

Capitolo 5

Integrazione delle funzioni di più variabili reali.

Abbiamo già trattato nel capitolo precedente la misura secondo Peano-Jordan per gli insiemi di punti dello spazio \mathbb{R}^k . Riportiamo, di seguito, per comodità del lettore, le definizioni fondamentali.

Se $I = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_k, b_k]$ è un rettangolo chiuso di \mathbb{R}^k , si chiama **misura** [area se $k = 2$, **volume** se $k = 3$] di I il numero reale non negativo:

$$\mu_k(I) = (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_k - a_k)$$

Un plurirettangolo chiuso di \mathbb{R}^k è l'unione di un numero finito di rettangoli chiusi di \mathbb{R}^k a due a due privi di punti interni comuni.

Se I è un plurirettangolo chiuso di \mathbb{R}^k e $\{I_1, \dots, I_n\}$ è una decomposizione di I in rettangoli chiusi, si chiama **misura** [area se $k = 2$ **volume** se $k = 3$] di I il numero reale non negativo:

$$\mu_k(I) = \sum_{i=1}^n \mu_k(I_i)$$

Osservazione 52 Siano J un plurirettangolo chiuso di \mathbb{R}^k e $[a, b]$ un intervallo compatto di \mathbb{R} .

Il prodotto cartesiano $I = J \times [a, b]$ è un plurirettangolo chiuso di \mathbb{R}^{k+1} e si ha:

$$\mu_{k+1}(I) = \mu_k(J) (b - a)$$

Infatti detta $\{J_1, \dots, J_n\}$ una decomposizione di J in rettangoli chiusi di \mathbb{R}^k e posto

$$I_i = J_i \times [a, b]$$

I_1, \dots, I_n sono rettangoli chiusi di \mathbb{R}^{k+1} , a due a due privi di punti interni comuni

$$\begin{aligned} I &= (J_1 \cup \dots \cup J_n) \times [a, b] = (J_1 \times [a, b]) \cup \dots \cup (J_n \times [a, b]) = \\ &= I_1 \cup \dots \cup I_n \end{aligned}$$

Quanto ora stabilito ci dice che I è un plurirettangolo chiuso di \mathbb{R}^{k+1} e che

$$\mu_{k+1}(I) = \sum_{i=1}^n \mu_{k+1}(I_i) = \sum_{i=1}^n \mu_k(J_i)(b-a) = \mu_k(J)(b-a)$$

Sia I un sottoinsieme limitato di \mathbb{R}^k . Denotiamo con $A(I)$ [$B(I)$] l'insieme numerico costituito dalle misure dei plurirettangoli chiusi contenuti in [contenenti] I .

I numeri reali non negativi:

$$\mu_k^i(I) = \sup A(I) \quad \mu_k^e(I) = \inf B(I)$$

diconsi rispettivamente **la misura interna** e la **misura esterna** di I .

Si dice che I è **misurabile secondo Peano—Jordan** se i due insiemi separati, $A(I)$ e $B(I)$ sono contigui.

In tal caso il numero reale non negativo

$$\mu_k(I) = \mu_k^i(I) = \mu_k^e(I)$$

dicesi **la misura [l'area se $k = 2$, il volume se $k = 3$] di I** .

Denotiamo con \mathcal{M}_e la famiglia di tutti i sottoinsiemi di \mathbb{R}^k limitati e misurabili.

Sia I una parte di \mathbb{R}^k non limitata. Si dice che I è **misurabile secondo Peano—Jordan** se per ogni $J \in \mathcal{M}_e$ l'insieme limitato $I \cap J$ è misurabile.

Se I è misurabile si chiama **misura [area se $k = 2$, volume se $k = 3$] di I** l'elemento di $[0, +\infty]$:

$$\mu_k(I) = \sup_{J \in \mathcal{M}_e} \mu_k(J \cap I)$$

Se $\mu_k(I) = +\infty$ suol dirsi che I ha **misura infinita**; in caso contrario diciamo che I ha **misura finita**.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $Q_n = [-n, n]^k$.

Se I è una parte non limitata di \mathbb{R}^k si dimostra che I è misurabile se e solo se per ogni $n \in \mathbb{N}$, $I \cap Q_n$ è misurabile e che, quando ciò accade risulta:

$$\mu_k(I) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_k(I \cap Q_n)$$

Rileviamo esplicitamente che \mathbb{R}^k è misurabile e che

$$\mu_k(\mathbb{R}^k) = +\infty.$$

La proprietà della misura in \mathbb{R}^k sono le stesse precisate in \mathbb{R}^2 .

Osservazione 53 Quando non vi è luogo ad equivoco, il simbolo " μ_k " viene sostituito con " μ ".

5.1 Cilindri. Solidi di rotazione.

5.1.1 Cilindri.

Siano: A un compatto misurabile di \mathbb{R}^k , $[a, b]$ un intervallo compatto di \mathbb{R} . Il prodotto cartesiano

$$C = A \times [a, b]$$

si chiama **cilindro di base A e altezza $(b - a)$** .

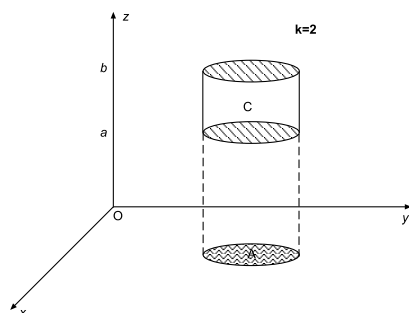


Figura 5.1: Rappresentazione geometrica, per $k = 2$ del cilindro di base A e altezza $(b - a)$.

Teorema 5.1 *Il cilindro C è misurabile e si ha*

$$\mu_{k+1}(C) = \mu_k(A)(b - a)$$

Dimostrazione — Sia $\varepsilon > 0$. Essendo A un sottoinsieme di \mathbb{R}^k limitato e misurabile, esistono due plurirettangoli chiusi di \mathbb{R}^k , \mathcal{J}' e \mathcal{J}'' , tali che:

$$\mathcal{J}' \subseteq A \subseteq \mathcal{J}'' \quad , \quad \mu_k(\mathcal{J}'') - \mu_k(\mathcal{J}') < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Posto $I' = \mathcal{J}' \times [a, b]$ e $I'' = \mathcal{J}'' \times [a, b]$, I' e I'' sono plurirettangoli chiusi di \mathbb{R}^{k+1} tali che:

$$I' \subseteq C \subseteq I'', \mu_{k+1}(I'') - \mu_{k+1}(I) = \mu_k(\mathcal{J}'')(b - a) - \mu_k(\mathcal{J}')(b - a) < \varepsilon$$

Quanto ora stabilito ci dice che C è misurabile. Inoltre, dalle relazioni:

$$\begin{aligned} \mu_{k+1}(I') &\leq \mu_{k+1}(C) \leq \mu_{k+1}(I'') \\ \mu_{k+1}(I') &\leq \mu_k(A)(b - a) \leq \mu_{k+1}(I'') \end{aligned}$$

si deduce che

$$|\mu_{k+1}(C) - \mu_k(A)(b - a)| \leq \mu_{k+1}(I'') - \mu_{k+1}(I') < \varepsilon$$

da cui $\mu_{k+1}(C) = \mu_k(A)(b - a)$ a causa dell'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$

Se $a = b$ non c'è nulla da dimostrare. Abbiamo quindi supposto nella dimostrazione $a < b$. \square

5.1.2 Solidi di rotazione.

Sia $f(x)$ una funzione reale e *non negativa* definita in un intervallo $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$. Sia \mathcal{R}_f il rettangoloide di base (a, b) relativo a f del piano (O, x, y) dello spazio (O, x, y, z) .

Detto α un angolo di $[0, 2\pi]$, indichiamo con A un sottoinsieme di \mathbb{R}^3 che si ottiene facendo ruotare dell'angolo α il rettangoloide \mathcal{R}_f attorno all'asse x , insieme che viene detto **un solido di rotazione**

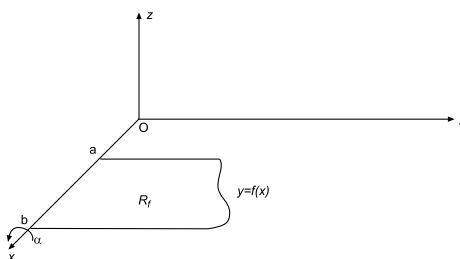


Figura 5.2: Rappresentazione geometrica della costruzione di un solido di rotazione.

Teorema 5.2 *Il solido A è misurabile secondo Peano—Jordan e si ha:*

$$\text{vol } A = \frac{\alpha}{2} \int_a^b f^2(x) dx$$

Dimostrazione — Sia $D(x_0, x_1, \dots, x_n)$ una decomposizione di $[a, b]$ in intervalli compatti. Posto

$$m'_i = \min_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) \quad , \quad m''_i = \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$$

$$\mathcal{R}'_i = [x_i, x_{i+1}] \times [0, m'_i] \quad , \quad \mathcal{R}''_i = [x_i, x_{i+1}] \times [0, m''_i]$$

denotiamo con C'_i e C''_i i solidi descritti da \mathcal{R}'_i e \mathcal{R}''_i per effetto della rotazione: C'_i [C''_i] è il cilindro avente per base il settore circolare di raggio m'_i [m''_i] e per altezza $x_{i+1} - x_i$.

