $(a, +\infty[$ quando si verificano le due proprietà seguenti:

1. $\forall x > a$ f è integrabile in (a, x) ;
2. esiste finito il $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt$

In modo analogo si definisce l'integrabilità e l'integrale per una funzione f generalmente continua con un numero infinito di discontinuità in un intervallo del tipo $]-\infty, b)$ con $b \in \mathbb{R}$.

Definizione 51 Se f è una funzione generalmente continua con un numero infinito di discontinuità nell'intervallo $]-\infty, +\infty[$, si dice che f è integrabile in $]-\infty, +\infty[$ quando, detto x_0 un punto di $]-\infty, +\infty[$ finito a piacere, f è integrabile in $]-\infty, x_0]$ e in $[x_0, +\infty[$.

In tal caso si pone per definizione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{x_0} f(x) dx + \int_{x_0}^{+\infty} f(x) dx$$

Si tenga presente quanto segue:

Teorema 4.39 Se f è una funzione reale generalmente continua ed integrabile in un intervallo (a, b) , detta k una costante reale, anche $k \cdot f$ è integrabile in (a, b) e si ha:

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

Teorema 4.40 Se f e g sono funzioni reali generalmente continue ed integrabili in un intervallo (a, b) , anche $f + g$ è integrabile in (a, b) e si ha:

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

Teorema 4.41 Se f è una funzione reale generalmente continua in un intervallo (a, b) ed integrabile in ogni intervallo limitato incluso in (a, b) , qualunque siano i punti x_1, x_2, x_3 di (a, b) , si ha:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_{x_1}^{x_3} f(x) dx + \int_{x_3}^{x_2} f(x) dx$$

Teorema 4.42 Se f è una funzione reale generalmente continua ed integrabile in un intervallo (a, b) qualsiasi, qualunque sia $c \in]a, b[$, è integrabile negli (a, c) e (c, b) e si ha:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Teorema 4.43 Se f è una funzione reale generalmente continua non negativa [non positiva] in un intervallo (a, b) allora il rettangoloide $\mathcal{R}(f)$ relativo ad f e di base (a, b) ha misura finita se e solo se f è integrabile in (a, b) e risulta:

$$\mu_2(\mathcal{R}(f)) = \int_a^b f(x) dx \quad [\mu_2(\mathcal{R}(f)) = - \int_a^b f(x) dx]$$

Teorema 4.44 Sia $f(x)$ una funzione reale generalmente continua nell'intervallo (a, b) . Se $\gamma(t)$ è una funzione reale di classe C^1 in $]c, d[$, strettamente monotona ed avente per codominio $]a, b[$, allora $f(x)$ è integrabile in (a, b) se e solo se $f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ è integrabile in (c, d) e si ha:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \quad \text{se } \gamma \text{ è strettamente crescente}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_d^c f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \quad \text{se } \gamma \text{ è strettamente decrescente}$$

Osservazione 45 Sia f una funzione reale generalmente continua nell'intervallo $(-\delta, \delta)$ con $0 < \delta \leq +\infty$, integrabile in $(-\delta, \delta)$.

- Se f è **pari** allora:

$$\int_{-\delta}^{\delta} f(x) dx = 2 \int_0^{\delta} f(x) dx$$

- Se f è **dispari** allora:

$$\int_{-\delta}^{\delta} f(x) dx = 0$$

Infatti da un lato:

$$\int_{-\delta}^{\delta} f(x) dx = \int_{-\delta}^0 f(x) dx + \int_0^{\delta} f(x) dx$$

d'altra parte effettuando la sostituzione $x = -t$, si ha:

$$\int_{-\delta}^0 f(x) dx = \int_{\delta}^0 f(-t) (-1) dt = \int_0^{\delta} f(-t) dt = \int_0^{\delta} f(-x) dx$$

Dunque:

$$\int_{-\delta}^{\delta} f(x) dx = \int_0^{\delta} [f(-x) + f(x)] dx$$

da cui l'asserto.

Osservazione 46 Sia f una funzione reale generalmente continua e T periodica in \mathbb{R} . Se f è integrabile in ogni intervallo limitato, allora

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

Invero, da un lato:

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^T f(x) dx + \int_T^{a+T} f(x) dx$$

d'altra parte effettuando la sostituzione $x = t + T$ è:

$$\int_T^{a+T} f(x) dx = \int_0^a f(t+T) dt = \int_0^a f(t) dt = \int_0^a f(x) dx.$$

Dunque:

$$\int_T^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$$

4.14 Sommabilità per le funzioni generalmente continue in un intervallo.

Definizione 52 Sia $f(x)$ una funzione generalmente continua in un intervallo (a, b) . Si dice che f è **sommabile** in (a, b) o anche che f è **assolutamente integrabile** in (a, b) quando la funzione valore assoluto di f , i.e. la funzione $|f|$, è integrabile in (a, b) .

