Capitolo 6

Curve. Integrali curvilinei. Forme differenziali lineari.

6.1 Curve

Definizione 62 *Un sottoinsieme* Γ *di* $\mathbb{R}^2$ *si chiama* ***curva di*** $\mathbb{R}^2$ *se è il codominio di una funzione vettoriale* $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ *di classe* C^0 *in un intervallo* (a, b) *di* $\mathbb{R}$.

Per il teorema di Bolzano Γ è un insieme connesso di $\mathbb{R}^2$.
Fissato nel piano un riferimento cartesiano (O, x, y) e indicati con $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ i versori degli assi coordinati, Γ è il luogo dei punti $P = (x, y)$ di $\mathbb{R}^2$ tali che:

$$P = O + \varphi_1(t)\,\mathbf{i} + \varphi_2(t)\,\mathbf{j} \qquad t \in (a, b) \tag{6.1.1}$$

ovvero:

$$\begin{cases} x = \varphi_1(t) \\ y = \varphi_2(t) \end{cases} \qquad t \in (a, b) \tag{6.1.2}$$

La (6.1.1) dicesi **una equazione vettoriale di** Γ mentre le (6.1.2) si dicono

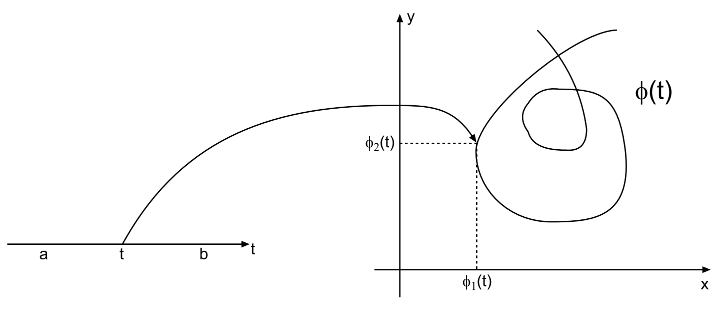

Figura 6.1: Rappresentazione grafica di una curva.

equazioni scalari di Γ.

Osservazione 66 Se (c, d) è un intervallo di $\mathbb{R}$ e se α è una funzione reale di classe C^0 in (c, d) ed avente per codominio (a, b), la funzione vettoriale

$$\psi(\nu) = \varphi(\alpha(\nu)) \qquad \forall \nu \in (c, d)$$

è di classe C^0 in (c, d) ed ha per codominio Γ.
Pertanto esistono infinite funzioni vettoriali continue in intervalli di $\mathbb{R}$ ed aventi per codominio Γ.

• • •

Definizione 63 *Un sottoinsieme Γ di $\mathbb{R}^3$ si chiama **curva di** $\mathbb{R}^3$ se è il codominio di una funzione vettoriale $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ di classe C^0 in un intervallo (a, b) di $\mathbb{R}$.*

Per il teorema di Bolzano Γ è un insieme connesso di $\mathbb{R}^3$.
Fissato nello spazio un riferimento cartesiano (O, x, y, z) e indicati con $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ i versori degli assi coordinati, Γ è il luogo dei punti $P = (x, y, z)$ di $\mathbb{R}^3$ tali che

$$P = O + \varphi_1(t)\,\mathbf{i} + \varphi_2(t)\,\mathbf{j} + \varphi_3(t)\,\mathbf{k} \qquad t \in (a, b) \tag{6.1.3}$$

ovvero:

$$\begin{cases} x = \varphi_1(t) \\ y = \varphi_2(t) \\ z = \varphi_3(t) \end{cases} \qquad t \in (a, b) \tag{6.1.4}$$

La (6.1.3) dicesi **una equazione vettoriale di** Γ, mentre le (6.1.4) si dicono **equazioni scalari di** Γ.

Anche per le curve di $\mathbb{R}^3$ vale il contenuto della osservazione 66.

Definizione 64 *Una curva di $\mathbb{R}^3$ si dice **piana** se è contenuta in u piano, in caso contrario essa dicesi **storta**.*

In seguito, salvo avviso contrario, ci riferiremo a curve di $\mathbb{R}^3$: le definizioni che daremo con le relative considerazioni sussistono pari pari per le curve di $\mathbb{R}^2$.

6.1.1 Curve aperte. Curve aperte regolari e generalmente regolari.

Definizione 65 *Una curva γ di $\mathbb{R}^3$ si chiama **aperta** se è il codominio di una funzione vettoriale $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ di classe C^0 in un intervallo compatto $[a, b]$ di $\mathbb{R}$ ed ivi invertibile, i.e.*

$$\forall t', t'' \in [a, b] \;\; \text{con } t' \neq t'' \qquad \varphi(t') \neq \varphi(t'')$$

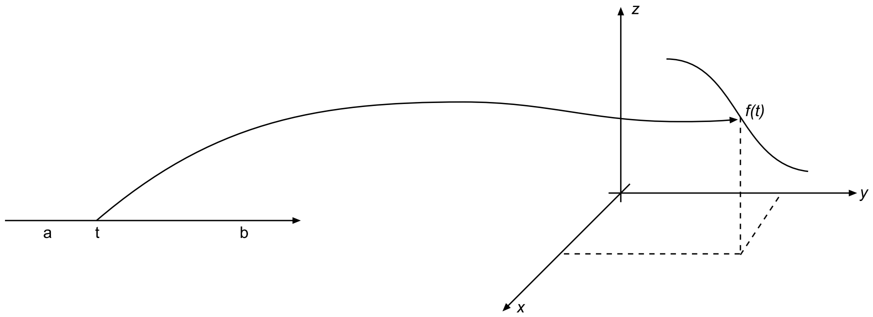

Figura 6.2: Rappresentazione grafica di una curva aperta.

La funzione φ dicesi allora **una parametrizzazione di** Γ, $[a, b]$ si chiama **intervallo base**.
Sia l'equazione vettoriale

$$P = O + \varphi_1(t)\,\mathbf{i} + \varphi_2(t)\,\mathbf{j} + \varphi_3(t)\,\mathbf{k} \qquad t \in [a, b] \tag{6.1.5}$$

che le equazioni scalari

$$\begin{cases} x = \varphi_1(t) \\ y = \varphi_2(t) \\ z = \varphi_3(t) \end{cases} \qquad t \in [a, b] \tag{6.1.6}$$

diconsi **una rappresentazione parametrica di** Γ.

Definizione 66 *Una curva aperta Γ di $\mathbb{R}^3$ si chiama **regolare** se esiste una sua parametrizzazione*

$$\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^3$$

di classe C^1 in $[a, b]$ tale che:

$$\varphi'(t) \neq \mathbf{0} \qquad \forall t \in [a, b]$$

*La funzione φ dicesi allora **una parametrizzazione regolare di** Γ.*

Sia la (6.1.5) che le (6.1.6) diconsi **una rappresentazione parametrica regolare di** Γ.

Definizione 67 *Una curva aperta Γ di $\mathbb{R}^3$ si chiama **generalmente regolare** se esistono una sua parametrizzazione*

$$\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^3$$

ed una parte I di $[a, b]$ vuota o finita in modo che siano rispettate le condizioni seguenti:

g_1) *φ è dotata di derivata continua in $[a,b]-I$ con $\varphi'(t) \neq \mathbf{0}$ $\forall t \in [a,b]-I$.*

g_2) *Quando $I \neq \emptyset$, per ogni $t \in I$ o φ' è discontinua in t oppure φ' è continua in t e $\varphi'(t) = \mathbf{0}$.*

g_3) *La funzione*

$$\left|\varphi'(t)\right| = \sqrt{\varphi_1'^2(t) + \varphi_2'^2(t) + \varphi_3'^2(t)}$$

generalmente continua in $[a,b]$, è sommabile in $[a,b]$.

La funzione φ dicesi allora ***una parametrizzazione generalmente regolare di*** *Γ; sia la* 6.1.5 *che le (6.1.6) diconsi* ***una rappresentazione parametrica generalmente regolare di*** Γ.

I punti $\varphi(t)$ con $t \in [a,b]-I$ si dicono **regolari rispetto a** φ ed il loro insieme Γ_φ si chiama **la parte regolare di Γ rispetto a** φ.

Rileviamo esplicitamente che ogni curva aperta regolare di $\mathbb{R}^3$ è anche generalmente regolare giacché ogni sua parametrizzazione regolare è altresì generalmente regolare.