I cilindri

$$C'_0, C'_1, \dots, C'_{n-1}$$

sono a due a due privi di punti interni comuni. Sicchè l'unione:

$$C'_D = \bigcup_{i=0}^{n-1} C'_i$$

è un insieme misurabile incluso in A e si ha:

$$\text{vol} C'_D = \sum_{i=0}^{n-1} \text{vol} C'_i = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\alpha}{2} m_i'^2 (x_{i+1} - x_i)$$

Analogamente l'unione

$$C''_D = \bigcup_{i=0}^{n-1} C''_i$$

è un insieme misurabile contenente A e si ha:

$$\text{vol} C''_D = \sum_{i=0}^{n-1} \text{vol} C''_i = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\alpha}{2} m_i''^2 (x_{i+1} - x_i)$$

Ciò premesso, consideriamo la funzione:

$$g(x) = \frac{\alpha}{2} f^2(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

Rilevato che

$$\min_{x \in [x_i, x_{i+1}]} g(x) = \frac{\alpha}{2} m_i'^2, \quad \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} g(x) = \frac{\alpha}{2} m_i''^2$$

si ha:

$$\text{vol} C'_D = s_D(g) \quad \text{vol} C''_D = S_D(g)$$

Pertanto, tenendo presente la definizione d'integrale definito di una funzione continua in un intervallo compatto ed ivi non negativa, si ha:

$$\sup_D \text{vol} C'_D = \frac{\alpha}{2} \int_a^b f^2(x) dx = \inf_D \text{vol} C''_D \quad (5.1.1)$$

Sia $\varepsilon > 0$. La (5.1.1) comporta l'esistenza di una decomposizione D_ε di $[a, b]$ in intervalli compatti in modo che

$$\text{vol} C''_{D_\varepsilon} - \text{vol} C'_{D_\varepsilon} < \varepsilon;$$

cioè implica che A è misurabile. Dalle relazioni:

$$\text{vol} C'_{D_\varepsilon} \leq \frac{\alpha}{2} \int_a^b f^2(x) dx \leq \text{vol} C''_{D_\varepsilon}$$

$$\text{vol} C'_{D_\varepsilon} \leq \text{vol} A \leq \text{vol} C''_{D_\varepsilon}$$

si deduce che

$$\left| \text{vol} A - \frac{\alpha}{2} \int_a^b f^2(x) dx \right| \leq \text{vol} C''_{D_\varepsilon} - \text{vol} C'_{D_\varepsilon} < \varepsilon$$

e di qui

$$\text{vol } A = \frac{\alpha}{2} \int_a^b f^2(x) dx$$

a causa dell'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$. □

Aggiungiamo, omettendone la dimostrazione, il

Teorema 5.3 *Se f è una funzione reale generalmente continua e non negativa in un intervallo (a, b) , allora $A(f)$ è misurabile, ed ha misura finita se e solo se f è integrabile in (a, b) e si ha:*

$$\mu_3(A(f)) = \frac{\alpha}{2} \int_a^b f^2(x) dx$$

5.2 Integrazioni delle funzioni reali continue in un compatto misurabile di \mathbb{R}^k .

5.2.1 Diametro di un sottoinsieme limitato di \mathbb{R}^k

Ricordiamo che un sottoinsieme A di \mathbb{R}^k si dice limitato quando esiste almeno un rettangolo di \mathbb{R}^k che lo contiene.

Definizione 56 *Sia A un insieme limitato e non vuoto di \mathbb{R}^k . Si chiama **diametro dell'insieme** A l'estremo superiore dell'insieme di numeri reali descritto dalla distanza $\mathcal{P}' - \mathcal{P}''$ quando \mathcal{P}' e \mathcal{P}'' variano nell'insieme A , e i.e. il numero*

$$\sup_{(\mathcal{P}', \mathcal{P}'') \in A^2} |\mathcal{P}' - \mathcal{P}''|$$

il quale è certamente un numero finito perchè abbiamo supposto che A è limitato.

Si noti che nel caso particolare che A è un cerchio di \mathbb{R}^k , il diametro di A ora definito, restituisce il diametro del cerchio A definito come il doppio del raggio del cerchio.

5.2.2 Decomposizione di un insieme limitato di \mathbb{R}^k e diametro di una decomposizione.

Definizione 57 *Sia A un insieme limitato e non vuoto di \mathbb{R}^k .*

*Si chiama **decomposizione** dell'insieme A ogni insieme costituito da un numero finito di parti non vuote di A , A_1, A_2, \dots, A_n con $n \geq 2$ a due a due prive di punti interni comuni e tali che la loro unione sia eguale a A .*

Si noti che le partizioni finiti di A sono particolari decomposizioni di A , e che esistono decomposizioni di A che non sono partizioni.

Definizione 5.8 Si chiama **diametro di una decomposizione D di A** , e si indica con δ , il più grande dei diametri degli insiemi che costituiscono la decomposizione D di A .

Teorema 5.4 Se A è un compatto misurabile di \mathbb{R}^k , per ogni $\delta > 0$ esiste una decomposizione di A in compatti misurabili avente diametro minore di δ .

Dimostrazione — Riferiamoci, per semplicità, al caso $k = 2$.

Sia $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ un rettangolo chiuso di \mathbb{R}^2 contenente A . Fissato $\delta > 0$, siano $D(x_0, x_1, \dots, x_m)$ e $D(y_0, y_1, \dots, y_n)$ decomposizioni rispettivamente di $[a_1, b_1]$ e $[a_2, b_2]$ in intervalli compatti aventi entrambi ampiezza minore di $\delta/\sqrt{2}$. Il generico rettangolo chiuso $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ ha diametro minore

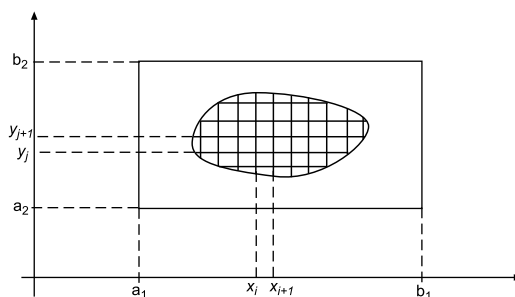


Figura 5.3: Rappresentazione geometrica della decomposizione del rettangolo chiuso contenente A .

di δ .

Pertanto, indicati con I_1, \dots, I_r quelli, fra i suddetti rettangoli, aventi intersezione non vuota con A , e posto:

$$A_i = I_i \cap A$$

gli insiemi A_1, \dots, A_r costituiscono una decomposizione di A in compatti misurabili avente diametro minore di δ . \square

5.2.3 Parte non negativa [non positiva] di f .

Sia f una funzione reale definita in $A \subseteq \mathbb{R}^k$.

Definizione 59 Si chiama *parte non negativa di f* la funzione

$$f^+ : P \in A \rightarrow \frac{f(P) + |f(P)|}{2} = \begin{cases} f(P) & \text{se } f(P) \geq 0 \\ 0 & \text{se } f(P) < 0 \end{cases}$$

Definizione 60 Si chiama *parte non positiva di f* la funzione

$$f^- : P \in A \rightarrow \frac{f(P) - |f(P)|}{2} = \begin{cases} 0 & \text{se } f(P) > 0 \\ f(P) & \text{se } f(P) \leq 0 \end{cases}$$

Evidentemente le funzioni f^+ e f^- sono rispettivamente non negative e non positive e si ha:

$$\forall P \in A \quad f^+(P) + f^-(P) = f(P) \quad , \quad f^+(P) - f^-(P) = |f(P)|$$

Aggiungiamo che se f è continua in un punto $P_0 \in A$, anche f^+ e f^- sono continue in P_0 .

5.3 Cilindroidi

Sia f una funzione reale continua nel compatto misurabile A di \mathbb{R}^k , ed ivi non negativa [non positiva].

Il sottoinsieme di \mathbb{R}^{k+1} ,

$$\mathcal{C} = \left\{ (P, x_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1} : P = (x_1, \dots, x_k) \in A \text{ e } 0 \leq x_{k+1} \leq f(P) \right\}$$

$$[\mathcal{C} = \left\{ (P, x_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1} : P = (x_1, \dots, x_k) \in A \text{ e } f(P) \leq x_{k+1} \leq 0 \right\}]$$

si chiama **cilindroide relativo ad f e di base A** . Ammesso che f si a

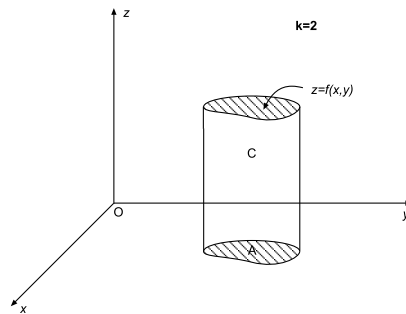


Figura 5.4: Rappresentazione geometrica, per $k = 2$ del cilindroide di base A .

non negativa consideriamo una decomposizione $D(A_1, \dots, A_n)$ in compatti misurabili e poniamo:

$$C'_i = A_i \times [0, m'_i] \quad C''_i = A_i \times [0, m''_i]$$

dove

$$m'_i = \min_{A_i} f \quad , \quad m''_i = \max_{A_i} f$$

Rilevato che i cilindri C'_1, \dots, C'_m [C''_1, \dots, C''_n] sono a due a due privi di punti interni comuni, ponendo

$$C'_D = \bigcup_{i=1, \dots, n} C'_i \quad , \quad C''_D = \bigcup_{i=1, \dots, n} C''_i$$

vengono individuati due sottoinsiemi misurabili di \mathbb{R}^{k+1} tali che:

$$C'_D \subseteq \mathcal{C}(f) \subseteq C''_D$$

$$\mu_{k+1}(C'_D) = \sum_{i=1}^n \mu_{k+1}(C'_i) = \sum_{i=1}^n \mu_k(A_i) m'_i = s_D$$

$$\mu_{k+1}(C''_D) = \sum_{i=1}^n \mu_{k+1}(C''_i) = \sum_{i=1}^n \mu_k(A_i) m''_i = S_D$$

Sussistono i teoremi seguenti:

Teorema 5.5 *Se f è una funzione reale continua e **non negativa** nel compatto misurabile A di \mathbb{R}^k , allora il cilindroide \mathcal{C} relativo ad f e di base A è misurabile e si ha:*

$$\mu_{k+1}(\mathcal{C}(f)) = \sup_D s_D(f) = \inf_D S_D(f)$$

Teorema 5.6 *Se f è una funzione reale continua e **non positiva** nel compatto misurabile di \mathbb{R}^k , allora il cilindroide $\mathcal{C}(f)$ relativo ad f e di base A è misurabile e si ha:*

$$\mu_{k+1}(\mathcal{C}(f)) = \mu_{k+1}(\mathcal{C}(-f))$$

Teorema 5.7 *Se f è una funzione reale definita e continua nel compatto misurabile A di \mathbb{R}^k , allora il suo grafico è misurabile ed ha misura nulla.*

5.4 Integrali di una funzione reale continua in un compatto misurabile di \mathbb{R}^k e sue proprietà.

Sia f una funzione reale continua nel compatto misurabile A di \mathbb{R}^k . Detta $D(A_1, \dots, A_n)$ una decomposizione di A in compatti misurabili e scelti $P_i \in A_1, \dots, P_n \in A_n$, consideriamo la somma:

$$\sigma_D(f) = \sum_{i=1}^n f(P_i) \mu_k(A_i).$$

Si dimostra che nelle ipotesi fatte (f **continua in A e A compatto misurabile**) esiste finito il

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sigma_D$$

nel senso che $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ che gode della proprietà:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 : \left(\begin{array}{l} \forall \text{ decomposizione } D \text{ con } \delta < \delta_\varepsilon \\ \forall \text{ scelta di punti } P_i \text{ negli insiemi di } D \end{array} \right) \Rightarrow |\sigma_D - \lambda| < \varepsilon \quad (5.4.1)$$

Orbene, il limite $\lim_{\delta \rightarrow 0} \sigma_D$ si chiama **l'integrale di f esteso ad A** e viene indicato con uno dei simboli:

$$\int_A f d\mu_k \quad , \quad \int_A f(P) d\mu_k \quad , \quad \int_A f(x_1, \dots, x_k) dx_1, \dots, dx_k \quad ,$$

$$\int_A f(P) dA$$

Nel caso $k = 2$ [$k=3$] si parla di **integrale doppio** [**integrale triplo**] e si adopera anche la notazione:

$$\iint_A f(x, y) dx dy \quad [\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz]$$

Osservazione 54 Quando non vi è luogo ad equivoco, " μ_k " viene sostituito con " μ ".