In tal caso si dice anche che f ha integrale assolutamente convergente in (a, b) .

Definizione 53 Si dice che f è **semplicemente integrabile** in (a, b) oppure che f **ha integrale semplicemente convergente** in (a, b) quando f è integrabile in (a, b) , ma non è sommabile in (a, b) , i.e. quando ha senso l'integrale $\int_a^b f(x) dx$, ma non ha senso l'integrale $\int_a^b |f(x)| dx$.

In tal caso l'integrale $\int_a^b f(x) dx$ si dice **integrale improprio**.

Osservazione 47 Ovviamente se f è una funzione che non cambia segno in (a, b) , parlare di sommabilità di f in (a, b) o d'integrabilità di f in (a, b) è la stessa cosa.

Teorema 4.45 (relazione tra sommabilità e integrabilità.) Per ogni funzione f generalmente continua in un intervallo (a, b) si ha che:

$$f \text{ è sommabile in } (a, b) \begin{matrix} \Rightarrow \\ \not\Leftarrow \end{matrix} f \text{ è integrabile in } (a, b)$$

In altri termini la sommabilità è una proprietà più forte dell'integrabilità.

Teorema 4.46 (Significato geometrico della sommabilità.) Per ogni funzione f generalmente continua in un intervallo (a, b) , indicati con \mathcal{R} , $\mathcal{R}(|f|)$, \mathcal{R}^+ , \mathcal{R}^- i rettangoloidi di base (a, b) relativi a f , $|f|$, f^+ e f^- si ha che:

$$(f \text{ è sommabile in } (a, b)) \iff \left(\begin{array}{l} \text{Il rettangoloide } \mathcal{R}(|f|) \text{ ha area finita} \\ \text{e quindi anche } \mathcal{R}^+ \text{ e } \mathcal{R}^- \text{ hanno aree finite} \end{array} \right)$$

In tal caso risulta inoltre:

$$\int_a^b f(x) dx = \begin{cases} \mu_2(\mathcal{R}) & \text{se } f(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b) \\ -\mu_2(\mathcal{R}) & \text{se } f(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a, b) \\ \mu_2(\mathcal{R}^+) - \mu_2(\mathcal{R}^-) & \text{in generale} \end{cases}$$

Si ha, ancora:

$$\int_a^b |f(x)| dx = \mu_2(\mathcal{R}(|f|)) = \mu_2(\mathcal{R}^+) + \mu_2(\mathcal{R}^-)$$

Teorema 4.47 (Significato geometrico della semplice integrabilità)
Per ogni funzione f generalmente continua nell'intervallo (a, b) si ha che:

$$\left(\begin{array}{l} f \text{ è semplicemente integrabile} \\ \text{in } (a, b) \end{array} \right) \iff \begin{array}{l} 1) f \text{ è integrabile in } (a, b) \\ 2) \mathcal{R}^+ \text{ e } \mathcal{R}^- \text{ hanno area infinita} \end{array}$$

Osservazione 48 Dal teorema precedente segue che, se f è una funzione semplicemente integrabile in un intervallo (a, b) , $\int_a^b f(x) dx$ ha senso, ma non può intendersi geometricamente come la differenza $\mu(\mathcal{R}^+) - \mu(\mathcal{R}^-)$, dato che questa differenza è la forma indeterminata $(+\infty) - (+\infty)$ e quindi non ha senso.

Questo è uno dei motivi per cui l'integrale di una funzione semplicemente integrabile si chiamano un **integrale improprio**. E' utile tener presente che molti autori chiamano integrali impropri tutti gli integrali che non sono integrali di funzioni continue in un intervallo compatto.

Dal teorema sul significato geometrico della sommabilità si deduce il seguente:

Corollario 1 Sia $f(x)$ una funzione generalmente continua in un intervallo (a, b) . Vale la seguente implicazione:

$$\left(\begin{array}{l} 1) (a, b) \text{ è limitato} \\ 2) f \text{ è limitata in } (a, b) \end{array} \right) \Rightarrow f \text{ è sommabile in } (a, b)$$

In particolare una funzione che sia generalmente continua in un intervallo compatto $[a, b]$ e ammetta in $[a, b]$ solo discontinuità eliminabili o di 1^a specie, risulta sommabile in $[a, b]$. In particolare ancora, tenendo presente il teorema di Weierstrass, si ha che una funzione continua in un intervallo compatto $[a, b]$ risulta sommabile in $[a, b]$.