Osservazione 67 Se Γ è una curva aperta di $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ regolare, possono esistere parametrizzazioni generalmente regolari di Γ che non siano regolari, come si evince dagli esempi che seguono.

Esempio 45 Il segmento Γ di $\mathbb{R}^2$ di estremi $P' = (-1,-1)$ e $P'' = (1,1)$ è

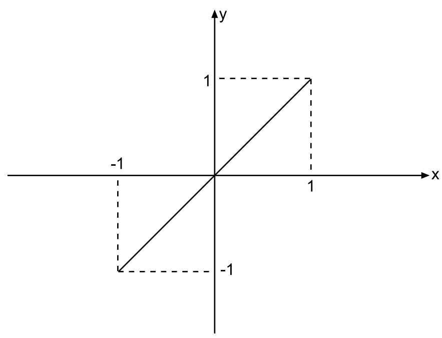

Figura 6.3: Il segmento Γ di $\mathbb{R}^2$ di estremi $P' = (-1,-1)$ e $P'' = (1,1)$.

una curva regolare aperta di $\mathbb{R}^2$ e la funzione vettoriale

$$\varphi : t \in [-1,1] \to (t,t)$$

ne è una parametrizzazione regolare.
La funzione vettoriale

$$\psi : \nu \in [-1,1] \to \left(\nu^3, \nu^3\right)$$

è anch'essa una parametrizzazione del segmento in questione; tale parametrizzazione è generalmente regolare ma non regolare giacché:

$$\psi'(0) = 0$$

Da notare che:

$$\Gamma_\varphi \equiv \Gamma \quad , \quad \Gamma_\psi \equiv \Gamma - \{0\}$$

Esempio 46 La semicirconferenza Γ di $\mathbb{R}^2$ passante per i punti $P_1 = (-1, 0)$, $P_2 = (0, 1)$, $P_3 = (1, 0)$ è una curva aperta regolare di $\mathbb{R}^2$ e la funzione vettoriale

$$\varphi : t \in [0, \pi] \to (\cos t, \sin t)$$

ne è una parametrizzazione regolare. La funzione vettoriale

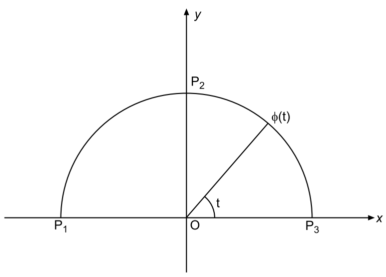

Figura 6.4: la semicirconferenza Γ di $\mathbb{R}^2$ passante per i punti $P_1 = (-1, 0)$, $P_2 = (0, 1)$, $P_3 = (1, 0)$.

$$\psi : \nu \in [-1, 1] \to \left(\nu, \sqrt{1 - \nu^2}\right)$$

è anch'essa una parametrizzazione di Γ. Tale parametrizzazione è general-

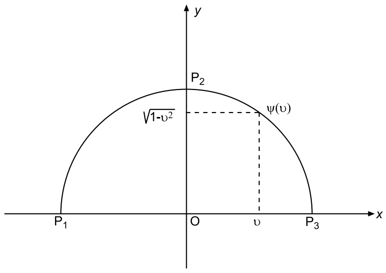

Figura 6.5: la semicirconferenza Γ di $\mathbb{R}^2$ passante per i punti $P_1 = (-1, 0)$, $P_2 = (0, 1)$, $P_3 = (1, 0)$.

mente regolare ma non regolare giacché ψ è di classe C^1 in $]-1, 1[$ con

$\psi(\nu) \neq \mathbf{0} \quad \forall \nu \in]-1,1[$ e non è derivabile nei punti -1 e 1.
Inoltre:

$$|\psi(\nu)| = \sqrt{1 + \frac{\nu^2}{1-\nu^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\nu^2}}$$

è sommabile in $[-1,1]$.
Da notare che

$$\Gamma_\varphi \equiv \Gamma \quad , \quad \Gamma_\psi \equiv \Gamma - \{P_1, P_3\}$$

Definizione 68 *Sia Γ una curva aperta di $\mathbb{R}^2$ generalmente regolare. Un punto P di Γ dicesi* ***regolare*** *se è regolare rispetto ad almeno una parametrizzazione generalmente regolare di Γ. L'insieme dei punti regolari di Γ dicesi* ***la parte regolare di*** *Γ che indicheremo con*

$$\Gamma_r$$

Evidentemente se Γ è regolare

$$\Gamma_r = \Gamma$$

6.1.2 Curve chiuse. Curve chiuse regolari e generalmente regolari.

Definizione 69 *Una curva Γ di $\mathbb{R}^3$ si chiama* ***chiusa*** *se è il codominio di una funzione vettoriale $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ di classe C^0 in un intervallo compatto $[a,b]$ di $\mathbb{R}$ soddisfacente alle condizioni seguenti*

— $\varphi(a) = \varphi(b)$

— *la restrizione di φ ed $[a,b[$ è invertibile.*

La funzione vettoriale φ dicesi allora ***una parametrizzazione di*** *Γ; $[a,b]$ si chiama* ***intervallo di base****.*

Sia l'equazione vettoriale

$$P = O + \varphi_1(t)\,\mathbf{i} + \varphi_2(t)\,\mathbf{j} + \varphi_3(t)\,\mathbf{k} \qquad t \in [a,b] \tag{6.1.7}$$

che le equazioni scalari

$$\begin{cases} x = \varphi_1(t) \\ y = \varphi_2(t) \\ z = \varphi_3(t) \end{cases} \qquad t \in [a,b] \tag{6.1.8}$$

diconsi **una rappresentazione parametrica di** Γ. Una curva chiusa di $\mathbb{R}^3$ è, per il teorema di Weierstrass, un insieme compatto (oltre che connesso) di $\mathbb{R}^3$.

Definizione 70 *Una curva chiusa* Γ *di* $\mathbb{R}^3$ *si chiama* ***regolare*** *se esiste una sua parametrizzazione*

$$\varphi : [a, b] \to R^3$$

di classe C^1 *in* $[a, b]$ *con*

$$\varphi'(t) \neq 0 \qquad \forall t \in [a, b] \quad , \quad \varphi'(a) = \varphi'(b) .$$

La funzione φ *dicesi allora* ***una parametrizzazione regolare di*** Γ.

Sia la (6.1.7) che le (6.1.8) diconsi **una rappresentazione parametrica regolare di** Γ.

Definizione 71 *Una curva chiusa* Γ *di* $\mathbb{R}^3$ *si chiama* ***generalmente regolare*** *se esistono una sua parametrizzazione*

$$\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^3$$

ed una parte I *di* $], b[$ *vuota o finita in modo che siano rispettate le condizioni seguenti:*

g_1) *φ è dotata di derivata continua in* $]a, b[- I$ *con* $\varphi'(t) \neq \mathbf{0} \qquad \forall t \in]a, b[- I$.

g_2) *Quando* $I \neq \emptyset$, *per ogni* $t \in I$ *o* φ' *è discontinua in* t *oppure* φ' *è continua in* t *e* $\varphi'(t) = \mathbf{0}$.

g_3) *La funzione*

$$\left|\varphi'(t)\right| = \sqrt{\varphi_1'^2(t) + \varphi_2'^2(t) + \varphi_3'^2(t)}$$

generalmente continua in $[a, b]$, *è sommabile in* $[a, b]$.

La funzione φ *dicesi allora* ***una parametrizzazione generalmente regolare di*** Γ; *sia la 6.1.7 che le (6.1.8) diconsi* ***una rappresentazione parametrica generalmente regolare di*** Γ.

I punti $\varphi(t)$ con $t \in]a, b[- I$ ed il punto $\varphi(a)$ quando φ' è continua in a e in b e $\varphi'(a) = \varphi'(b) \neq \mathbf{0}$ si dicono **regolari rispetto a** φ; il loro insieme Γ_φ si chiama **la parte regolare di** Γ **rispetto a** φ.

Rileviamo esplicitamente che ogni curva chiusa regolare di $\mathbb{R}^3$ è anche generalmente regolare giacché ogni sua parametrizzazione regolare è altresì generalmente regolare.

Osservazione 68 Una curva chiusa di $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ regolare può ammettere parametrizzazioni generalmente regolari che non siano regolari.