Il fatto che l'integrale di f esteso ad A sia l'unico numero reale a godere della proprietà (5.4.1) si esprime simbolicamente mediante la scrittura:

$$\int_A f(P) dA = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \mu_k(A_i)$$

essendo δ il diametro della decomposizione generica. Di facile dimostrazione sono i teoremi seguenti.

Teorema 5.8 Se f è una funzione reale costante nel compatto misurabile A di \mathbb{R}^k , posto

$$f(P) = h \quad \forall P \in A$$

si ha:

$$\int_A h d\mu = h\mu(A)$$

in particolare

$$\int_A d\mu = \mu(A)$$

Teorema 5.9 Se f è una funzione reale continua nel compatto misurabile A di \mathbb{R}^k ivi non negativa [non positiva], vale l'equivalenza:

$$(f \text{ identicamente nulla in } A) \Leftrightarrow \left(\int_A f d\mu = 0 \right)$$

Teorema 5.10 (Proprietà additiva) Sia f una funzione reale continua nel compatto misurabile A di \mathbb{R}^k . Se $D(A_1, \dots, A_n)$ è una decomposizione di A in compatti misurabili, si ha:

$$\int_A f d\mu = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f d\mu_k$$

Teorema 5.11 (Proprietà di linearità) Se f e g sono funzioni reali continue nel compatto misurabile A di \mathbb{R}^k e se c è una costante reale, si ha:

$$\int_A c f d\mu = c \int_A f d\mu$$

$$\int_A [f + g] d\mu = \int_A f d\mu + \int_A g d\mu$$

Teorema 5.12 (Proprietà del modulo) Se f è una funzione reale continua nel compatto misurabile A di \mathbb{R}^k , si ha:

$$\left| \int_A f d\mu \right| \leq \int_A |f| d\mu$$

Teorema 5.13 (Proprietà di monotonia) Se f e g sono funzioni reali continue nel compatto misurabile A di \mathbb{R}^k e se $f(P) \leq g(P) \quad \forall P \in A$, allora

$$\int_A f(P) d\mu \leq \int_A g(P) d\mu$$

Teorema 5.14 (Teorema della media) Se f è una funzione reale continua nel dominio limitato misurabile ed internamente connesso A di \mathbb{R}^k , si ha:

$$\min_{P \in A} f(P) \leq \frac{\int f d\mu}{\mu(A)} \leq \max_{P \in A} f(P)$$

Conseguentemente esiste un punto $Q \in A$ tale che:

$$\frac{\int f d\mu}{\mu(A)} = f(Q)$$

5.5 Insiemi normali del piano

Definizione 61 Siano $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ due funzioni reali continue in un intervallo $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ e tali che risulti:

$$\alpha(x) \leq \beta(x) \quad \forall x \in (a, b).$$

Si chiama **insieme normale rispetto all'asse x [y]**, relativo alla coppia di funzioni (α, β) il compatto di \mathbb{R}^2 :

$$A = \{P = (x, y) : x \in [a, b] \text{ e } \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$

$$[A = \{P = (x, y) : y \in [a, b] \text{ e } \alpha(y) \leq x \leq \beta(y)\}]$$

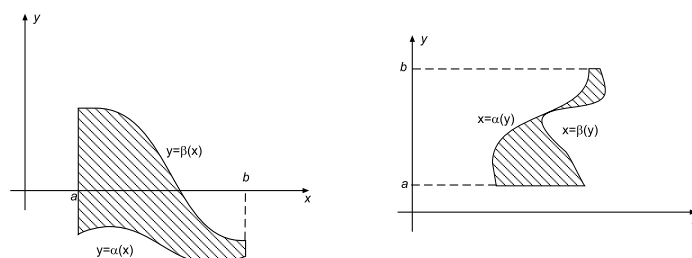


Figura 5.5: Esempi di due insiemi normali rispetto all'asse x [y] relativi alla coppia di funzioni (α, β) .

Osservazione 55 Si noti che, se un insieme A del piano è un insieme normale rispetto a un asse coordinato, ogni retta normale a tale asse coordinato interseca l'insieme A in al più un segmento, e vale anche il viceversa, purché A sia connesso.

Conseguentemente un cerchio del piano (O, x, y) è un insieme normale sia rispetto all'asse x , sia rispetto all'asse y . Invece una corona circolare del piano (O, x, y) non è un insieme normale nè rispetto all'asse x , nè rispetto

all'asse y .

Si osservi però che la retta orizzontale che passa per il centro della corona divide la corona in due insiemi normali rispetto all'asse x (e non normali rispetto all'asse y).

Rilevato che A è misurabile, sussiste il

Teorema 5.15 *Se $f(x, y)$ è una funzione reale di classe C^0 in A , la funzione*

$$x \in [a, b] \rightarrow \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy$$

$$[y \in [c, b] \rightarrow \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx]$$

è di classe C^0 in $[a, b]$ e si ha

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \right) dx \quad (5.5.1)$$

$$\left[\iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx \right) dy \right] \quad (5.5.2)$$

Dimostrazione — Omessa. □

Osservazione 56 Le relazioni (5.5.1) e (5.5.2) si chiamano **formule di riduzione** perchè riducono il calcolo di un integrale doppio esteso a un insieme normale al calcolo di due integrali semplici, i.e. di due integrali di funzioni di una variabile; infatti a 2° membro delle formule (5.5.1) e (5.5.2) figura un integrale semplice di un integrale semplice dipendente da un parametro. I secondi membri delle formule (5.5.1) e (5.5.2) si chiamano **integrali iterati** per ricordare che essi sono integrali semplici di un integrale semplice.

Considerato, per fissare le idee, l'integrale iterato

$$\int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy,$$

l'integrale

$$\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy$$

si chiama **integrale interno** dell'integrale iterato; l'integrale

$$\int_a^b dx$$

si chiama **l'integrale esterno** dell'integrale iterato.

L'integrale iterato

$$\int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy$$

si ricorda facilmente quando si osserva che esso rappresenta il numero che si ottiene integrando prima la funzione $f(x, y)$ lungo il segmento verticale s_x di ascissa x dell'insieme A e poi integrando il numero così ottenuto rispetto a x da a a b .

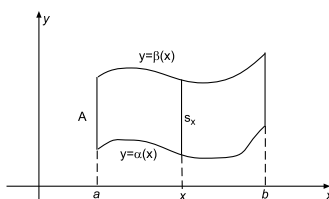


Figura 5.6: L'insieme A : interpretazione geometrica dell'integrale iterato..

Teorema 5.16 (sul significato geometrico di un integrale doppio) Sia $f(x, y)$ una funzione reale di due variabili **continua** in un insieme A compatto e **misurabile** del piano (O, x, y) . Siano poi $\mathcal{C}, \mathcal{C}^+$ e \mathcal{C}^- i cilindroidi di base A relativi a f, f^+ e f^- . Risulta allora:

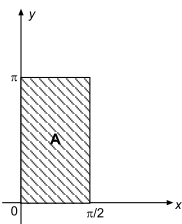
$$\iint_A f(x, y) dx dy = \begin{cases} \text{vol } \mathcal{C} & \text{se } f(x, y) \geq 0 \text{ in } A \\ -\text{vol } \mathcal{C} & \text{se } f(x, y) \leq 0 \text{ in } A \\ \text{vol } \mathcal{C}^+ - \text{vol } \mathcal{C}^- & \text{in generale} \end{cases}$$

Esempio 37 Calcolare:

$$\iint_A e^{x+y} dx dy$$

A è il dominio normale rispetto all'asse x relativo alla coppia di funzioni

$$\alpha(x) = 0 \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{e} \quad \beta(x) = \pi \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right];$$

Figura 5.7: L'insieme A .

$$\begin{aligned} \iint_A e^{x+y} dx dy &= \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\pi} e^{x+y} dy \right) dx = \int_0^{\pi/2} \left(e^x \int_0^{\pi} e^y dy \right) dx = \\ &= (e^{\pi} - 1) \int_0^{\pi/2} e^x dx = (e^{\pi} - 1) (e^{\pi/2} - 1) \end{aligned}$$

Osservazione 57 Se l'insieme A è un rettangolo $[a, b] \times [c, d]$ del piano (O, x, y) , poichè A è normale sia rispetto all'asse x , sia rispetto all'asse y , si possono applicare entrambe le relazioni di riduzione (5.5.1) e (5.5.2) e si ha:

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$$

Questa eguaglianza ci dice che, se l'insieme A è un rettangolo, nel calcolo dell'integrale doppio di $f(x, y)$ estesa ad A con le formule di riduzione, è lecito invertire l'ordine delle integrazioni.

Osservazione 58 Se l'insieme A è un rettangolo $[a, b] \times [c, d]$, e se la funzione $f(x, y)$ è un prodotto del tipo

$$\varphi(x) \psi(y)$$

i.e. è il prodotto di una funzione della sola x per una funzione della sola y , applicando, per esempio, la formula di riduzione (5.5.1), si ha:

$$\begin{aligned} \iint_A \varphi(x) \psi(y) dx dy &= \int_a^b dx \int_c^d \varphi(x) \psi(y) dy = \int_a^b dx \left(\varphi(x) \int_c^d \psi(y) dy \right) = \\ &= \int_c^d \psi(y) dy \cdot \int_a^b \varphi(x) dx = \int_a^b \varphi(x) dx \cdot \int_c^d \psi(y) dy \end{aligned}$$

Questa eguaglianza ci dice che se A è un rettangolo $[a, b] \times [c, d]$ e se la funzione $f(x, y)$ è un prodotto del tipo $\varphi(x) \psi(y)$, l'integrale doppio di

$f(x, y)$ esteso ad A risulta eguale al prodotto di due integrali semplici. Si noti che, se le due ipotesi fatte ($A =$ rettangolo, $f(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$) non sono verificate entrambe, l'integrale iterato a 2° membro della (5.5.1) (o della (5.5.2)) è un integrale semplice di un integrale semplice, e non il prodotto di due integrali semplici.