Dimostrazione — Basta osservare che nelle ipotesi fatte il rettangoloide $\mathcal{R}(|f|)$ è limitato e quindi ha area finita. \square

4.14.1 Proprietà dell'integrale di una funzione generalmente continua in un intervallo.

Dalle definizioni date e dalle proposizioni già viste si possono dedurre le seguenti proposizioni:

1. L'integrale di una funzione f continua in un intervallo compatto $[a, b]$ ha sempre significato; è un numero finito; e s'interpreta geometricamente come la differenza $\mu(\mathcal{R}^+) - \mu(\mathcal{R}^-)$.
L'integrale di una funzione f generalmente continua in un intervallo (a, b) di tipo qualsiasi non sempre ha significato; se ha significato è un numero finito; tale numero finito s'interpreta geometricamente come la differenza $\mu(\mathcal{R}^+) - \mu(\mathcal{R}^-)$ solo nel caso che la funzione è sommabile in (a, b) .
2. L'integrabilità e il valore dell'integrale di una funzione f generalmente continua in un intervallo (a, b) si conservano se si modificano i valori

di f in un numero finito di punti di (a, b) .

In altri termini l'integrabilità e il valore dell'integrale di una funzione f generalmente continua in un intervallo (a, b) non dipendono dai valori di f in un numero finito di punti di (a, b) .

4.14.2 Integrale definito di una funzione generalmente continua.

Osservazione 49 Ricordiamo che, se f è una funzione generalmente continua e integrabile in un intervallo (a, b) , l'integrale di f esteso a (a, b) può denotarsi, oltre che col simbolo

$$\int_a^b f(x) dx,$$

anche col simbolo

$$\int_{(a,b)} f(x) dx$$

Sia f una funzione **generalmente continua** e **integrabile** in un intervallo X e siano a e b due punti qualsiasi dell'insieme $X \cup \{\inf X, \sup X\}$. Si noti che a può essere più grande di b e che, se risulta $X =]-\infty, +\infty[$, a e b possono anche essere $-\infty$ e $+\infty$.

Definizione 54 Si chiama **integrale definito di f da a a b** e si denota col simbolo

$$\int_a^b f(x) dx$$

il numero così definito:

$$\int_a^b f(x) dx = \begin{cases} \int_{(a,b)} f(x) dx & \text{se } a < b \\ 0 & \text{se } a = b \\ - \int_{(a,b)} f(x) dx & \text{se } a > b \end{cases}$$

I due numeri a e b si chiamano rispettivamente **limite inferiore** e **limite superiore** dell'integrale definito $\int_a^b f(x) dx$.

Osservazione 50 Dalla definizione data segue che

$$\forall a, b \in X \cup \{\inf X, \sup X\} \text{ risulta } \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Teorema 4.48 (Proprietà additiva) Sia f generalmente continua e integrabile, in un intervallo X . Allora $\forall a, b, c \in X \cup \{\inf X, \sup X\}$ risulta:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Teorema 4.49 (Proprietà distributiva) Siano f_1 e f_2 due funzioni **generalmente continue e integrabili** in un intervallo X . Allora $\forall a, b \in X \cup \{\inf X, \sup X\}$ e $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ risulta:

$$\int_a^b (c_1 f_1 + c_2 f_2) dx = c_1 \int_a^b f_1 dx + \int_a^b c_2 f_2 dx$$

Teorema 4.50 (Proprietà del modulo) Sia f una funzione **generalmente continua e sommabile** in un intervallo X . Allora $\forall a, b \in X \cup \{\inf X, \sup X\}$ risulta:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Osservazione 51 Si noti che se è $a < b$ il valore assoluto esterno al 2° membro è superfluo.

4.14.3 Criteri di sommabilità.

Nelle applicazioni si presenta spesso il problema di stabilire la sommabilità in un intervallo (a, b) per una funzione che è continua in tale intervallo; più raramente si presenta anche il problema di stabilire la sommabilità in un intervallo (a, b) per una funzione che ha un numero finito di discontinuità in (a, b) . Per fare ciò basterà stabilire dei *criteri di sommabilità* (i.e. delle condizioni sufficienti di sommabilità e non sommabilità) per una funzione f continua in un intervallo del tipo $[a, b[$ limitato o non. Infatti il caso di una funzione continua in un intervallo del tipo $]a, b]$ è analogo al precedente; il caso di una funzione continua in un intervallo (a, b) di tipo qualsiasi e il caso di una funzione generalmente continua e con un numero finito di discontinuità in un intervallo (a, b) si riconducono mediante le definizioni al caso di una funzione continua in un intervallo del tipo $[a, b[$ o $]a, b]$.