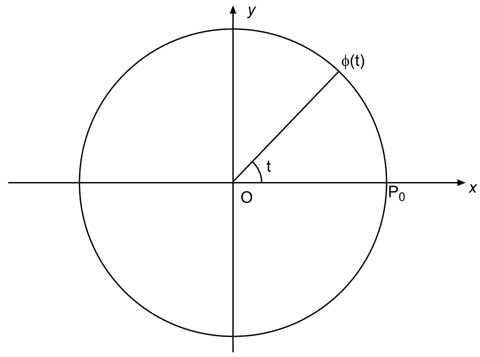

Figura 6.6: Circonferenza Γ di $\mathbb{R}^2$ di centro l'origine e raggio unitario.

Ad esempio la circonferenza Γ di $\mathbb{R}^2$ di centro l'origine e raggio unitario è una curva chiusa di $\mathbb{R}^2$ regolare, giacché la funzione vettoriale

$$\varphi : t \in [0, 2\pi] \to (\cos t, \sin t)$$

ne è una parametrizzazione regolare. La funzione vettoriale

$$\psi : \nu \in \left[0, \sqrt[3]{2\pi}\right] \to \left(\cos \nu^3, \sin \nu^3\right)$$

è anch'essa una parametrizzazione di Γ. Tale parametrizzazione è generalmente regolare ma non regolare, in quanto di classe C^1 in $\left[0, \sqrt[3]{2\pi}\right]$ e

$$\psi'(0) = \mathbf{0}$$

Da notare che

$$\Gamma_\varphi \equiv \Gamma \quad , \quad \Gamma_\psi \equiv \Gamma - \{P_0\}$$

Definizione 72 *Sia Γ una curva chiusa di $\mathbb{R}^2$ generalmente regolare. Un punto P di Γ dicesi* ***regolare*** *se è regolare rispetto ad almeno una parametrizzazione generalmente regolare di Γ. L'insieme dei punti regolari di Γ dicesi* ***la parte regolare di*** Γ *che indicheremo con*

$$\Gamma_r$$

Evidentemente se Γ è regolare

$$\Gamma_r = \Gamma$$

6.2 Retta tangente ad una curva generalmente regolare.

Siano: Γ una curva di $\mathbb{R}^3$, aperta o chiusa, generalmente regolare, $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ una parametrizzazione generalmente regolare di Γ.

Per ogni $P = \varphi(t) \in \Gamma_\varphi$ il versore applicato in P

$$\mathbf{t}_\varphi(P) = \frac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|}$$

si chiama **versore tangente a Γ nel punto P relativo a φ.**
Tale definizione è motivata da una proprietà geometrica di cui gode detto versore. Denotiamo, infatti, per ogni $t \in]a, b[- \{t_0\}$, con r_t la retta passante per i punti P_0 e $\varphi(t)$, detta retta secante, e consideriamo il versore applicato in P_0:

$$\mathbf{s}(t) \begin{cases} \frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{|\varphi(t)-\varphi(t_0)|}, & \text{se} \quad t > t_0 \\ \\ \frac{\varphi(t_0)-\varphi(t)}{|\varphi(t_0)-\varphi(t)|}, & \text{se} \quad t < t_0 \end{cases}$$

i.e. uguale a:

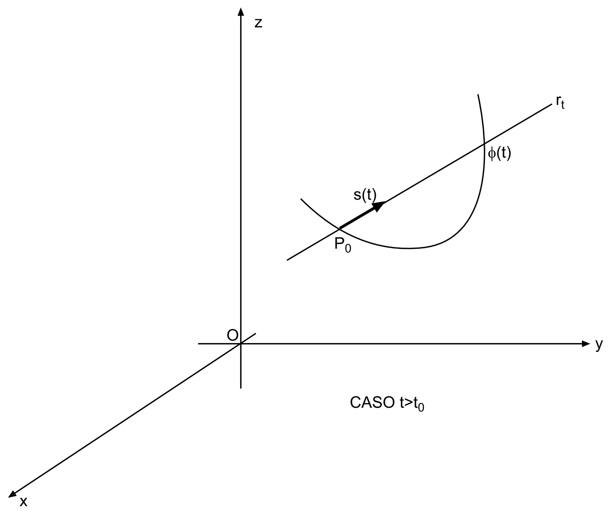

Figura 6.7: Retta secante Γ in P_0 e $\varphi(t)$: versore applicato in P_0.

$$\frac{\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}}{\left|\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}\right|}$$

indicato con $\vartheta(t) \in [0, \pi]$ l'angolo dei versori $\mathbf{t}_\varphi$ e $\mathbf{s}(t)$, si ha:

$$\lim_{t \to t_0} \vartheta(t) = \lim_{t \to t_0} \arccos\left[\mathbf{t}_\varphi(P_0) \times \mathbf{s}(t)\right] = \arccos 1 = 0,$$

sicchè per valori di t distinti da t_0, e via via sempre più prossimi a t_0, $\mathbf{s}(t)$ tende a sovrapporsi a $t_\varphi(P_0)$.
Sussiste il teorema seguente di cui omettiamo la dimostrazione.

Teorema 6.1 *Sia Γ una curva di $\mathbb{R}^3$, aperta o chiusa, generalmente regolare. Se $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ e $\psi : [c,d] \to \mathbb{R}^3$ sono parametrizzazioni generalmente regolari di Γ, si ha:*

$$\mathbf{t}_\varphi (P) = \mathbf{t}_\psi (P) \qquad \forall P \in \Gamma_\varphi \cap \Gamma_\psi$$

oppure

$$\mathbf{t}_\varphi (P) = -\mathbf{t}_\psi (P) \qquad \forall P \in \Gamma_\varphi \cap \Gamma_\psi$$

Dimostrazione — Omessa. □

Sia γ una curva di $\mathbb{R}^3$ [$\mathbb{R}^2$], aperta o chiusa, generalmente regolare. Sia P_0 un punto regolare di Γ, i.e. $P_0 \in \Gamma_r$.
In base al teorema 6.1 i versori tangenti a Γ in P_0 relativi alle parametrizzazioni generalmente regolari di Γ rispetto alle quali P_0 è regolare o coincidono o sono opposti e pertanto giacciono su una stessa retta passante per P_0, che si chiama **retta tangente a** Γ **in** P_0. Tale retta si denota, solitamente, con r_0

Il piano Π_0 [la retta n_0] passante per P_0 ed ortogonale a r_0 si chiama **piano normale** [**retta normale**] **a** Γ **in** P_0.

Se $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ [$\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^2$] è una parametrizzazione generalmente regolare di Γ rispetto alla quale P_0 è regolare, posto $P_0 = \varphi(t_0)$, poichè il vettore $\varphi'(t_0)$ è non nullo e parallelo a r_0, questa ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \varphi_1 (t_0) + \varphi_1' (t_0)\, t \\ y = \varphi_2 (t_0) + \varphi_2' (t_0)\, t \\ z = \varphi_3 (t_0) + \varphi_3' (t_0)\, t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad \left[\begin{cases} x = \varphi_1 (t_0) + \varphi_1' (t_0)\, t \\ \\ y = \varphi_2 (t_0) + \varphi_2' (t_0)\, t \end{cases} \quad t \in R \right]$$

mentre Π_0 [n_0] ha equazione cartesiano:

$$\varphi_1' (t_0) (x - \varphi_1 (t_0)) + \varphi_2' (t_0) (y - \varphi_2 (t_0)) + \varphi_3' (t_0) (z - \varphi_3 (t_0)) = 0$$

$$[\varphi_1' (t_0) (x - \varphi_1 (t_0)) + \varphi_2' (t_0) (y - \varphi_2 (t_0)) = 0]$$

6.3 Curve generalmente regolare orientata

Sia Γ una curva di $\mathbb{R}^3$ aperta o chiusa generalmente regolare.
Se $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ è una parametrizzazione generalmente regolare di Γ, l'insieme di versori:

$$\{\mathbf{t}_\varphi (P) : P \in \Gamma_\varphi\}$$

dicesi **il verso (di percorrenza) di** Γ **relativo a** φ.
tale definizione è giustificata da una **proprietà meccanica** di cui gode il versore tangente relativo a φ. Sia infatti $P_0 = \varphi(t_0) \in \Gamma_\varphi$ (i.e. P_0 è un punto

regolare rispetto a φ). Supposto, per fissare le idee, $t_0 \in [a,b]$, consideriamo la funzione reale

$$g(t) : t \in [a,b] \to \varphi'(t_0) \times (\varphi(t) - \varphi(t_0)),$$

la quale si annulla in t_0 ed è ivi strettamente crescente, giacché:

$$g'(t_0) = \left|\varphi'(t_0)\right|^2 > 0$$

Esiste allora un $\delta > 0$ in modo che

$$]t_0 - \delta, t_0 + \delta[\subset [a,b]$$

$$\forall t \in]t_0 - \delta, t_0[\qquad g(t) < 0$$

$$\forall t \in]t_0, t_0 + \delta[\qquad g(t) > 0$$

Interpretando $\varphi(t)$ come punto mobile le relazioni precedenti ci dicono che $\varphi(t)$ transita per la posizione P_0 passando dal semispazio di origine Π_0 non contenente il vettore $\varphi'(t_0)$ a quello contenente detto vettore.
in altre parole $\varphi(t)$ transita per P_0 seguendo il verso del vettore $\varphi'(t_0)$.