Esempio 38 Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_A \frac{x^2}{1+xy} dx dy,$$

essendo A il rettangolo rappresentato in figura 5.8.

Il triangolo A è un insieme normale sia rispetto all'asse x , sia rispetto all'asse

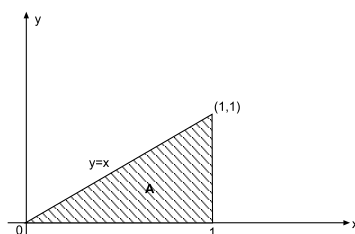


Figura 5.8: L'insieme A : triangolo.

y . Come insieme normale rispetto all'asse x , esso ha come base l'intervallo compatto $[0, 1]$ ed è relativo alle funzioni $\alpha(x)$ e $\beta(x) = x$. Pertanto si ha:

$$\begin{aligned} \iint_A \frac{x^2}{1+xy} dx dy &= \int_0^1 x dx \int_0^x \frac{x}{1+xy} dy = \int_0^1 x dx \int_0^x \frac{d(1+xy)}{1+xy} = \\ &= \int_0^1 x [\log(1+xy)]_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^1 x \log(1+x^2) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \log(1+x^2) d(1+x^2) = \frac{1}{2} [\log(1+x^2)(1+x^2)]_0^1 + \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1+x^2) \frac{2x}{1+x^2} dx = \\ &= \log 2 - \int_0^1 x dx = \log 2 - \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \log 2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Dunque risulta:

$$\iint_A \frac{x^2}{1+xy} dx dy = \log 2 - \frac{1}{2}$$

Poichè la funzione integranda

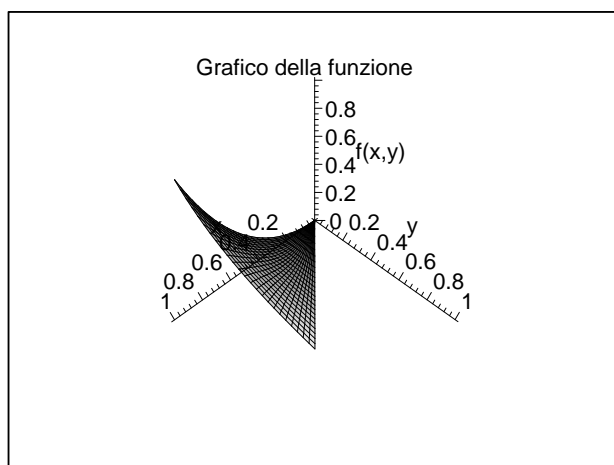


Figura 5.9: Rappresentazione della funzione $f(x, y)$.

$$\frac{x^2}{1+xy}$$

è sempre maggiore o pari a zero in A , l'integrale doppio calcolato rappresenta il volume del cilindroide \mathcal{C} di base A relativo alla funzione

$$f(x, y) = \frac{x^2}{1+xy}.$$

Pertanto si ha:

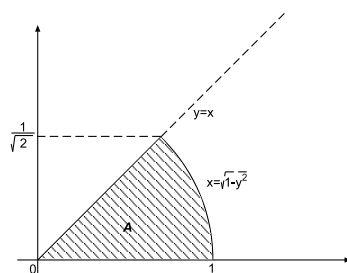
$$\text{vol } \mathcal{C} = \log 2 - \frac{1}{2}.$$

Esempio 39 Calcolare:

$$\iint_A xy dx dy$$

A è un dominio normale rispetto all'asse y relativo alla coppia di funzioni:

$$\alpha(y) = y \quad \forall y \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \quad \text{e} \quad \beta(y) = \sqrt{1-y^2} \quad \forall y \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

Figura 5.10: Il dominio A .

$$\begin{aligned}
 \iint_A xy dx dy &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} xy dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} y dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} x dx = \\
 &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} y \left[\frac{x^2}{2} \right]_y^{\sqrt{1-y^2}} dy = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} y (1 - 2y^2) dy = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} y dy - \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} y^3 dy = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} \right) = \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = \frac{1}{16}
 \end{aligned}$$

Esempio 40 Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_A xy dx dy,$$

essendo A l'insieme del piano (O, x, y) definito dalle limitazioni

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Osserviamo che la curva di equazione

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

è l'ellisse con centro nell'origine avente per assi (di simmetria) l'asse x e l'asse y e intersecante l'asse x nei punti $(2, 0)$ e $(-2, 0)$ e l'asse y nei punti $(0, 1)$ e $(0, -1)$. L'insieme A è quindi la parte del primo e quarto quadrante dell'ellisse.

Si osservi che l'insieme A è simmetrico rispetto all'asse y e che la funzione

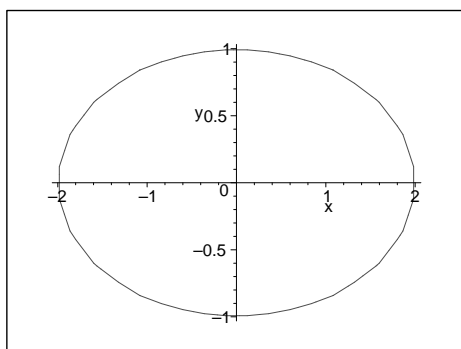


Figura 5.11: Ellisse di equazione $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

integrandi xy assume valori opposti in punti simmetrici rispetto all'asse y . Deve, pertanto, risultare:

$$\iint_A xy dx dy = 0$$

Infatti, considerato A come l'insieme normale rispetto all'asse x di base $[0, 2]$ relativo alle funzioni

$$\alpha(x) = -\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \quad \text{e} \quad \beta(x) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$$

si ha:

$$\begin{aligned} \iint_A xy dx dy &= \int_0^2 dx \int_{-\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}}^{+\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}} xy dy = \int_0^2 x dx \int_{-\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}}^{+\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}} y dy = \\ &= \int_0^2 x \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=-\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}}^{y=+\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}} dx = \int_0^2 x \cdot 0 dx = 0 \end{aligned}$$

Poichè la funzione xy è di segno variabile in A , l'integrale doppio calcolato rappresenta la differenza $\text{vol } \mathcal{C}^+ - \text{vol } \mathcal{C}^-$. Pertanto si ha:

$$\text{vol } \mathcal{C}^+ - \text{vol } \mathcal{C}^- = 0$$

Esempio 41 Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_A \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} dx dy$$

dove A è il settore di corona circolare di figura 5.12.

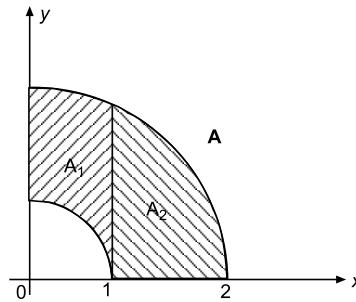


Figura 5.12: Corona circolare: insieme A d'integrazione.

A è un insieme normale sia rispetto all'asse x , sia rispetto all'asse y . L'equazione della circonferenza di centro l'origine e raggio a è $x^2 + y^2 = a^2$. Tale equazione è equivalente all'equazione $y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$. L'equazione della circonferenza di centro l'origine e raggio 2 è $x^2 + y^2 = 4$. Tale equazione è equivalente all'equazione $y = \pm\sqrt{4 - x^2}$. L'insieme A coincide con l'insieme normale rispetto all'asse x di base $[0, 2]$ relativo alle funzioni

$$\alpha(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2} & \text{se } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{se } x \in [1, 2] \end{cases} \quad \text{e} \quad \beta(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

Poichè $\alpha(x)$ ha due espressioni diverse negli intervalli $[0, 1]$ e $[1, 2]$, conviene dividere A nei due insiemi A_1 e A_2 in figura, i.e. negli insiemi:

$$A_1 = \left\{ (x, y) : x \in [0, 1] \quad \sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2} \right\}$$

$$A_2 = \left\{ (x, y) : x \in [1, 2] \quad 0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2} \right\}$$

Gli insiemi A_1 e A_2 sono anch'essi normali rispetto all'asse x . Si ha ora:

$$\iint_A \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} dx dy = \iint_{A_1} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} dx dy + \iint_{A_2} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} dx dy.$$

Risultando :

$$\iint_{A_1} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} dx dy = \int_0^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} dy = \frac{\log 2}{3}$$

$$\iint_{A_2} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} dx dy = \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} dy = -\frac{\log 2}{3} + \frac{7}{9}$$

si ha:

$$\iint_A \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} dx dy = \frac{7}{9}$$

Osservazione 59 Poichè A è una figura circolare, l'integrale doppio assegnato si può anche calcolare passando dalle coordinate cartesiane alle coordinate polari così come si vedrà in un numero seguente.

• • •

Allo scopo di enunciare il **teorema di Fubini**, premettiamo qualche definizione. Anzitutto, fissato $i \in \{1, \dots, k\}$, l'insieme dei punti di \mathbb{R}^k aventi la i -ma coordinata nulla dicesi **l'iperpiano di \mathbb{R}^k di equazione $x_i = 0$** .

Evidentemente:

gli iperpiani di \mathbb{R}^2 sono i due assi coordinati, gli iperpiani di \mathbb{R}^3 sono i tre piani coordinati.

Siano: B un compatto misurabile di \mathbb{R}^{k-1} , φ e ψ funzioni reali continue in B con $\varphi \leq \psi$.

Il compatto di \mathbb{R}^k :

$$A = \{(x_1, \dots, x_i, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k : (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k) \in B \text{ e} \\ \varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k) \leq x_i \leq \psi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k)\}$$

si chiama "insieme normale rispetto all'iperpiano $x_i = 0$ relativo alla coppia di funzioni (φ, ψ) ". Sussiste il teorema seguente di cui ammettiamo la dimostrazione:

Teorema 5.17 (di Fubini) *Si ha, indicando con*

$$\mathbf{x}^{k-1} = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k),$$

quanto segue:

1. *L'insieme (compatto) A è misurabile e risulta:*

$$\mu_k(A) = \int_A [\psi(\mathbf{x}^{k-1}) - \varphi(\mathbf{x}^{k-1})] d\mathbf{x}^{k-1}$$

2. *Se $f(\mathbf{x}^{k-1})$ è una funzione reale continua in A allora*

$$\mathbf{x}^{k-1} \in B \rightarrow \int_{\varphi(\mathbf{x}^{k-1})}^{\psi(\mathbf{x}^{k-1})} f(\mathbf{x}^{k-1}) d\mathbf{x}^{k-1}$$

è continua in B e risulta

$$\int_{\varphi(\mathbf{x}^{k-1})}^{\psi(\mathbf{x}^{k-1})} f(\mathbf{x}^{k-1}) d\mathbf{x}^{k-1} = \int_A f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_k) dx_1, \dots, dx_k$$

5.6 Integrali tripli

Particolarizziamo quanto detto in precedenza per gli integrali tripli.