Teorema 4.51 (di sommabilità per confronto.) Siano f e g due funzioni continue in un intervallo del tipo $[a, b[$. Sussistono allora le seguenti implicazioni:

$$\left(\begin{array}{l} |f| \leq |g| \text{ in } [a, b[\text{ e } g \text{ è} \\ \text{sommabile in } [a, b[\end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{l} \text{anche } f \text{ è sommabile} \\ \text{in } [a, b[\end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{l} |f| \leq |g| \text{ in } [a, b[\text{ e } f \text{ è} \\ \text{non sommabile in } [a, b[\end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{l} \text{anche } g \text{ non è sommabile} \\ \text{in } [a, b[\end{array} \right)$$

(In altri termini una funzione il cui valore assoluto è maggiorato dal valore assoluto di una funzione sommabile è anch'essa sommabile. Una funzione il cui valore assoluto maggiora il valore assoluto di una funzione non sommabile è anch'essa non sommabile)

Dimostrazione — Basta osservare che nelle ipotesi fatte si ha:

$$\mathcal{R}(|f|) \subseteq \mathcal{R}(|g|)$$

e quindi

$$\mu_2(\mathcal{R}(|f|)) \leq \mu_2(\mathcal{R}(|g|))$$

e basta ricordare l'interpretazione geometrica della sommabilità. \square

Teorema 4.52 Sia f una funzione continua in un intervallo $[a, b[$. Vale la seguente implicazione:

$$\left(\begin{array}{l} 1) [a, b[\text{ è limitato} \\ 2) f \text{ è limitata in } [a, b[\end{array} \right) \Rightarrow f \text{ è sommabile in } [a, b[$$

Dimostrazione — Basta osservare che nelle ipotesi fatte il rettangoloide $\mathcal{R}(|f|)$ è limitato e quindi ha area finita. \square

Richiami sulle locuzioni "non inferiore" e "non superiore" che s'introducono nel confronto tra due infinitesimi o infiniti.

Definizione 55 Consideriamo due funzioni

$$f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad g : Y \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

entrambe infinite o infinitesime in un punto x_0 d'accumulazione per $X \cap Y$. Supponiamo che

$$\exists k > 0 : |f(x)| \leq k |g(x)| \quad \text{intorno a } x_0$$

Se f e g sono due infinitesimi in x_0 , si dice che f è un infinitesimo di ordine **non inferiore** rispetto a g ; se invece f e g sono due infiniti in x_0 si dice che f è un infinito di ordine **non superiore** rispetto a g .

In particolare, se f e g sono due infiniti in x_0 e se g è l'infinito campione in x_0 elevato ad un numero $\alpha \in \mathbb{R}^+$, si dice che f è un infinito in x_0 di ordine **non superiore** a α . Per ulteriori dettagli si rimanda all'appendice A a pag. 371.

Tenendo presente che una funzione f risulta sommabile in un intervallo se e solo se il rettangoloide $\mathcal{R}(|f|)$ ha area finita, si ricorda facilmente l'enunciato del seguente teorema detto **criterio di sommabilità in un intervallo limitato del tipo** $[a, b[$ o anche **criterio di sommabilità mediante l'ordine d'infinito**:

Teorema 4.53 *Sia $[a, b[$ un intervallo limitato e sia f una funzione continua in $[a, b[$ e infinita per $x \rightarrow b^-$.*

Valgono le seguenti implicazioni:

$$\left(\begin{array}{l} 1) f \text{ è infinita per } x \rightarrow b^- \text{ di ordine} \\ \text{"non superiore" a un numero positivo } \alpha < 1 \end{array} \right) \Rightarrow f \text{ è sommabile in } [a, b[$$

$$\left(\begin{array}{l} 2) f \text{ è infinita per } x \rightarrow b^- \text{ di ordine} \\ \text{"non inferiore" a un numero positivo } \alpha > 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{l} f \text{ non è nè sommabile} \\ \text{nè integrabile in } [a, b[\end{array} \right)$$

Dimostrazione — Implicazione 1). Dall'ipotesi fatta si deduce che:

$$\exists \alpha \in]0, 1[\text{ e } \exists k > 0 \text{ e } [b - \delta, b[\quad : \quad |f(x)| \leq k \frac{1}{|x - b|^\alpha} \quad \forall x \in [b - \delta, b[$$

Si osserva che f è certamente sommabile nell'intervallo compatto $[a, b - \delta]$ perchè è continua in tale intervallo compatto.

Dimostriamo, adesso, che la funzione

$$\frac{1}{|x - b|^\alpha} \tag{4.14.1}$$

è sommabile nell'intervallo semiaperto $[b - \delta, b[$. Da ciò per il criterio di sommabilità per confronto seguirà che f è sommabile anche in $[b - \delta, b[$ e quindi f risulta sommabile in $[a, b[$.