Siano : $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ e $\psi : [c,d] \to \mathbb{R}^3$ parametrizzazioni generalmente regolari di Γ. Si dice che φ e ψ hanno **lo stesso verso** [**verso opposto**] se:

$$\forall P \in \Gamma_\varphi \cap \Gamma_\psi \qquad \mathbf{t}_\varphi(P) = \mathbf{t}_\psi(P) \quad [\mathbf{t}_\varphi(P) = -\mathbf{t}_\psi(P)].$$

In base al teorema 6.1 due parametrizzazioni generalmente regolari di Γ o hanno lo stesso verso oppure verso opposto.
Aggiungiamo che, se $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ è una parametrizzazione generalmente regolare di Γ, la funzione vettoriale

$$\overline{\varphi} : u \in [-b,-a] \to \overline{\varphi}(-u)$$

è una parametrizzazione generalmente regolare di Γ avente verso opposto a quello di φ e si ha:

$$\Gamma_\varphi = \Gamma_{\overline{\varphi}}$$

Pertanto ad ogni punto P di Γ_r sono applicati due versori tangenti a Γ l'uno opposto all'altro.

Sia Γ una curva di $\mathbb{R}^3$, aperta o chiusa, generalmente regolare. Fissiamo una parametrizzazione generalmente regolare di Γ: $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^3$.
Tenendo presente quanto è stato detto precedentemente è possibile ripartire l'insieme delle parametrizzazioni generalmente regolare di Γ in due classi:

- la classe $[\varphi]$ costituita da φ e da tutte le parametrizzazioni generalmente regolari di Γ aventi lo stesso verso di Γ,

- la classe $[\overline{\varphi}]$ costituita da $\overline{\varphi}$ e da tutte le parametrizzazioni generalmente regolari di Γ aventi verso opposto a quello di Γ.

I due insiemi di versori:

$$\{\mathbf{t}_{\psi}(P) : P \in \Gamma_{\psi}, \psi \in [\varphi]\}$$
$$\{\mathbf{t}_{\psi}(P) : P \in \Gamma_{\psi}, \psi \in [\overline{\varphi}]\}$$

si chiamano **i versi (di percorrenza) di** Γ, il primo determinato dalla classe $[\varphi]$, il secondo dalla classe $[\overline{\varphi}]$.

Ci sono delle questioni che coinvolgono entrambi i versi di Γ. E' necessario allora distinguerli chiamando **positivo** uno di essi e **negativo** l'altro.
Quando si opera tale distinzione si dice che Γ è **orientata**.
Se Γ è orientata il verso assunto come positivo viene indicato con:

$$+\Gamma$$

quello negativo con

$$-\Gamma$$

Inoltre per ogni $P \in \Gamma_r$ il versore tangente a Γ in P appartenente a $+\Gamma$ si chiama **versore tangente positivo**, che indicheremo con

$$\mathbf{t}(P)$$

il suo opposto, $-\mathbf{t}(P)$, che appartiene a $-\Gamma$, si chiama **versore tangente negativo**. Ogni parametrizzazione generalmente regolare di Γ appartenente alla classe che determina $+\Gamma$ $[-\Gamma]$ dicesi una **orientazione positiva [negativa] di** Γ.
Completiamo il discorso sull'orientamento di una curva segnalando il teorema seguente di cui omettiamo la dimostrazione:

Teorema 6.2 *Siano:* Γ *una curva di* $\mathbb{R}^3$ *aperta generalmente regolare,* $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ *una parametrizzazione generalmente regolare di* Γ, $P' = \varphi(a)$, $P'' = \varphi(b)$.
Detta $\psi : [c,d] \to \mathbb{R}^3$ *una qualsiasi parametrizzazione generalmente regolare di* Γ, *risulta:*

$$\psi(c) = P'' \text{ e } \psi(d) = P'$$

se ψ *e* φ *hanno verso opposto.*

$$\psi(c) = P' \text{ e } \psi(d) = P''$$

se ψ *e* φ *hanno stesso verso.*
I punti P' *e* P'' *diconsi* ***gli estremi di*** Γ.
Assumere come positivo il verso che va da P' *a* P'' *significa scegliere come positivo il verso determinato dalla classe* $[\varphi]$.

6.4 Lunghezza di una curva generalmente regolare.

Sia Γ una curva di $\mathbb{R}^3$, aperta o chiusa, generalmente regolare.
Sussiste il

Teorema 6.3 *Se $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ e $\psi : [c,d] \to \mathbb{R}^3$ sono parametrizzazioni generalmente regolari di Γ, si ha:*

$$\int_a^b \left|\varphi'(t)\right| dt = \int_c^d \left|\psi'(u)\right| du$$

Dimostrazione — Omessa. □

Il numero reale positivo

$$\lambda = \int_a^b \left|\varphi'(t)\right| dt,$$

che per il teorema 6.3 è indipendente da φ, dicesi **la lunghezza di** Γ.

L'appellativo di **lunghezza di** Γ conferito a λ è suggerito da una proprietà geometrica di cui gode λ nel caso che Γ, aperta o chiusa, sia regolare. Detta $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ una parametrizzazione regolare di Γ, per ogni decomposizione $D(t_0, t_1, \ldots, t_n)$ di $[a,b]$ in intervalli compatti denotiamo con Π_D la poligonale semplice di vertici $\varphi(t_0), \varphi(t_1), \ldots, \varphi(t_n)$, detta **inscritta in** Γ, la quale ha lunghezza:

$$\ell(\Pi_D) = \sum_{i=0}^{n-1} \left|\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)\right|$$

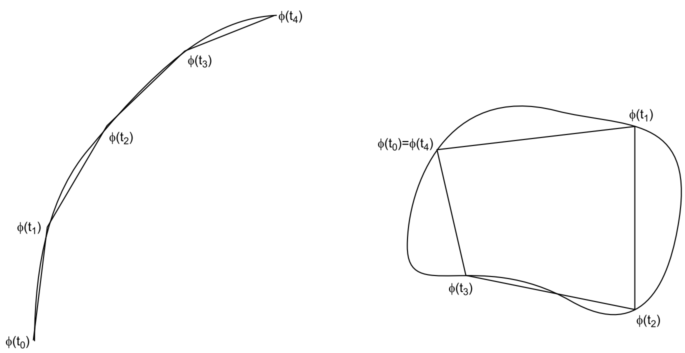

Figura 6.8: Poligonale semplice inscritta in Γ.

Teorema 6.4 *Risulta:*

$$\lambda = \sup_D \ell\left(\Pi_D\right)$$

i.e. λ è l'estremo superiore dell'insieme numerico costituito dalle lunghezze delle poligonali inscritte in Γ.