Siano $\varphi(x, y)$ e $\psi(x, y)$ funzioni reali di classe C^0 nel compatto misurabile B di classe \mathbb{R}^2 con $\varphi(x, y) \leq \psi(x, y) \quad \forall (x, y) \in B$.

Il compatto di \mathbb{R}^3

$$A = \{P = (x, y, z) : (x, y) \in B \text{ e } \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}$$

si chiama **insieme normale rispetto al piano xy relativo alla coppia di funzioni (φ, ψ)** .

Se B è un dominio limitato e misurabile di \mathbb{R}^2 e se $\varphi(x, y)$ e $\psi(x, y) \quad \forall (x, y) \in B$, allora A è un dominio limitato di \mathbb{R}^3 detto **dominio normale rispetto al piano xy relativo alla coppia di funzioni (φ, ψ)** . Rilevato che A è misurabile, sussiste il

Teorema 5.18 *Se $f(x, y, z)$ è una funzione reale di classe C^0 in A la funzione*

$$(x, y) \in B \rightarrow \int_{\psi(x, y)}^{\varphi(x, y)} f(x, y, z) dz$$

è di classe C^0 in B e si ha:

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \iint_B \left(\int_{\psi(x, y)}^{\varphi(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy$$

In particolare, se

$$f(x, y, z) = 1 \quad \forall (x, y, z) \in A,$$

risulta:

$$\text{vol } A = \iint_B [\psi(x, y) - \varphi(x, y)] dx dy$$

Dimostrazione — Omessa. □

5.7 Cambiamento di variabili negli integrali multipli.

Siano A e A_1 domini limitati di \mathbb{R}^k . Sia

$$g(t_1, \dots, t_k) = (g_1(t_1, \dots, t_k), \dots, g_k(t_1, \dots, t_k))$$

una funzione vettoriale di classe C^1 in A_1 e soddisfacente alle condizioni seguenti:

1. La restrizione di g all'interno di A_1 è invertibile;
2. per ogni $I_1, \dots, I_k \in \text{Int}(A)$,

$$\frac{\partial(g_1, \dots, g_k)}{\partial(t_1, \dots, t_k)}(t_1, \dots, t_k) \neq 0$$

3. $g(\text{Int}(A_1)) = \overset{0}{A}$ e $g(\partial A_1) = \partial A$

Sussiste il

Teorema 5.19 *Si ha quanto segue:*

1. A è misurabile se e solo se lo è A_1 ;
2. se A è misurabile e se $f(x_1, \dots, x_k)$ è una funzione reale continua in A , allora

$$\begin{aligned} \int_A f(x_1, \dots, x_k) dx_1, \dots, dx_k &= \\ &= \int_{A_1} f(g(t_1, \dots, t_k)) \left| \frac{\partial(g_1, \dots, g_k)}{\partial(t_1, \dots, t_k)}(t_1, \dots, t_k) \right| dt_1 \dots dt_k \end{aligned}$$

In particolare per $f = 1$:

$$\mu_k(A) = \int_{A_1} \left| \frac{\partial(g_1, \dots, g_k)}{\partial(t_1, \dots, t_k)}(t_1, \dots, t_k) \right| dt_1 \dots dt_k$$

Dimostrazione — Omessa. □

5.7.1 Cambiamento delle variabili negli integrali doppi

Teorema 5.20 Sia $f(x, y)$ una funzione reale continua in un dominio **regolare** A del piano (O, x, y) , di modo che ha senso considerare l'integrale doppio

$$\iint_A f(x, y) dx dy.$$

Se il dominio regolare A del piano (O, x, y) è immagine di un altro dominio regolare B del piano (O, u, v) mediante una trasformazione $\tau = (x(u, v), y(u, v))$ definita in B , di classe C^1 , biettiva tra B e A e tale che risulti

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0 \quad \forall (u, v) \in B,$$

vale la seguente formula:

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \iint_B f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv \quad (5.7.1)$$

detta **formula per il cambiamento di variabili negli integrali doppi**.

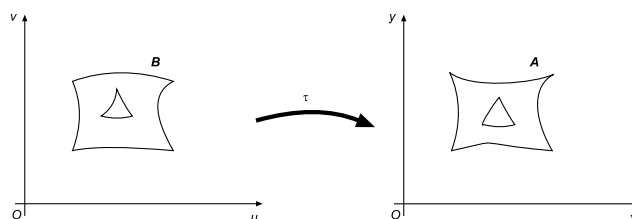


Figura 5.13: Schema trasformazione dell'insieme B in insieme A per mezzo di τ .

Osservazione 60 L'elemento

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$$

è il valore assoluto dello jacobiano delle funzioni $x(u, v)$ e $y(u, v)$ rispetto alle nuove variabili u e v .

Osservazione 61 Si noti che la trasformazione $\tau(x(u, v), y(u, v))$ è una funzione vettoriale a due componenti e di due variabili reali. Si noti anche che spesso la trasformazione $\tau(x(u, v), y(u, v))$ viene chiamata **la trasformazione di equazioni**

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$$

e viene denotata con tali equazioni.

Osservazione 62 La formula (5.7.1), che, come abbiamo detto, si chiama **la formula per il cambiamento di variabili negli integrali doppi**, serve o per semplificare la funzione integranda o per semplificare l'insieme d'integrazione o per semplificare entrambi.

• • •

Fissiamo nel piano un riferimento cartesiano monometrico ortogonale (O, x, y) ed il riferimento polare avente come polo il punto $P_0 = (x_0, y_0)$, come asse polare la retta orientata passante per P_0 parallela ed equiversa all'asse x , come verso positivo delle rotazioni quello antiorario. Detto P un punto del piano, le coordinate cartesiane (x, y) di P e quelle polari (ρ, ϑ) sono legate dalle relazioni:

$$\begin{cases} x = x_0 + \rho \cos \vartheta \\ y = y_0 + \rho \sin \vartheta \end{cases}$$

Siano Γ_1 e Γ_2 due curve del piano, la prima di equazione polare $\rho =$

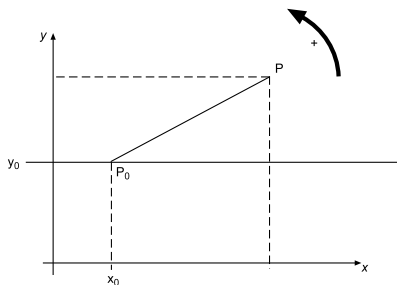


Figura 5.14: Cambiamento di variabili.

$\varphi(\vartheta)$ con $\vartheta \in [\vartheta_1, \vartheta_2]$ e la seconda di equazione polare $\rho = \psi(\vartheta)$ con $\vartheta \in [\vartheta_1, \vartheta_2]$.

Supponiamo:

$$\vartheta_2 - \vartheta_1 \leq 2\pi, \quad \varphi \text{ e } \psi \text{ continue in } [\vartheta_1, \vartheta_2],$$

$$\varphi(\vartheta) \geq 0 \quad \forall \vartheta \in [\vartheta_1, \vartheta_2], \quad \varphi(\vartheta) < \psi(\vartheta) \quad \forall \vartheta \in]\vartheta_1, \vartheta_2[$$

e denotiamo con A il dominio limitato di \mathbb{R}^2 individuato dalle curve Γ_1 e Γ_2 e dalle semiretta di origine P_0 di anomalia rispettivamente ϑ_1 e ϑ_2 .

Denotiamo inoltre con A_1 il dominio del piano cartesiano $(0, \rho, \vartheta)$ normale rispetto all'asse ϑ e relativo alla coppia di funzioni (φ, ψ) .

Introdotta la funzione vettoriale di C^∞ in A_1 :

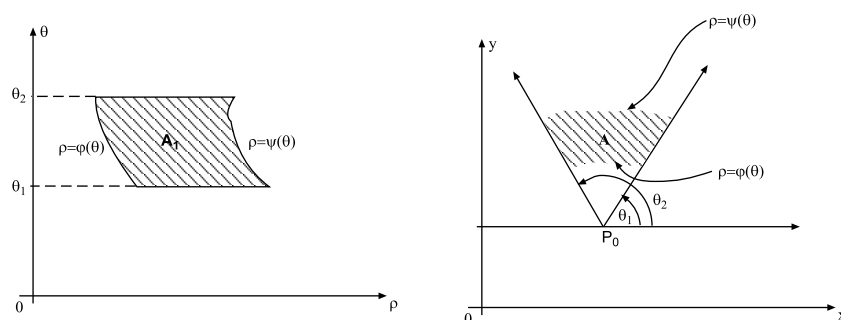


Figura 5.15: Cambiamento di variabili.

$$g : (\rho, \vartheta) \in A_1 \rightarrow (x_0 + \rho \cos \vartheta, y_0 + \rho \sin \vartheta),$$

si ha:

- la restrizione di g all'interno di A_1 è invertibile;
- $\forall (\rho, \vartheta) \in \text{Int } A_1 \quad \frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(\rho, \vartheta)}(\rho, \vartheta) = \rho > 0$
- $g(\text{Int } A_1) = \text{Int } A \equiv \overset{\circ}{A}$, $g(A_1) = A$

Pertanto stante il teorema 5.19 si ha:

- A è misurabile;
- se $f(x, y)$ è una funzione reale continua in A allora:

$$\begin{aligned} \iint_A f(x, y) dx dy &= \iint_{A_1} f(x_0 + \rho \cos \vartheta, y_0 + \rho \sin \vartheta) \rho d\rho d\vartheta = \\ &= \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \left(\int_{\varphi(\vartheta)}^{\psi(\vartheta)} f(x_0 + \rho \cos \vartheta, y_0 + \rho \sin \vartheta) \rho d\rho \right) d\vartheta, \end{aligned}$$

in particolare, per $f(x, y) = 1 \quad \forall (x, y) \in A$:

$$\mu_2(A) = \frac{1}{2} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} [(\psi(\vartheta))^2 - (\varphi(\vartheta))^2] d\vartheta$$

Esercizio — Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_{A_r} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

dove A_r è la parte del cerchio di centro l'origine e raggio r contenuta nel 1° quadrante.