Per dimostrare che la funzione (4.14.1) è sommabile in $[b - \delta, b[$ osserviamo che si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow b^-} \int_{b-\delta}^t \frac{1}{|x - b|^\alpha} dx &= \lim_{t \rightarrow b^-} \int_{b-\delta}^t \frac{1}{(b - x)^\alpha} dx = - \lim_{t \rightarrow b^-} \int_{b-\delta}^t (b - x)^\alpha d(b - x) = \\ &= - \lim_{t \rightarrow b^-} \left[\frac{(b - x)^{-\alpha+1}}{-\alpha + 1} \right]_{b-\delta}^t = - \lim_{t \rightarrow b^-} \left[\frac{(b - x)^{-\alpha+1}}{-\alpha + 1} - \frac{\delta^{1-\alpha}}{1 - \alpha} \right] = \\ &= - \left(0 - \frac{\delta^{1-\alpha}}{1 - \alpha} \right) = \frac{\delta^{1-\alpha}}{1 - \alpha} \end{aligned}$$

avendo tenuto presente che è $\alpha < 1$ e quindi $1 - \alpha > 0$. Poichè il limite calcolato è finito, effettivamente la funzione (4.14.1) è sommabile in $[b - \delta, b[$.

Implicazione 2). Dall'ipotesi segue che:

$$\exists k > 0 \exists [b - \delta, b[\quad : \quad |f(x)| \geq k \frac{1}{|x - b|} \quad \forall x \in [b - \delta, b[$$

4.14 Sommabilità per le funzioni generalmente continue in un intervallo.

161

Si vede subito che la funzione

$$\frac{1}{|x-b|} \quad (4.14.2)$$

non è sommabile in $[b-\delta, b[$. Infatti si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow b^-} \int_{b-\delta}^t \frac{1}{|x-b|} dx &= \lim_{t \rightarrow b^-} \int_{b-\delta}^t \frac{1}{(b-x)} dx = - \lim_{t \rightarrow b^-} \int_{b-\delta}^t \frac{1}{(b-x)} d(b-x) = \\ &= - \lim_{t \rightarrow b^-} [\log(b-x)]_{b-\delta}^t = - \lim_{t \rightarrow b^-} [\log(b-t) - \log \delta] = +\infty \end{aligned}$$

Quindi la funzione (4.14.2) effettivamente non è sommabile in $[b-\delta, b[$. Per il criterio del confronto anche $f(x)$ non è sommabile in $[b-\delta, b[$ e quindi non è nemmeno sommabile in $[a, b[$.

Si osservi che, essendo

$$|f(x)| \geq k \frac{1}{|x-b|} > 0 \quad \forall x \in [b-\delta, b[$$

f è priva di zeri in $[b-\delta, b[$, e quindi, essendo continua, f è di segno costante in $[b-\delta, b[$. Pertanto f non è nemmeno integrabile in $[b-\delta, b[$ e quindi non è nemmeno integrabile in $[a, b[$. \square

Esempio 33 Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

Questa funzione è sommabile in $[-1, 0[$?

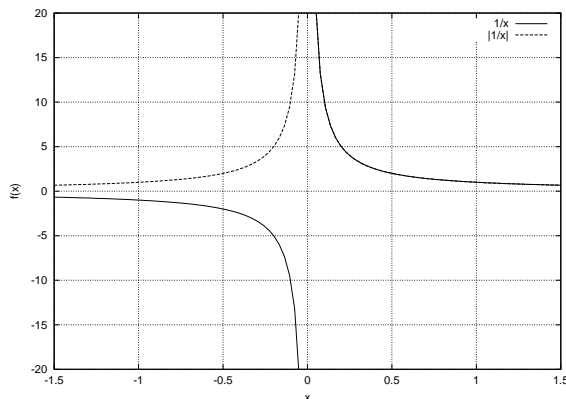


Figura 4.4: Diagrammi delle funzioni $1/x$ e $|1/x|$.

Per il teorema precedente $f(x)$ **non** è sommabile in $[-1, 0[$ perchè è infinita di ordine 1 per $x \rightarrow 0^-$. Pertanto l'integrale

$$\int_0^1 \left| \frac{1}{x} \right| dx$$

non ha senso e indicando con $\mathcal{R}(|f|)$ il rettangoloide di $|f|$ di base $[-1, 0[$ si ha che $\mu_2(\mathcal{R}(|f|)) = +\infty$. Poichè f è di segno costante in $[-1, 0[$, f non è nemmeno integrabile in $[-1, 0[$, come del resto è asserito dallo stesso teorema precedente.