Dimostrazione — Si tratta di stabilire che λ verifica le proprietà caratteristiche dell'estremo superiore:

1. $\ell\left(\Pi_D\right) \leqslant \lambda$ per ogni decomposizione D di $[a, b]$

2. $\forall \varepsilon > 0$ esiste una decomposizione D_ε di $[a, b]$ tale che

$$\ell\left(\Pi_D\right) > \lambda - \varepsilon$$

Circa la (1), detta $D\left(t_0, t_1, \ldots, t_n\right)$ una decomposizione di $[a, b]$ si ha:

$$\ell\left(\Pi_D\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \left|\varphi\left(t_{i+1}\right) - \varphi\left(t_i\right)\right| = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left|\varphi'\left(t\right) dt\right| = \int_a^b \left|\varphi'\left(t\right) dt\right| = \lambda$$

Per quanto concerne la (2), sia $\varepsilon > 0$.
Poichè per il teorema di Heine — Cantor φ' è uniformemente continua in $[a, b]$, esiste un $\delta_\varepsilon > 0$ in modo che:

$$\forall t', t'' \in [a, b] \text{ con } \left|t' - t''\right| < \delta_\varepsilon, \left|\varphi'\left(t'\right) - \varphi''\left(t''\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2\left(b-a\right)} \tag{6.4.1}$$

Scegliamo una decomposizione $D_\varepsilon\left(t_0, t_1, \ldots, t_n\right)$ di $[a, b]$ avente ampiezza minore di δ_ε. Intanto si ha:

$$\begin{aligned}
\forall t \in \left[t_i, t_{i+1}\right] \quad \left|\varphi'\left(t\right)\right| &\leqslant \left|\varphi'\left(t\right) - \frac{\varphi\left(t_{i+1}\right) - \varphi\left(t_i\right)}{t_{i+1} - t_i}\right| + \left|\frac{\varphi\left(t_{i+1}\right) - \varphi\left(t_i\right)}{t_{i+1} - t_i}\right| = \\
&= \left|\frac{\int_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi'\left(t\right) d\tau}{t_{i+1} - t_i} - \frac{\int_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi'\left(\tau\right) d\tau}{t_{i+1} - t_i}\right| + \left|\frac{\varphi\left(t_{i+1}\right) - \varphi\left(t_i\right)}{t_{i+1} - t_i}\right| = \\
&= \left|\frac{\int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[\varphi'\left(t\right) - \varphi'\left(\tau\right)\right] d\tau}{t_{i+1} - t_i}\right| + \frac{\left|\varphi\left(t_{i+1}\right) - \varphi\left(t_i\right)\right|}{t_{i+1} - t_i} \leqslant \\
&= \frac{\int_{t_i}^{t_{i+1}} \left|\varphi'\left(t\right) - \varphi'\left(\tau\right)\right| d\tau}{t_{i+1} - t_i} + \frac{\left|\varphi\left(t_{i+1}\right) - \varphi\left(t_i\right)\right|}{t_{i+1} - t_i}.
\end{aligned}$$

D'altra parte, essendo $t_{i+1} - t_i < \delta_\varepsilon$ e sussistendo la (6.4.1), si ha anche:

$$\forall t, \tau \in [t_i, t_{i+1}] \qquad \left|\varphi'(t) - \varphi'(\tau)\right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

e di conseguenza

$$\forall t \in [t_i, t_{i+1}] \qquad \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left|\varphi'(t) - \varphi'(\tau)\right| d\tau \leqslant \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{\varepsilon}{2(b-a)} d\tau =$$
$$= \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (t_{i-1} - t_i)$$

Dunque

$$\lambda = \int_a^b \left|\varphi'(t)\right| dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left|\varphi'(t)\right| dt \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[\frac{\varepsilon}{2(b-a)} + \frac{\left|\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)\right|}{t_{i+1} - t_i}\right] dt =$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{\varepsilon}{2(b-a)} (t_{i-1} - t_i) + \left|\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)\right|\right] =$$
$$= \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i-1} - t_i) + \sum_{i=0}^{n-1} \left|\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)\right| = \frac{\varepsilon}{2} + \ell(\Pi_{D_\varepsilon}) <$$
$$< \varepsilon + \ell(\Pi_{D_\varepsilon})$$

Cosicché è vera anche la (2). □

Esercizio — Calcolare la lunghezza della circonferenza del piano (O, x, y) di raggio r e centro un punto $P_0 = (x_0, y_0)$.
Dalla geometria analitica sappiamo che la circonferenza Γ ammette la rappresentazione parametrica:

$$\begin{cases} x = x_0 + r\cos t \\ \\ y = y_0 + r\sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi] \tag{6.4.2}$$

Si noti che è evidente che, se un punto $P = (x, y)$ soddisfa le equazioni parametriche (6.4.2) (per un opportuno valore t del parametro), allora il punto $P = (x, y)$ appartiene alla circonferenza Γ.
Si verifica facilmente che la rappresentazione (6.4.2) è una rappresentazione regolare di Γ, i.e. che, posto $P(\tau) = (x_0 + r\cos\tau, y_0 + r\sin\tau)$, la funzione vettoriale $P(\tau)$ gode delle proprietà g_1, g_2 e g_3 considerate nella definizione

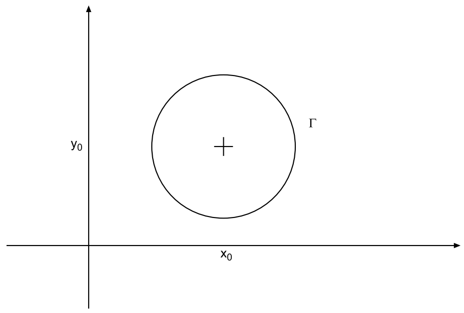

Figura 6.9: Circonferenza del piano (O, x, y) di raggio r e centro un punto $P_0 = (x_0, y_0)$.

di curva regolare.
Applicando ora la formula per il calcolo della lunghezza di una curva piana della quale è nota una rappresentazione parametrica, i.e. la formula:

$$\ell(\Gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2(\tau) + y'^2(\tau)} d\tau = \int_0^{2\pi} \sqrt{[-r\sin\tau]^2 + [r\cos\tau]^2} d\tau =$$

$$= \int_0^{2\pi} r d\tau = 2\pi r$$

■

Esercizio — Calcolare la lunghezza dell'arco Γ della parabola di equazione $y = x^2$ di estremi il punto $O = (0,0)$ e il punto $B = (1,1)$.
L'arco considerato coincide con il diagramma della restrizione

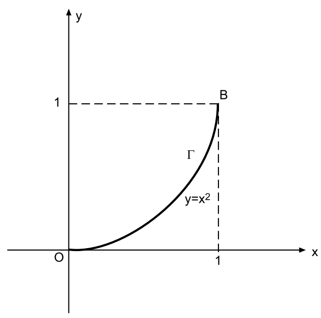

Figura 6.10: Arco Γ della parabola.

$$x^2\big|_{[0,1]} .$$

Poichè tale funzione è di classe $C^1([0,1])$, l'arco Γ è una curva regolare, e le equazioni parametriche

$$\begin{cases} x &= t \\ & \\ y &= t^2 \end{cases} \qquad t \in [0,1] \tag{6.4.3}$$

forniscono una rappresentazione parametrica regolare di Γ.
Applicando la formula per il calcolo della lunghezza di una curva piana della quale è nota una rappresentazione parametrica, e cioè la formula:

$$\ell(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{x'^2(\tau) + y'^2(\tau)} d\tau,$$

si ha:

$$\ell(\Gamma) = \int_0^1 \sqrt{x'^2(\tau) + y'^2(\tau)} d\tau = \int_0^1 \sqrt{1 + (2\tau)^2} d\tau = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx.$$

L'integrale

$$\int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx$$

si può calcolare con la sostituzione razionalizzante

$$\sqrt{1 + 4x^2} = \sqrt{4}(t - x).$$

Però si può calcolare anche per parti. Risulta, operando per parti:

$$\int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx = \left[\sqrt{1 + 4x^2} \cdot x\right]_0^1 - \int_0^1 x \cdot \frac{8x}{2\sqrt{1 + 4x^2}} dx =$$

$$= \sqrt{5} - \int_0^1 \frac{4x^2 + 1 - 1}{\sqrt{1 + 4x^2}} dx = \sqrt{5} - \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 + 4x^2}} =$$

$$= \sqrt{5} - \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d(2x)}{\sqrt{1 + (2x)^2}} =$$

$$= \sqrt{5} - \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx + \frac{1}{2} [\operatorname{settsinh} 2x]_0^1 =$$

$$= \sqrt{5} - \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx + \frac{1}{2} \left[\log\left(2x + \sqrt{1 + (2x)^2}\right)\right]_0^1 =$$

$$= \sqrt{5} - \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}dx + \frac{1}{2}\log\left(2+\sqrt{5}\right).$$

Quindi si ha:

$$\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}dx = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\log\left(2+\sqrt{5}\right)$$

e quindi:

$$\ell(\Gamma) = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\log\left(2+\sqrt{5}\right).$$

■

6.5 Ascissa curvilinea.

Sia Γ una curva aperta [chiusa] di $\mathbb{R}^3$ regolare. Orientiamo Γ e scegliamo un suo punto P_0. Si dice allora che su Γ è stato fissato un **riferimento curvilineo di origine** P_0. Sia $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ una parametrizzazione regolare di

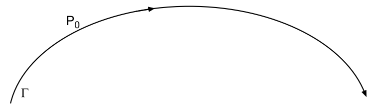

Figura 6.11: Curva orientata Γ (caso Γ aperta).