• Poichè A_r è una figura circolare, conviene passare dalle coordinate cartesiane alle polari. L'equazioni della trasformazione sono:

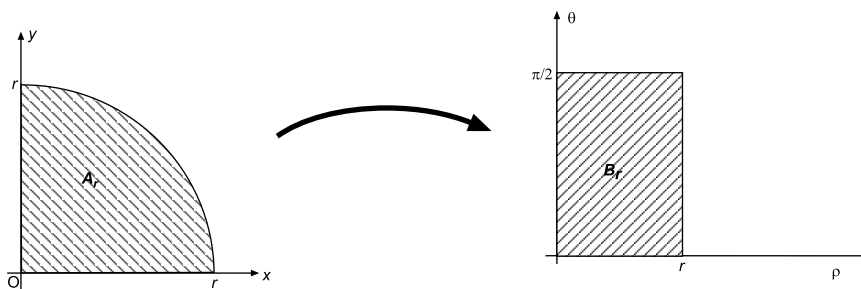


Figura 5.16: Cambiamento di variabili: cartesiani — polari.

$$\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \end{cases}$$

Quando il punto (x, y) descrive l'insieme A_r del piano (O, x, y) , il punto (ρ, ϑ) descrive l'insieme B_r del piano (O, ρ, ϑ) definito dalle limitazioni:

$$0 \leq \rho \leq r \quad \text{e} \quad 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$$

Ricordiamo, anche, che risulta:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \vartheta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \vartheta & -\rho \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \rho \cos \vartheta \end{vmatrix} = \rho \cos^2 \vartheta + \rho \sin^2 \vartheta = \rho$$

Pertanto per la formula di cambiamento di variabili si ha:

$$\begin{aligned} \iint_{A_r} e^{-(x^2+y^2)} dx dy &= \iint_{B_r} e^{-\rho^2} \rho d\rho d\vartheta = \int_0^r d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho^2} \rho d\vartheta = \\ &= \int_0^r e^{-\rho^2} \rho d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta = -\frac{1}{2} \int_0^r e^{-\rho^2} d(-\rho^2) \cdot \frac{\pi}{2} = \\ &= -\frac{\pi}{4} [e^{-\rho^2}]_0^r = -\frac{\pi}{4} [e^{-r^2} - 1] = \frac{\pi}{4} [1 - e^{-r^2}]. \end{aligned}$$

■

Osservazione 63 Abbiamo visto che risulta

$$\iint_{A_r} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \frac{\pi}{4} [1 - e^{-r^2}]. \quad (5.7.2)$$

Utilizzando la (5.7.2) è possibile calcolare l'integrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Infatti è geometricamente evidente che risulta:

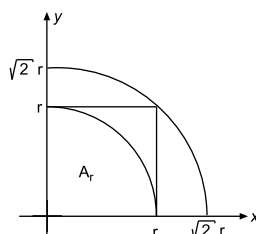


Figura 5.17: Geometricamente risulta: $A_r \subset [0, r] \times [0, r] \subset A_{\sqrt{2} \cdot r}$

$$A_r \subset [0, r] \times [0, r] \subset A_{\sqrt{2} \cdot r}$$

Pertanto si ha:

$$\iint_{A_r} e^{-(x^2+y^2)} dx dy < \iint_{[0,r]^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy < \iint_{A_{r\sqrt{2}}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \quad (5.7.3)$$

Si osservi ora che risulta:

$$\begin{aligned} \iint_{[0,r]^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy &= \int_0^r dx \int_0^r e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^r e^{-x^2} dx \int_0^r e^{-y^2} dy = \\ &= \left(\int_0^r e^{-y^2} dy \right)^2 \end{aligned}$$

Pertanto le disuguaglianze (5.7.3), tenendo presente la (5.7.2), si riscrivono come segue:

$$\frac{\pi}{4} [1 - e^{-r^2}] \leq \left(\int_0^r e^{-y^2} dy \right)^2 < \frac{\pi}{4} [1 - e^{-2r^2}]$$

Passando al limite per $r \rightarrow +\infty$, e tenendo presente il **teorema dei due carabinieri**, si ha:

$$\left(\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy \right)^2 = \frac{\pi}{4}, \text{ e quindi } \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

L'interesse di questa formula risiede nel fatto che la funzione e^{-x^2} non è elementarmente integrabile.

Si noti ancora che in base al calcolo fatto, abbiamo visto che esiste finito il

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_0^r e^{-y^2} dy,$$

e cioè che l'integrale $\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy$ ha senso; ma ciò si poteva prevedere anche

osservando che la funzione e^{-x^2} è continua in $[0, +\infty[$ ed è infinitesima per $x \rightarrow +\infty$ di ordine infinitamente grande, e quindi è sommabile in $[0, +\infty[$.

Dall'eguaglianza

$$\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

tenendo presente che la funzione e^{-x^2} è pari, si deduce l'eguaglianza:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$$

Esempio 42 Calcolare l'area del cerchio A di raggio r .

Scelto come polo l'origine si ha:

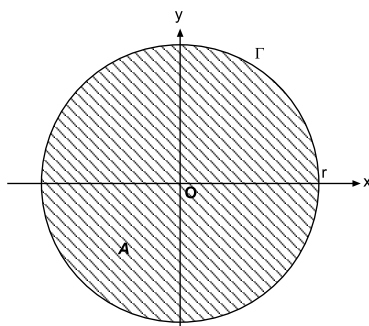


Figura 5.18: Cerchio di raggio r

$$\rho = r \quad (\text{equazione di } \Gamma)$$

$$A = \{P = (\rho, \vartheta) : 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq r\}$$

sicchè risulta:

$$\iint_A dx dy = \mu_2(A) = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^r \rho d\rho \right) d\vartheta = \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2} d\vartheta = \pi r^2$$

Esempio 43 Calcolare

$$\iint_B y dx dy$$

Assumiamo come polo l'origine, sicchè:

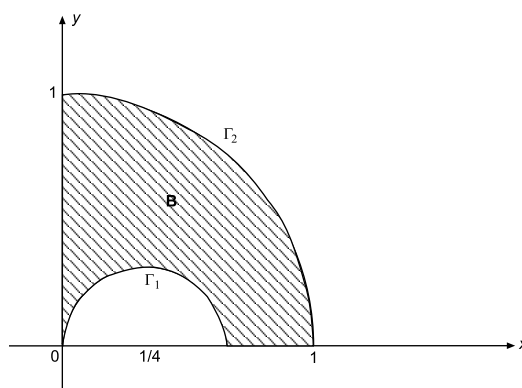


Figura 5.19: Dominio d'integrazione.

$$x = \rho \cos \vartheta \quad y = \rho \sin \vartheta;$$

Γ_1 ha equazione cartesiana

$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{16} \iff x^2 - \frac{x}{2} + y^2 = 0$$

e quindi equazione polare:

$$\rho = \frac{\cos \vartheta}{2} \quad \text{con} \quad 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$$

Γ_2 ha equazione polare

$$\rho = 1;$$

pertanto B è individuato dalle limitazioni:

$$0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} \quad ; \quad \frac{1}{2} \cos \vartheta \leq \rho \leq 1$$

e di conseguenza:

$$\begin{aligned} \iint_B y dx dy &= \int_0^{\pi/2} d\vartheta \left(\int_{\frac{1}{2} \cos \vartheta}^1 \rho \sin \vartheta \rho d\rho \right) = \int_0^{\pi/2} \left(\sin \vartheta \int_{\frac{1}{2} \cos \vartheta}^1 \rho^2 d\rho \right) d\vartheta = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} \sin \vartheta \left(1 - \frac{1}{3} \cos^3 \vartheta \right) d\vartheta = \text{etc.} \end{aligned}$$

Esercizio — Calcolare gli integrali doppi:

$$\iint_A \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{e} \quad \iint_A \frac{dx dy}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}},$$

A essendo il semicerchio tratteggiato in figura 5.20.

☉ Per calcolare il 1° integrale effettuiamo il passaggio dalle coordinate

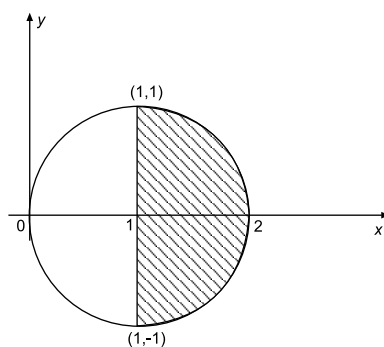


Figura 5.20: Dominio d'integrazione.

cartesiane alle polari. Le equazioni della trasformazione sono:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \end{cases}$$

Quando il punto (x, y) descrive l'insieme A , il punto (ρ, ϑ) descrive l'insieme B del piano (O, ρ, ϑ) definito dalle limitazioni:

$$-\frac{\pi}{4} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{4} \quad \rho_1(\vartheta) \leq \rho \leq \rho_2(\vartheta)$$

dove $\rho_1(\vartheta)$ è il raggio vettore del punto $P_1(\vartheta)$ e $\rho_2(\vartheta)$ è il raggio vettore del punto $P_2(\vartheta)$ in figura 5.21. Dal triangolo rettangolo $OP_1(\vartheta)C$ si deduce

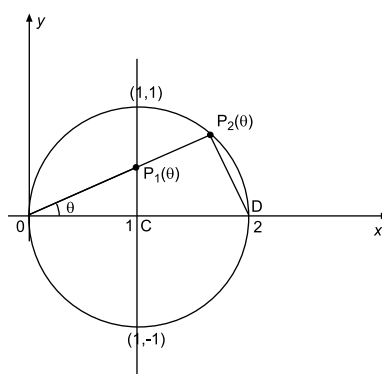


Figura 5.21: Determinazione dei limiti d'integrazione.

che:

$$1 = \rho_1(\vartheta) \cos \vartheta \iff \rho_1(\vartheta) = \frac{1}{\cos \vartheta}$$

Dal triangolo rettangolo $OP_2(\vartheta)D$ (Si noti che tale triangolo è rettangolo perchè inscritto in una semicirconferenza) si deduce che:

$$\rho_2(\vartheta) = 2 \cos \vartheta.$$

Pertanto l'insieme B è definito dalle limitazioni:

$$-\frac{\pi}{4} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{4} \quad \frac{1}{\cos \vartheta} \leq \rho \leq 2 \cos \vartheta.$$

L'insieme B è quindi l'insieme del piano (O, ρ, ϑ) normale rispetto all'asse ϑ di base di base $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ relativo alle due funzioni

$$\rho_1(\vartheta) = \frac{1}{\cos \vartheta} \quad \text{e} \quad \rho_2(\vartheta) = 2 \cos \vartheta$$

Per rappresentare nel piano (ρ, ϑ) l'insieme B si devono disegnare le **curve di equazioni cartesiane** (*N.B: non polare!*)

$$\rho(\vartheta) = \frac{1}{\cos \vartheta} \quad \text{e} \quad \rho(\vartheta) = 2 \cos \vartheta$$

con $\vartheta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, dato che B è l'insieme normale rispetto all'asse ϑ compreso tra queste due curve.