Non ha senso, pertanto, l'integrale

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx.$$

Per un teorema analogo al precedente f non è nè sommabile, nè integrabile nemmeno in $]0, 1]$. Naturalmente f non è nè sommabile nè integrabile nemmeno in $[-1, 1]$ perchè per definizione l'integrabilità di f in $[-1, 1]$ equivale all'integrabilità di f in $[-1, 0[$ e in $]0, 1]$.

Esempio 34 Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Questa funzione è sommabile in $]0, 1]$?

No, perchè è infinita del 2° ordine per $x \rightarrow 0^+$. Essa non è nemmeno integrabile in $]0, 1]$ perchè è di segno costante. Quindi non ha senso l'integrale

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$$

Esempio 35 Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Questa funzione è sommabile in $]0, 1]$?

Sì, perchè infinita per $x \rightarrow 0^+$ di ordine $\frac{1}{2} < \alpha < 1$. Quindi essa è anche integrabile in $]0, 1]$. Dunque ha senso l'integrale:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$$

Calcoliamo tale integrale:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} [2\sqrt{x}]_t^1 = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} [2 - 2\sqrt{t}] = 2 \end{aligned}$$

Poichè f è positiva in $]0, 1]$, il numero 2 rappresenta geometricamente l'area del rettangoloide relativo a f di base $]0, 1]$.

Esempio 36 Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x \log x} \quad \text{con } x \in \left]0, \frac{1}{2}\right].$$

Questa funzione è sommabile in $]0, \frac{1}{2}]$?

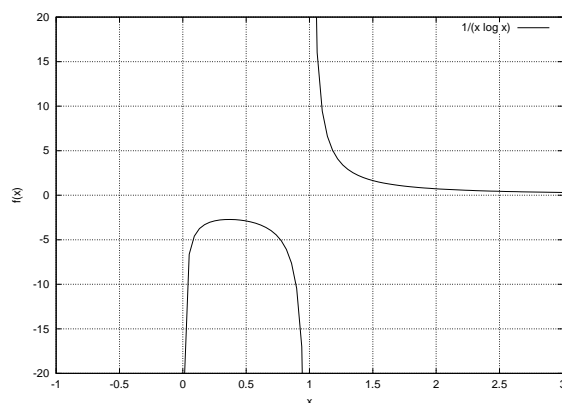


Figura 4.5: Diagramma della $f(x) = 1/(x \log x)$.

Osserviamo che:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x = 0$$

e che:

$$1 - \varepsilon < \text{ord}_{x \rightarrow 0^+} x \log x < 1 \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[.$$

Pertanto si ha:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

e

$$1 - \varepsilon < \text{ord}_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \log x} < 1 \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[.$$

Dunque la funzione considerata è infinita in 0^+ di ordine minore di 1, ma non è anche di ordine "non superiore" ad un $\alpha < 1$. Essa quindi non verifica

la condizione sufficiente di sommabilità, nè la condizione sufficiente di non sommabilità.

Per stabilire, quindi, se essa è sommabile abbisogna ricorrere direttamente alla definizione. Si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^{1/2} \frac{1}{|x \log x|} dx &= - \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^{1/2} \frac{1}{x \log x} dx = - \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^{1/2} \frac{d \log x}{\log x} = \\ &= - \lim_{t \rightarrow 0^+} [\log |\log x|]_t^{1/2} = - \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\log \left| \log \frac{1}{2} \right| - \log |\log t| \right] = +\infty \end{aligned}$$

Quindi f non è sommabile in $]0, \frac{1}{2}]$. Poichè f è di segno costante in $]0, \frac{1}{2}]$, f non è nemmeno integrabile in $]0, \frac{1}{2}]$. Quindi l'integrale di $f(x)$ tra 0 e $1/2$ non ha senso.

tenendo presente che una funzione f risulta sommabile in un intervallo se e solo se $\mathcal{R}(|f|)$ ha area finita, si ricorda facilmente l'enunciato del seguente teorema detto **criterio di sommabilità in un intervallo illimitato del tipo** $[0, +\infty[$ o **criterio di sommabilità mediante l'ordine d'infinitesimo**.

Teorema 4.54 *Sia $f(x)$ una funzione continua in un intervallo del tipo $[a, +\infty[$ e infinitesima per $x \rightarrow +\infty$.*

Valgono le seguenti implicazioni:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{l} 1) f \text{ è infinitesima per } x \rightarrow +\infty \\ \text{di ordine "non inferiore" ad } \alpha > 1 \end{array} \right) &\Rightarrow f \text{ è sommabile } [a, +\infty[\\ \left(\begin{array}{l} 2) f \text{ è infinitesima per } x \rightarrow +\infty \\ \text{di ordine "non superiore" ad } 1 \end{array} \right) &\Rightarrow \left(\begin{array}{l} f \text{ non è nè sommabile} \\ \text{nè integrabile in } [a, +\infty[\end{array} \right) \end{aligned}$$

Dimostrazione — La dimostrazione è perfettamente analoga a quella del teorema precedente. \square

4.15 Applicazioni

4.15.1 Richiami di teoria utili per studiare gli integrali delle funzioni generalmente continue in un intervallo.

Sia f una funzione continua in un intervallo (a, b) oppure una funzione generalmente continua e con un numero finito di discontinuità in un intervallo (a, b) .