Γ.Per ogni $t \in [a,b]$ [$t \in [a,b[$] si chiama **ascissa curvilinea** del punto $\varphi(t)$ il numero reale:

$$s(t) \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t = t_0 \\ \ell(\Gamma_t) & \text{se} \quad t > t_0 \\ -\ell(\Gamma_t) & \text{se} \quad t < t_0 \end{cases}$$

Rileviamo esplicitamente che l'ascissa curvilinea di $\varphi(a)$ è nulla, mentre l'ascissa curvilinea di $\varphi(t)$ con $t \in [a,b]$ [$t \in]a,b[$] rappresenta la lunghezza dell'arco di Γ di estremi $\varphi(a)$ e $\varphi(t)$, i.e. la lunghezza della curva regolare aperta codominio della restrizione di φ all'intervallo $[a,t]$. A proposito della funzione

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \left|\varphi'(\tau)\right| d\tau \qquad \forall t \in [a,b]$$

si ha quanto segue:

- $s(t)$ è di classe C^1 in $[a,b]$ e si ha $s'(t) = |\varphi'(t)| > 0 \quad \forall t \in [a,b]$ (in particolare $s(t)$ è strettamente crescente in $[a,b]$).

- $s(t)$ ha per codominio l'intervallo compatto $[0, \ell(\Gamma)]$ essendo $\ell(\Gamma)$ la lunghezza di Γ.

La funzione inversa $t(s)$ di $s(t)$ gode delle proprietà seguenti:

- $t(s)$ è strettamente crescente in $[0, \ell(\Gamma)]$ ed ha per codominio l'intervallo compatto $[a, b]$.

- $t(s)$ è derivabile in $[0, \ell(\Gamma)]$ e risulta

$$t'(s) = \frac{1}{s'(t(s))} = \frac{1}{|\varphi'(t(s))|} \qquad \forall s \in [0, \ell(\Gamma)]$$

(in particolare $t(s)$ è di classe C^1 in $[0, \ell(\Gamma)]$)

Pertanto la funzione vettoriale

$$\tilde{\varphi} : s \in [0, \ell(\Gamma)] \to \varphi(t(s))$$

è una nuova parametrizzazione regolare di Γ detta una **parametrizzazione regolare di Γ tramite l'ascissa curvilinea**.
Da notare che

$$\forall s \in [0, \ell(\Gamma)] \, \left|\tilde{\varphi}'(s)\right| = \varphi'(t(s)) \frac{dt}{ds}(s) = \frac{\varphi'(t(s))}{|\varphi'(t(s))|}$$

cosicché:

$$\forall s \in [0, \ell(\Gamma)] \qquad \left|\tilde{\varphi}'(s)\right| = 1$$

i.e. $\tilde{\varphi}'(s)$ rappresenta il versore tangente a Γ nel punto $\tilde{\varphi}(s)$ relativo a $\tilde{\varphi}$.

6.6 Diagrammi

Sia f una funzione reale di classe C^0 nell'intervallo compatto $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Consideriamo le funzioni vettoriali:

$$\varphi : t \in [a, b] \to (t, f(t))$$
$$\psi : t \in [a, b] \to (f(t), t)$$

le quali sono di classe C^0 in $[a, b]$ ed invertibili, sicchè i loro codomini Γ_1 e Γ_2 sono curve aperte di $\mathbb{R}^2$: Γ_1 dicesi **il diagramma di f rispetto all'asse** x; Γ_2 **il diagramma di f rispetto all'asse** y. Se f è di classe C^1 in $[a, b]$, φ e ψ sono di classe C^1 in $[a, b]$ e si ha:

$$\forall t \in [a, b] \qquad \left|\varphi'(t)\right| = \left|\psi'(t)\right| = \sqrt{1 + (f'(t))^2} > 0$$

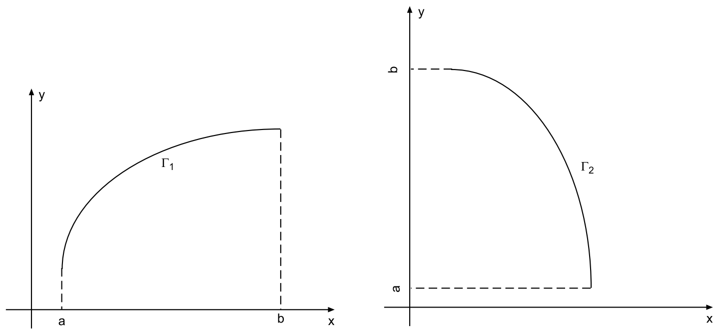

Figura 6.12: Γ_1 è il diagramma di f rispetto all'asse x mentre Γ_2 è il diagramma di f rispetto all'asse y.

cosicché Γ_1 $[\Gamma_2]$ è una curva regolare aperta e φ $[\psi]$ ne è una parametrizzazione regolare. Da notare che:

$$\ell(\Gamma_1) = \ell(\Gamma_2) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$$

Aggiungiamo che la retta tangente a Γ_1 nel punto $P_0 = (x_0, f(x_0))$ ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = x_0 + t \\ y = f(x_0) + f'(x_0)\, t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

e quindi equazione cartesiana

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Osservazione 69 Nell'esercizio di pagina 228 abbiamo valutato la lunghezza dell'arco Γ della parabola di equazione $y = x^2$ di estremi il punto $O = (0,0)$ e il punto $B = (1,1)$ per mezzo della formula per il calcolo della lunghezza di una curva piana della quale è nota una rappresentazione parametrica. In tal caso si è ottenuto:

$$\ell(\Gamma) = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx$$

Allo stesso risultato si arriva applicando la formula per il calcolo della lunghezza del diagramma di una funzione $f(x)$ di classe C^1 in un intervallo compatto $[a, b]$, i.e. la formula

$$\ell(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt.$$

Infatti, applicando questa formula si ha:

$$\ell(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (2x)^2}dx = \int_a^b \sqrt{1 + 4x^2}dx.$$

6.7 Diagrammi polari

Sia f una funzione reale di classe C^0 nell'intervallo compatto $[\alpha, \beta]$, con $\beta - \alpha \leqslant 2\pi$, $f(\theta) > 0$ $[f(\theta) < 0]$ $\forall\theta \in]\alpha, \beta[$.
Consideriamo la funzione vettoriale

$$\varphi : \theta \in [\alpha, \beta] \to (f(\theta)\cos\theta, f(\theta)\sin\theta)$$

la quale è di classe C^0 in $[\alpha, \beta]$. Il codominio γ di φ, che è una curva di $\mathbb{R}^2$, è costituito dai punti del piano aventi coordinate polari

$$(f(\theta), \theta) \quad [(-f(\theta), \theta + \pi)]$$

La curva Γ dicesi **un diagramma polare di equazione polare** $\rho = f(\theta)$.
Avvertiamo che Γ può essere aperta o chiusa: la cosa va valutata caso per caso.

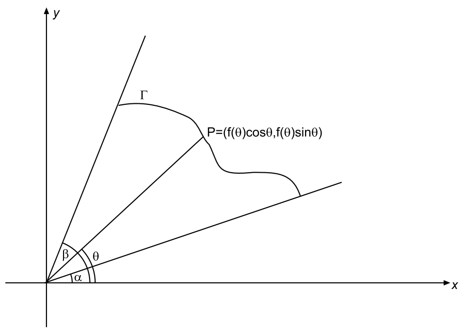

Figura 6.13: Γ è un diagramma polare. Caso: $f(\theta) > 0$ $\forall\theta \in]\alpha, \beta[$

Se f è di classe C^1 in $]\alpha, \beta[$, allora φ è di classe C^1 in $]\alpha, \beta[$ e si ha $\forall\theta \in]\alpha, \beta[$:

$$\left|\varphi'(\theta)\right| = \sqrt{(f'(\theta)\cos\theta - f'(\theta)\sin\theta)^2 + (f'(\theta)\sin\theta + f'(\theta)\cos\theta)^2} =$$
$$= \sqrt{f^2(\theta) + (f'(\theta))^2} > 0$$

cosicché Γ è generalmente regolare e φ ne costituisce una parametrizzazione generalmente regolare.