Pertanto si ha:

$$\begin{aligned} \iint_A \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \iint_B \frac{1}{\sqrt{\rho^2}} \rho d\rho d\vartheta = \iint_B d\rho d\vartheta = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\vartheta \int_{\frac{1}{\cos \vartheta}}^{2 \cos \vartheta} d\rho = 2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos \vartheta d\vartheta - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos \vartheta} d\vartheta \end{aligned}$$

Si ha ora:

$$2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos \vartheta d\vartheta = 2 [\sin \vartheta]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos \vartheta} d\vartheta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos \vartheta} d\vartheta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\left(\frac{1-\tan^2 \frac{\vartheta}{2}}{1+\tan^2 \frac{\vartheta}{2}}\right)} d\vartheta$$

con la sostituzione:

$$\tan \frac{\vartheta}{2} = t$$

risultando:

$$\frac{\vartheta}{2} = \arctan t \implies d\vartheta = \frac{2}{1+t^2} dt$$

si ha:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos \vartheta} d\vartheta &= 2 \int_0^{\tan \frac{\pi}{8}} \frac{\left(\frac{2}{1+t^2}\right)}{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} dt = 4 \int_0^{\tan \frac{\pi}{8}} \frac{1}{1-t^2} dt = \\ &= 4 [\operatorname{setthanh} t]_0^{\tan \frac{\pi}{8}} = 4 \left[\frac{1}{2} \log \frac{1+t}{1-t} \right]_0^{\tan \frac{\pi}{8}} = \\ &= 2 \log \frac{1 + \tan(\pi/8)}{1 - \tan(\pi/8)} \end{aligned}$$

Pertanto si ha:

$$\iint_A \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 2\sqrt{2} - 2 \log \frac{1 + \tan \frac{\pi}{8}}{1 - \tan \frac{\pi}{8}}$$

Osservazione 64 Per calcolare l'integrale testè svolto non si è effettuato il passaggio alle coordinate polari di polo il punto $(1, 0)$, perchè, se si effettua tale cambiamento di variabili, si semplifica l'insieme d'integrazione, ma si complica la funzione integranda.

• • •

Per calcolare l'integrale

$$\iint_A \frac{dxdy}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}$$

conviene passare alle coordinate polari di polo il punto $(1, 0)$ e semiasse polare il semiasse di origine $(1, 0)$ parallelo ed equiverso al semiasse positivo

delle x .

Le equazioni della trasformazione sono:

$$\begin{cases} x = 1 + \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \end{cases}$$

Quando il punto (x, y) descrive l'insieme A il punto (ρ, ϑ) descrive l'insieme B del piano (O, ρ, ϑ) definito dalle limitazioni

$$0 \leq \rho \leq 1 \quad -\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2},$$

i.e. descrive il rettangolo B in figura 5.22. Pertanto si ha:

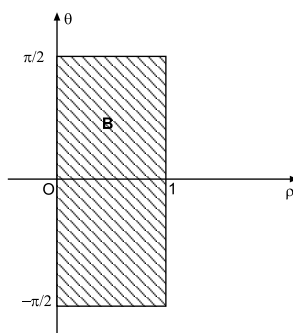


Figura 5.22: Rappresentazione del rettangolo B .

$$\begin{aligned} \iint_A \frac{dx dy}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} &= \iint_B \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2}} d\rho d\vartheta = \iint_B d\rho d\vartheta = \text{area } B = \\ &= 1 \cdot \pi = \pi \end{aligned}$$

■

Esercizio — Calcolare l'integrale doppio

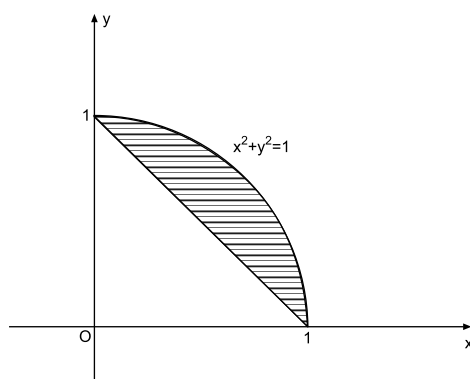
$$\iint_A \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

dove A è l'insieme tratteggiato in figura 5.23.

☉ Effettuiamo il passaggio dalle coordinate cartesiane alle polari.

le equazioni della trasformazione sono:

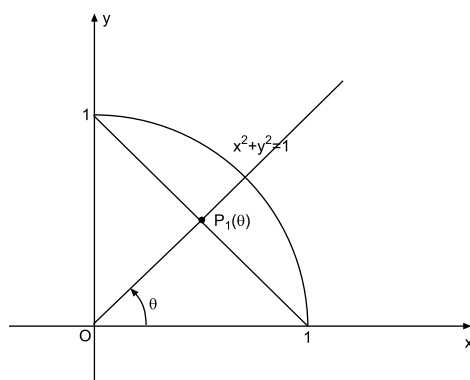
$$\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \end{cases}$$

Figura 5.23: Rappresentazione dominio A .

Quando il punto (x, y) descrive l'insieme A , il punto (ρ, ϑ) descrive l'insieme B del piano (O, ρ, ϑ) definito dalle limitazioni:

$$0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} \quad \rho_1(\vartheta) \leq \rho \leq 1,$$

dove $\rho_1(\vartheta)$ è il raggio vettore del punto $P_1(\vartheta)$ in figura 5.24, i.e. del punto di anomalia ϑ il segmento che congiunge i punti $(1, 0)$ e $(0, 1)$. Per determinare

Figura 5.24: Rappresentazione dominio A : il punto $P_1(\vartheta)$.

$\rho_1(\vartheta)$, conviene trovare l'equazione polare del segmento che congiunge $(1, 0)$ e $(0, 1)$.

L'equazione cartesiana di tale segmento è:

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{1} = 1 \quad \text{con } x \in [0, 1] \text{ e } y \in [0, 1].$$

L'equazione polare di tale segmento è:

$$\rho \cos \vartheta + \rho \sin \vartheta = 1 \quad \text{con } \vartheta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Osservazione 65 In generale per trovare l'equazione polare di una curva della quale si conosce l'equazione cartesiana, basta esprimere le coordinate cartesiane in funzione delle coordinate polari in tale equazione.

L'equazione polare del segmento è equivalente all'equazione:

$$\rho = \frac{1}{\cos \vartheta + \sin \vartheta} \quad \text{con} \quad \vartheta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

e quindi risulta:

$$\rho_1(\vartheta) = \frac{1}{\cos \vartheta + \sin \vartheta}.$$

L'insieme B , quindi, è l'insieme definito dalle limitazioni:

$$0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} \quad \frac{1}{\cos \vartheta + \sin \vartheta} \leq \rho \leq 1$$

Tale insieme è l'insieme del piano (O, ρ, ϑ) normale rispetto all'asse ϑ , di base $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ relativo alle funzioni $\rho_1(\vartheta) = \frac{1}{\cos \vartheta + \sin \vartheta}$ e $\rho_2(\vartheta) = 1$. Per rappresentare nel piano (ρ, ϑ) l'insieme B , si devono disegnare le curve di equazione cartesiane

$$\rho(\vartheta) = \frac{1}{\cos \vartheta + \sin \vartheta} \quad \text{e} \quad \rho(\vartheta) = 1 \quad \text{con} \quad \vartheta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Applicando la formula per il cambiamento di variabili si ha:

$$\begin{aligned} \iint_A \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \iint_B \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2}} d\rho d\vartheta = \iint_B d\rho d\vartheta = \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_{\frac{1}{\cos \vartheta + \sin \vartheta}}^1 d\rho = \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{1}{\cos \vartheta + \sin \vartheta}\right) d\vartheta = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} \frac{d\vartheta}{\cos \vartheta + \sin \vartheta} \end{aligned}$$

Si ha ora:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\vartheta}{\cos \vartheta + \sin \vartheta} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\vartheta}{\frac{1 - \tan^2 \frac{\vartheta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\vartheta}{2}} + \frac{2 \tan \frac{\vartheta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\vartheta}{2}}}$$

con la sostituzione:

$$\tan \frac{\vartheta}{2} = t$$

è:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\cos \vartheta + \sin \vartheta} &= \int_0^1 \frac{\frac{2}{1+t^2} dt}{\frac{1-t^2+2t}{1+t^2}} = 2 \int_0^1 \frac{dt}{-t^2 + 2t + 1} = -2 \int_0^1 \frac{dt}{t^2 - 2t - 1} = \\
 &= -2 \int_0^1 \frac{dt}{(t-1)^2 - 2} = 2 \int_0^1 \frac{dt}{2 - (t-1)^2} = \int_0^1 \frac{dt}{1 - \left(\frac{t-1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \\
 &= \sqrt{2} \int_0^1 \frac{d\left(\frac{t-1}{\sqrt{2}}\right)}{1 - \left(\frac{t-1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{2} \left[\operatorname{setttanh} \left(\frac{t-1}{\sqrt{2}} \right) \right]_0^1 = \sqrt{2} \operatorname{setttanh} \frac{1}{\sqrt{2}} = \\
 &= \sqrt{2} \frac{1}{2} \log \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \log (3 + 2\sqrt{2})
 \end{aligned}$$

Quindi si ha:

$$\iint_A \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \log (3 + 2\sqrt{2})$$

■

Esempio 44 Calcolare:

$$\iint_B \frac{xy}{x^2 + y^2} dx dy$$

Assumiamo come polo l'origine, sicchè:

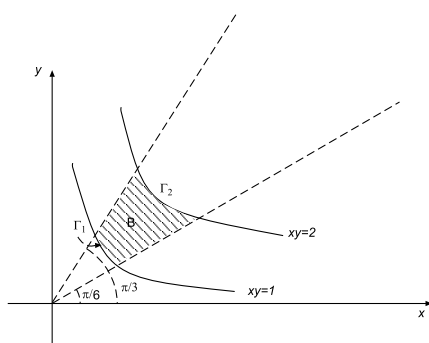


Figura 5.25: Dominio d'integrazione.