Dai criteri di sommabilità si deduce la seguente **regola pratica per sta-**

bilire se ha senso l'integrale $\int_a^b f(x) dx$.

- Si riconduce mediante le definizioni (l'integrabilità) l'integrabilità di f in (a, b) all'integrabilità di f in un numero finito d'intervalli del tipo $[\alpha, \beta[$ o $] \alpha, \beta]$, in ciascuno dei quali f è continua.
Per fare ciò basta decomporre l'intervallo (a, b) **privato delle discontinuità** che f presenta in esso in un numero finito d'intervalli del tipo $[\alpha, \beta[$ o $] \alpha, \beta]$ in ciascuno dei quali f è continua.
- Agli intervalli del tipo $[\alpha, \beta[$ o $] \alpha, \beta]$ che sono limitati si applica il criterio di sommabilità mediante l'ordine d'infinito, tenendo però presente che, se f è limitata in un intervallo di tale tipo, f è certamente sommabile in esso (*in questo caso non ha senso applicare il criterio dell'ordine d'infinito*).
Agli intervalli del tipo $[\alpha, \beta[$ o $] \alpha, \beta]$ che sono illimitati si applica il criterio di sommabilità mediante l'ordine d'infinitesimo, tenendo però presente che, se al divergere di x , f tende a un limite $l \neq 0$, certamente f non è nè sommabile, nè integrabile in tale intervallo (*in questo caso non ha senso applicare il criterio dell'ordine d'infinitesimo*).

Esercizio — Stabilire se l'integrale

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\log x}}$$

ha senso e in caso affermativo calcolarlo.

☉ La funzione integranda è continua nell'intervallo $]1, e]$ ed è infinita in 1 di ordine $1/2^3$. Quindi per il criterio di sommabilità mediante l'ordine d'infinito essa è sommabile e quindi anche integrabile in $]1, e]$.

Pertanto l'integrale considerato ha significato.

Si ha ora:

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\log x}} = \lim_{t \rightarrow 1^+} \int_t^e \frac{dx}{x\sqrt{\log x}}. \quad (4.15.1)$$

Inoltre si ha:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{\log x}} = \int \frac{d \log x}{\sqrt{\log x}} = 2\sqrt{\log x} + c$$

Quindi per la (4.15.1) si ha:

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\log x}} = \lim_{t \rightarrow 1^+} \left[2\sqrt{\log x} \right]_t^e = \lim_{t \rightarrow 1^+} (2 - 2\sqrt{\log t}) = 2$$

³Si noti infatti che:

$$\text{ord}_{x \rightarrow 1} \log x = 1 \text{ e } \text{ord}_{x \rightarrow 1} \sqrt{\log x} = \frac{1}{2} \text{ e } \text{ord}_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{\log x}} = \frac{1}{2}$$

Poichè la funzione integranda è positiva in $]1, e]$, il numero 2 rappresenta l'area del rettangolo \mathcal{R} di base $]1, e]$ relativo a $1/x\sqrt{\log x}$.

Si osservi che per calcolare l'integrale considerato, poichè la funzione integranda è continua in $]1, e]$, si può anche utilizzare il teorema relativo al calcolo dell'integrale di una funzione continua in un intervallo (a, b) e si ha:

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\log x}} = \left[2\sqrt{\log x} \right]_1^e = \lim_{x \rightarrow e} 2\sqrt{\log x} - \lim_{x \rightarrow 1} 2\sqrt{\log x} = 2$$

■

Esercizio — Stabilire se l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$$

ha senso e in caso affermativo calcolarlo.

⊙ La funzione integranda è continua in $]0, +\infty[$. L'integrabilità di essa in tale intervallo equivale per definizione all'integrabilità della funzione stessa in $]0, x_0]$ e in $[x_0, +\infty[$, essendo x_0 un punto di $]0, +\infty[$ scelto a piacere.