6.8 Integrale curvilineo di una funzione reale.

Nel corso di questo paragrafo ci riferiremo ad una curva di $\mathbb{R}^3$. Quanto diremo vale pari pari per una curva di $\mathbb{R}^2$.
Siano: Γ una curva di $\mathbb{R}^3$, aperta o chiusa, generalmente regolare, Γ_2 la parte regolare di Γ.
Sia $f(P)$ una funzione reale definita per $P = (x, y, z) \in A \subseteq \mathbb{R}^3$, con A contenente Γ_2.
Si dice che f è **integrabile su** Γ se esiste una parametrizzazione generalmente regolare di Γ

$$\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^3$$

in modo che la funzione

$$f(\varphi(t)) \left|\varphi'(t)\right|$$

risulti generalmente continua e sommabile in $[a, b]$.

Teorema 6.5 *Se f è integrabile su Γ, detta*

$$\psi : [c, d] \to \mathbb{R}^3$$

una qualsiasi parametrizzazione generalmente regolare di Γ, si ha:

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \left|\varphi'(t)\right| dt = \int_c^d f(\psi(u)) \left|\psi'(u)\right| du$$

Dimostrazione — Omessa. □

Se f è integrabile su Γ, l'integrale definito

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \left|\varphi'(t)\right| dt$$

che per il teorema 6.5 è indipendente da φ, dicesi **l'integrale curvilineo di** f **esteso a** Γ, e viene indicato con uno dei simboli

$$\int_\Gamma f ds \quad , \quad \int_\Gamma f(P)\, ds \quad , \quad \int_\Gamma f(x, y, z)\, ds$$

Osservazione 70 Se Γ è chiusa, a volte l'integrale curvilineo di f esteso a Γ viene indicato col simbolo

$$\oint_\Gamma f ds$$

Osservazione 71 Se Γ è una curva regolare aperta [chiusa] e $\tilde{\varphi} : [s', s''] \to \mathbb{R}^3$ [$\tilde{\varphi} : [0, \ell(\Gamma)] \to \mathbb{R}^3$] è una sua parametrizzazione regolare tramite l'ascissa curvilinea, si ha:

$$\int_\Gamma f ds = \int_{s'}^{s''} f(\tilde{\varphi}(s))\, ds \qquad [\int_\Gamma f ds = \int_0^{\ell(\Gamma)} f(\tilde{\varphi}(s))\, ds]$$

Teorema 6.6 *Una funzione reale f, che sia continua su Γ è integrabile su Γ.*

Dimostrazione — Infatti, posto $\delta = \max_{P\in\Gamma} |f(P)|$ e detta $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ una parametrizzazione generalmente regolare di Γ, la funzione

$$f(\varphi(t)) \left|\varphi'(t)\right|$$

è generalmente continua in $[a, b]$, ed è anche sommabile in $[a, b]$ giacché

$$\left|f(\varphi(t)) \left|\varphi'(t)\right|\right| = |f(\varphi(t))| \left|\varphi'(t)\right| \leqslant \delta \left|\varphi'(t)\right|$$

Pertanto, tenuto conto che $|\varphi'(t)|$ è sommabile in (a, b), in base al criterio del confronto detta funzione è sommabile in (a, b). □

E' immediato constatare quanto segue:

1. Se c è una costante reale, si ha:

$$\int_\Gamma c ds = c \cdot \ell(\Gamma)$$

   in particolare $\int_\Gamma ds = \ell(\Gamma)$

2. Se f_1 e f_2 sono funzioni reali integrabili su Γ, anche la funzione

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 \qquad (c_i = \text{costante reale})$$

   è integrabile su Γ e si ha:

$$\int_\Gamma (c_1 f_1 + c_2 f_2)\, ds = c_1 \int_\Gamma f_1 ds + c_2 \int_\Gamma f_2 ds \quad \text{(proprietà di linearità)}$$

3. Se f e g sono funzioni reali continue su Γ_r ed ivi limitate, se

$$f(P) \leqslant g(P) \qquad \forall P \in \Gamma_r$$

   allora

$$\int_\Gamma f ds \leqslant \int_\Gamma g ds$$

4. Se f è una funzione reale continua su Γ, posto

$$m' = \min_{P\in\Gamma} f(P) \quad , \quad m'' = \max_{P\in\Gamma} f(P)$$

si ha:

$$m' \leqslant \frac{\int\limits_{\Gamma} f ds}{\ell(\Gamma)} \leqslant m'' \qquad \text{(teorema della media)}$$

Dimostrazione — Si ha:

$$\int\limits_{\Gamma} m' ds \leqslant \int\limits_{\Gamma} f ds \leqslant \int\limits_{\Gamma} m'' ds$$

da cui segue banalmente l'asserto. □

Osservazione 72 Dal teorema della media visto che Γ è, per il teorema di Bolzano, un insieme connesso (oltre che compatto) e che di conseguenza il codominio di f è un intervallo compatto $[m', m'']$, esiste senz'altro almeno un punto $Q \in \Gamma$ tale che

$$\frac{\int\limits_{\Gamma} f ds}{\ell(\Gamma)} = f(Q)$$

Esercizio — Calcolare l'integrale curvilineo:

$$\int\limits_{C} \frac{y^2}{x^2+y^2} ds$$

dove C è la circonferenza che ha centro nell'origine e raggio r.
Una rappresentazione parametrica regolare della circonferenza C è:

$$x = r\cos t \quad , \quad y = r\sin t, \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

Si ha:

$$\int\limits_{C} f(x,y)\, ds = \int\limits_{a}^{b} f[x(t), y(t)] \cdot \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt$$

Essendo:

$$\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = \sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t} = r,$$

è:

$$\int\limits_{C} \frac{y^2}{x^2+y^2} ds = \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{r^2\sin^2 t}{r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t} r dt = r \int\limits_{0}^{2\pi} \sin^2 t dt =$$
$$= \frac{r}{2}[t - \sin t\cos t]_0^{2\pi} = \pi r$$

■

Esercizio — Calcolare l'integrale curvilineo:

$$\int_C \sqrt{1+x^2+3y}ds,$$

dove C è l'arco di parabola di equazione $y=x^2$, per $0 \leqslant t \leqslant 3$.
In questo caso risulta:

$$\int_C f(x,y)\,ds = \int_p^q f(x,y(x))\sqrt{1+y'^2(x)}dx.$$

Essendo:

$$\sqrt{1+y'^2(x)} = \sqrt{1+4x^2}$$

si ottiene:

$$\int_C \sqrt{1+x^2+3y}ds = \int_0^3 \sqrt{1+4x^2}\cdot\sqrt{1+4x^2}dx = \int_0^3 \left(1+4x^2\right)dx = 39.$$

■

6.9 Forme differenziali lineari. Integrale curvilineo di una forma differenziale lineare.

6.9.1 Forme differenziali lineari.

Siano: $X(P)$ e $Y(P)$, funzioni reali definite per $P=(x,y)\in\Omega$ con Ω pseudodominio di $\mathbb{R}^2$. Posto:

$$v(P) = X(P)\,\mathbf{i} + Y(P)\,\mathbf{j} \qquad \forall P\in\Omega$$

$$dP = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} \qquad \forall (dx,dy)\in\mathbb{R}^2$$

Il prodotto scalare

$$\mathbf{v}(P)\times dP$$

i.e. la funzione delle variabili

$$x \quad , \quad y \quad , \quad dx \quad , \quad dy:$$

$$X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy \tag{6.9.1}$$

definita per $(x,y)\in\Omega$ e $(dx,dy)\in\mathbb{R}^2$ dicesi **forma differenziale lineare (di coefficienti X e Y) i due variabili**.
Si dice che la (6.9.1) è di classe C^n $(n\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\})$ in Ω se i suoi coefficienti

sono di classe C^n in Ω.

Siano $X(P)$, $Y(P)$ e $Z(P)$ funzioni reali definite per $P = (x, y, z) \in \Omega$ con Ω aperto di $\mathbb{R}^3$. Posto:

$$v(P) = X(P)\,\mathbf{i} + Y(P)\,\mathbf{j} + Z(P)\,\mathbf{k} \qquad \forall P \in \Omega$$

$$dP = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k} \qquad \forall (dx, dy, dx) \in \mathbb{R}^3$$

il prodotto scalare

$$v(P) \times dP$$

i.e. la funzione delle variabili

$$x \quad , \quad y \quad , \quad z \quad , \quad dx \quad , \quad dy \quad , \quad dz :$$

$$X(x, y, z)\,dx + Y(x, y, z)\,dy + Z(x, y, z)\,dz \tag{6.9.2}$$

definita per $(x, y, z) \in \Omega$ e $(dx, dy, dz) \in \mathbb{R}^3$ si chiama **forma differenziale lineare in tre variabili** (X, Y, Z). Si dice che la (6.9.2) è di classe C^n $(n \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\})$ in Ω se i suoi coefficienti sono di classe C^n in Ω.