$$x = \rho \cos \vartheta \quad , \quad y = \rho \sin \vartheta.$$

Γ_1 ha equazione polare $\rho = \frac{1}{\sqrt{\cos\vartheta \sin\vartheta}}$ con $\vartheta \in [\pi/6, \pi/3]$

Γ_2 ha equazione polare $\rho = \frac{2}{\sqrt{\cos\vartheta \sin\vartheta}}$ con $\vartheta \in [\pi/6, \pi/3]$

pertanto B è individuato dalle limitazioni:

$$\frac{\pi}{6} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{3} \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{\cos\vartheta \sin\vartheta}} \leq \rho \leq \frac{2}{\sqrt{\cos\vartheta \sin\vartheta}}$$

e di conseguenza:

$$\begin{aligned} \iint_B \frac{xy}{x^2 + y^2} dx dy &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \left(\int_{\frac{1}{\sqrt{\cos\vartheta \sin\vartheta}}}^{\frac{2}{\sqrt{\cos\vartheta \sin\vartheta}}} \frac{\rho^2 \cos\vartheta \sin\vartheta}{\rho^2} \rho d\rho \right) d\vartheta = \\ &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \left(\cos\vartheta \sin\vartheta \int_{\frac{1}{\sqrt{\cos\vartheta \sin\vartheta}}}^{\frac{2}{\sqrt{\cos\vartheta \sin\vartheta}}} \rho d\rho \right) d\vartheta = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos\vartheta \sin\vartheta \frac{3}{\cos\vartheta \sin\vartheta} d\vartheta = \frac{3}{2} \left[\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right] = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

5.7.2 Cambiamento delle variabili negli integrali tripli

Siano B e B_1 domini limitati e misurabili di \mathbb{R}^3 .

Consideriamo la funzione vettoriale:

$$\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)$$

di classe C^1 in B_1 , avente per codominio B e soddisfacente alle condizioni:

1. la restrizione di \mathbf{t} all'interno di B_1 è invertibile ed ha per codominio l'interno di B .
2. Per ogni $(u, v, w) \in B$, $\frac{\partial(t_1, t_2, t_3)}{\partial(u, v, w)}(u, v, w) \neq 0$.

Teorema 5.21 Se $f(x, y, z)$ è una funzione reale di classe C^0 in B si ha:

$$\begin{aligned} \iiint_B f(x, y, z) dx dy dz &= \iiint_{B_1} [f(t_1(u, v, w), t_2(u, v, w), t_3(u, v, w)) \cdot \\ &\quad \cdot \left| \frac{\partial(t_1, t_2, t_3)}{\partial(u, v, w)}(u, v, w) \right| dudvdw] \end{aligned}$$

In particolare, se $f(x, y, z) = 1 \quad \forall (x, y, z) \in B$, risulta:

$$\text{vol } B = \iiint_{B_1} \left| \frac{\partial(t_1, t_2, t_3)}{\partial(u, v, w)}(u, v, w) \right| dudvdw$$

• • •

Fissiamo nello spazio un riferimento cartesiano (O, x, y, z) e assumiamo come riferimento polare del piano xy quello usuale.

Detto $P = (x, y, z)$ un punto dello spazio e indicato con P' la proiezione ortogonale di P sul piano xy , chiamiamo **coordinate cilindriche** di P i numeri:

$$\rho, \vartheta, v$$

dove ρ e ϑ sono coordinate polari di P' , e $v = z$. Evidentemente

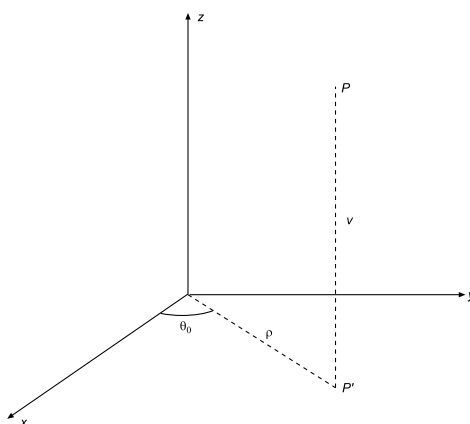


Figura 5.26: Coordinate cilindriche di P . $\vartheta_0 \in [0, 2\pi[$. Si noti che è: $\vartheta = \vartheta_0 + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \\ z = v \end{cases}$$

Rileviamo che la funzione vettoriale

$$\mathbf{t} : (\rho, \vartheta, v) \in [0, +\infty[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow (\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta, v)$$

è di classe C^∞ e che:

$$\frac{\partial (t_1, t_2, t_3)}{\partial (\rho, \vartheta, v)} (\rho, \vartheta, v) = \rho \quad \forall (\rho, \vartheta, v) \in [0, +\infty[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Sia A un dominio normale rispetto al piano xy relativo alla coppia di funzioni (φ, ψ) di classe C^∞ nel settore polare B di \mathbb{R}^2 relativo alla funzione g [alla coppia di funzioni (g_1, g_2)] di centro l'origine e di ampiezza $\beta - \alpha$.

Se $f(x, y, z)$ è una funzione reale di classe C^0 in A , utilizzando il teorema 5.21, si vede che:

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\alpha}^{\beta} d\vartheta \int_0^{g(\vartheta)} d\rho \int_{\varphi(\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta)}^{\psi(\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta)} f(\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta, v) \rho dv$$

$$[\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\alpha}^{\beta} d\vartheta \int_{g_1(\vartheta)}^{g_2(\vartheta)} d\rho \int_{\varphi(\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta)}^{\psi(\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta)} f(\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta, v) \rho dv]$$

5.8 Funzioni espresse mediante integrali.

Siano: (a, b) un intervallo di \mathbb{R} limitato o non, $[c, d]$ un intervallo compatto di \mathbb{R} , $f(x, y)$ una funzione reale continua in $(a, b) \times [c, d]$.

Rilevato che per ogni fissato $x \in (a, b)$ la funzione della sola variabile y è continua in $[c, d]$, poniamo:

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) dy \quad \forall x \in (a, b)$$

Teorema 5.22 *La funzione F è continua in (a, b) , i.e. è di classe C^0 .*

Dimostrazione — Sia x_0 un punto di (a, b) . Supponiamo, per fissare le idee, che x_0 sia interno ad (a, b) , i.e. $x_0 \in]a, b[$.
Scelto $\delta > 0$ in modo che $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subseteq]a, b[$

$$\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \quad F(x) - F(x_0) = \int_c^d [f(x, y) - f(x_0, y)] dy. \quad (5.8.1)$$

Fissato $\varepsilon > 0$, poichè per il teorema di Heine—Cantor $f(x, y)$ è uniformemente continua in $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [c, d]$, esiste un numero positivo $\delta_\varepsilon \leq \delta$ in modo che:

$$\forall (x', y'), (x'', y'') \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [c, d] \text{ con } \sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2} < \delta_\varepsilon,$$

$$|f(x', y') - f(x'', y'')| < \frac{\varepsilon}{d - c} \quad (5.8.2)$$

Dalle (5.8.1), (5.8.2) si trae che:

$$\forall x \in]x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon[- \{x_0\}, |F(x) - F(x_0)| \leq \int_c^d |f(x, y) - f(x_0, y)| dy <$$

$$< \int_c^d \frac{\varepsilon}{d - c} dy = \varepsilon$$

□

Teorema 5.23 Se $f(x, y)$ è continua in $(a, b) \times [c, d]$ ed è dotata della derivata parziale rispetto a x continua, allora F è di classe C^1 in (a, b) e si ha:

$$F'(x) = \int_c^d f_x(x, y) dy \quad \forall x \in (a, b) \quad (5.8.3)$$

Dimostrazione — Sia $x_0 \in (a, b)$, ad esempio $x_0 \in]a, b[$.

Sia $\delta > 0$ tale che $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subseteq (a, b)$.

Intanto si ha:

$$\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] - \{x_0\} \quad \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{\int_c^d [f(x, y) - f(x_0, y)] dy}{x - x_0}$$

D'altra parte il teorema di Lagrange, riferito alla funzione della sola variabile t $f(t, y)$ ed all'intervallo compatto di estremi x_0 e x , garantisce l'esistenza di c_{xy} interno a tale intervallo tale che:

$$f(x, y) - f(x_0, y) = f_x(c_{xy}, y)(x - x_0)$$

Dunque $\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] - \{x_0\}$

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \int_c^d f_x(c_{xy}, y) dy$$

e di conseguenza:

$$\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] - \{x_0\} \quad \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - \int_c^d f_x(x_0, y) dy \right| = \left| \int_c^d [f_x(c_{xy}, y) - f_x(x_0, y)] dy \right| \leq \int_c^d |[f_x(c_{xy}, y) - f_x(x_0, y)]| dy \quad (5.8.4)$$

Scelta $\varepsilon > 0$, l'uniforme continuità della derivata parziale di f_x in $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [c, d]$ comporta l'esistenza del numero positivo $\delta_\varepsilon \leq \delta$ in modo che:

$$\forall x \in [x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon] - \{x_0\} \quad \text{e} \quad \forall y \in [c, d] \quad |f_x(c_{xy}, y) - f_x(x_0, y)| < \frac{\varepsilon}{d - c} \quad (5.8.5)$$

Dalle (5.8.4), (5.8.5) si deduce che:

$$\forall x \in [x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon] - \{x_0\} \quad \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - \int_c^d f_x(x_0, y) dy \right| < \varepsilon$$

Resta così provato che:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \int_c^d f_x(x_0, y) dy$$

i.e. che la (5.8.3) è vera con $x = x_0$. □

Utilizzando il teorema 5.22 con f_x in luogo di f , dalla (5.8.3) si ricava che la derivata di F è continua in (a, b) .

Siano: Ω un aperto di \mathbb{R}^k , $[c, d]$ un intervallo compatto di \mathbb{R} , $f(P, y)$ una funzione reale definita per $P = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in \Omega$ e $y \in [c, d]$.
 Ammesso che $f(P, y)$ sia continua in $\Omega \times [c, d]$, poniamo:

$$F(P) = \int_c^d f(P, y) dy \quad \forall P \in \Omega$$

Con ragionamenti sostanzialmente simili a quelli svolti per dimostrare gli ultimi due teoremi, si stabiliscono i teoremi seguenti:

Teorema 5.24 *La funzione $F(P)$ è continua in Ω .*

Teorema 5.25 *Se $f(P, y)$ è continua in $\Omega \times [c, d]$ ed è ivi dotata della derivata parziale rispetto a x_i continua, allora F è dotata in Ω della derivata parziale rispetto a x_i continua e si ha:*

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(P) = \int_c^d f_{x_i}(P, y) dy \quad \forall P \in \Omega$$