Ora la funzione integranda è sommabile in $]0, x_0]$ perchè in 0 è un'infinito di ordine $1/2$, ed è sommabile anche in $[x_0, +\infty[$ perchè per $x \rightarrow +\infty$ essa è un infinitesimo di ordine $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Quindi la funzione integranda è sommabile in $]0, +\infty[$ e quindi è anche integrabile. Pertanto l'integrale considerato ha senso. Per calcolare tale integrale si può usare la definizione e cioè l'eguaglianza:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} &= \int_0^{x_0} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} + \int_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^{x_0} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} + \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^t \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}. \end{aligned} \tag{4.15.2}$$

Si ha ora:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} &= \int \frac{dt^2}{(1+t^2)t} = 2 \int \frac{tdt}{t(1+t^2)} = 2 \arctan t + c = \\ &= 2 \arctan \sqrt{x} + x \end{aligned}$$

e quindi per la (4.15.2) si ha:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} [2 \arctan \sqrt{x}]_t^{x_0} + \lim_{t \rightarrow +\infty} [2 \arctan \sqrt{x}]_{x_0}^t = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} (2 \arctan \sqrt{x_0} - 2 \arctan \sqrt{t}) + \lim_{t \rightarrow +\infty} (2 \arctan \sqrt{t} - 2 \arctan \sqrt{x_0}) = \\ &= 2 \arctan \sqrt{x_0} - 0 + 2 \cdot \frac{\pi}{2} - \arctan \sqrt{x_0} = \pi \end{aligned}$$

■

4.16 Integrazione di una funzione vettoriale.

Sia $f = (f_1, \dots, f_m)$ una funzione vettoriale definita in $X \subseteq \mathbb{R}$. Si chiama **primitiva di f** ogni funzione vettoriale $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ definita in X , ivi derivabile e tale che:

$$\varphi'(x) = f(x) \quad \forall x \in X.$$

Poichè:

$$(\varphi' \text{ primitiva di } f) \Leftrightarrow (\forall i \in \{1, 2, \dots, m\} \varphi_i \text{ primitiva di } f_i)$$

si ha:

- Se φ è una primitiva di f , tutte e sole le primitive di f sono funzioni vettoriali del tipo:

$$\varphi + \mathbf{c}$$

essendo $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_m)$ un arbitrario vettore di \mathbb{R}^m .

- Se f è continua in X allora essa è dotata di primitiva.

Sia $f = (f_1, \dots, f_m)$ una funzione vettoriale continua nell'intervallo compatto $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Si pone per definizione:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f_1(x) dx, \dots, \int_a^b f_m(x) dx$$

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

Evidentemente, se φ è una primitiva di f , risulta:

$$\int_a^b f(x) dx = \varphi(b) - \varphi(a)$$

Si dice che f è **sommabile** (o assolutamente integrabile) in (a, b) se ogni componente è sommabile in (a, b) . Evidentemente:

$$(f \text{ sommabile in } (a, b)) \Rightarrow (f \text{ integrabile in } (a, b))$$

Aggiungiamo che sussistendo la relazione:

$$|f_i(x)| \leq |f(x)| \leq \sum_{j=1}^m |f_j(x)|$$

stante il criterio del confronto si ha:

$$(f \text{ sommabile in } (a, b)) \Rightarrow (|f| \text{ sommabile in } (a, b))$$

Sia $f = (f_1, \dots, f_m)$ una funzione vettoriale generalmente continua in un intervallo (a, b) .

— Se f è integrabile in (a, b) , risulta:

$$\mathbf{c} \times \int_a^b f(x) dx = \int_a^b [\mathbf{c} \times f(x)] dx \quad \forall \mathbf{c} = (c_1, \dots, c_m) \in \mathbb{R}^m \quad (4.16.1)$$

in quanto:

$$\begin{aligned} \mathbf{c} \times \int_a^b f(x) dx &= \sum_{i=1}^m c_i \int_a^b f_i(x) dx = \int_a^b \left[\sum_{i=1}^m c_i f_i(x) \right] dx = \\ &= \int_a^b [\mathbf{c} \times f(x)] dx \end{aligned}$$

— Se f è sommabile in (a, b) , assumendo nella (4.16.1)

$$\mathbf{c} = \int_a^b f(x) dx$$

si ha:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx \right|^2 &= \int_a^b \left[f(x) \times \int_a^b f(x) dx \right] dx \leq \int_a^b \left| f(x) \times \int_a^b f(x) dx \right| dx \leq \\ &\leq \int_a^b \left| \int_a^b f(x) dx \right| \cdot |f(x)| dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right| \cdot \int_a^b |f(x)| dx \end{aligned}$$

da cui:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

i.e.:

$$\sqrt{\left(\int_a^b f_1(x) dx \right)^2 + \dots + \left(\int_a^b f_m(x) dx \right)^2} \leq \int_a^b \sqrt{f_1^2(x) + \dots + f_m^2(x)} dx$$

nota come **proprietà del modulo**.