6.9.2 Integrale curvilineo di una forma differenziale lineare.

Ci riferiamo ad una forma lineare differenziale in 3 variabili. Quanto diremo vale pari pari per una forma differenziale lineare in due variabili.
Sia

$$X(P)\,dx + Y(P)\,dy + Z(P)\,dz \tag{6.9.3}$$

una forma differenziale lineare di classe C^0 nell'aperto Ω di $\mathbb{R}^3$. Poniamo

$$\mathbf{v}(P) = X(P)\,\mathbf{i} + Y(P)\,\mathbf{j} + Z(P)\,\mathbf{k} \qquad \forall P \in \Omega$$

e consideriamo una curva generalmente regolare Γ aperta o chiusa, contenuta in Ω. Orientata Γ, denotiamo, per ogni $P \in \Omega$, con $\mathbf{t}(P)$ il versore positivo tangente a Γ in P. Si dimostra che la funzione vettoriale

$$P \in \Gamma_r \to \mathbf{t}(P)$$

è continua su Γ_r. Pertanto, essendo per ipotesi $\mathbf{v}$ di classe C^0 in Ω, la funzione reale

$$f(P) = \mathbf{v}(P) \times \mathbf{t}(P) \qquad \forall P \in \Gamma_r$$

è di classe C^0 su Γ_r. Aggiungiamo che, posto $M = \max_{P \in \Gamma} |\mathbf{v}(P)|$, risulta

$$|f(P)| = |\mathbf{v}(P) \times \mathbf{t}(P)| \leqslant |\mathbf{v}(P)| \cdot |\mathbf{t}(P)| \leqslant M \quad \forall P \in I$$

cosicché f è anche limitata su Γ_r.
Ha senso allora considerare l'integrale curvilineo

$$\int_{\Gamma} [\mathbf{v}(P) \times \mathbf{t}(P)]\, ds$$

Detto integrale prende il nome di **integrale curvilineo della forma differenziale lineare (6.9.3) esteso alla curva orientata** Γ e viene indicato con uno dei simboli

$$\int_{+\Gamma} X(P)\, dx + Y(P)\, dy + Z(P)\, dx \quad , \quad \int_{+\Gamma} \mathbf{v}(P) \times dP \tag{6.9.4}$$

Si pone per definizione

$$\int_{-\Gamma} \mathbf{v}(P) \times dP = -\int_{+\Gamma} \mathbf{v}(P) \times dP$$

Osservazione 73 Se Γ è chiusa, l'integrale curvilineo sopra definito dicesi **la circuitazione di v lungo la curva orientata** Γ.

Osservazione 74 Se Γ è aperta e P', P'' ne sono gli estremi, ammesso che il verso assunto come positivo sia quello che va da P' a P'', spesso ai simboli (6.9.4) si preferiscono i seguenti:

$$(\Gamma) \int_{P'}^{P''} X(P)\, dx + Y(P)\, dy + Z(P)\, dx \quad , \quad (\Gamma) \int_{P'}^{P''} \mathbf{v}(P) \times dP$$

In tal caso Γ si chiama **cammino d'integrazione** mentre P', P'' diconsi **gli estremi d'integrazione**.

Sia $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ una parametrizzazione generalmente regolare di Γ. Indicata con Γ_0 la parte vuota o finita di $[a, b]$ tale che

$$\varphi(t) \in \Gamma_r \qquad \forall t \in [a, b] - \Gamma_0,$$

si ha:

$$\mathbf{t}(\varphi(t)) = \pm \mathbf{t}_{\varphi}(\varphi(t)) = \pm \frac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|} =$$
$$= \pm \left(\frac{\varphi_1'(t)}{|\varphi'(t)|}\mathbf{i} + \frac{\varphi_2'(t)}{|\varphi'(t)|}\mathbf{j} + \frac{\varphi_3'(t)}{|\varphi'(t)|}\mathbf{k} \right) \quad \forall t \in [a, b] - I_0$$

di conseguenza

$$\int_{+\Gamma} \mathbf{v}(P) \times dP = \int_{+\Gamma} [\mathbf{v}(P) \times \mathbf{t}(P)]\, ds =$$

$$= \int_a^b [\mathbf{v}(\varphi(t)) \times \mathbf{t}(\varphi(t))] \left|\varphi'(t)\right| dt =$$

$$= \pm \int_a^b \left[X(\varphi(t))\, \varphi_1'(t) + Y(\varphi(t))\, \varphi_2'(t) + Z(\varphi(t))\, \varphi_3'(t)\right] dt$$

dove vale il segno $+$ se φ è un'orientazione positiva di Γ, quello $-$ se φ è un'orientazione negativa di Γ.

6.10 Proprietà additiva dell'integrale curvilineo.

Siano $P_0, P_1, \ldots, P_n$ punti di $\mathbb{R}^2$ $[\mathbb{R}^3]$ ciascuno distinto dal successivo. Per ogni $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ sia Γ_i una curva generalmente regolare aperta di $\mathbb{R}^2$ $[\mathbb{R}^3]$ di estremi P_i e P_{i+1}.
Per $n = 2$ supponiamo che Γ_0 e Γ_1 hanno in comune soltanto l'estremo P_1 se $P_2 \neq P_0$, oppure hanno in comune soltanto gli estremi P_0 e P_1 se $P_2 = P_0$.
Per $n > 2$ supponiamo verificate le condizioni seguenti:

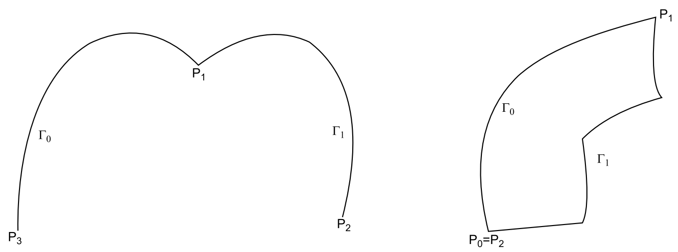

Figura 6.14: Rappresentazione grafica di Γ_0 e Γ_1 nei due casi descritti.

1. due curve distinte o hanno intersezione vuota o hanno un estremo in comune;
2. ogni punto P_i appartiene al più a due curve distinte.

In tale situazione si dimostra che l'unione

$$\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_{n-1}$$

è una curva generalmente regolare di $\mathbb{R}^2$ $[\mathbb{R}^3]$. aperta se $P_0 \neq P_n$, chiusa se $P_0 = P_n$, inoltre, detto $[a, b]$ un intervallo compatto di $\mathbb{R}$, esistono una

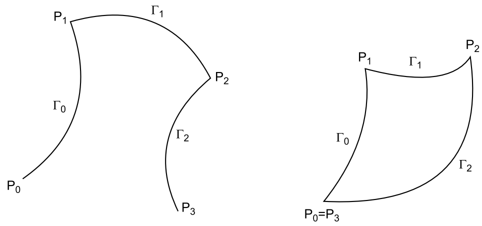

Figura 6.15: Rappresentazione grafica di Γ_0 e Γ_1 e Γ_2 soddisfacenti le proprietà 1) e 2).

parametrizzazione generalmente regolare di Γ

$$\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^2 \qquad [\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^3]$$

ed una decomposizione $D(t_0, \ldots, t_n)$ di $[a, b]$ in intervalli compatti tale che la restrizione di φ a $[t_i, t_{i+1}]$ è una parametrizzazione generalmente regolare in Γ_i e si ha:

$$\varphi(t_i) = P_i \qquad , \qquad \varphi(t_{i+1}) = P_{i+1}.$$

Pertanto $f(P)$ è una funzione reale continua su Γ_r ed ivi limitata. Risulta

$$\int_\Gamma f(P)\, ds = \int_a^b f(\varphi(t)) \left|\varphi'(t)\right| dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\varphi(t)) \left|\varphi'(t)\right| dt =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\Gamma_i} f(P)\, ds$$

Orientata poi Γ assumendo come positivo il verso determinato dalla classe $[\varphi]$ e detto $\mathbf{v}(P)$ un campo vettoriale continuo su Γ, si vede che:

$$\int_{+\Gamma} \mathbf{v}(P) \times dP = \sum_{i=0}^{n-1} (\Gamma_i) \int_{P_i}^{P_{i+1}} \mathbf{v}(P) \times dP$$

6.11 Aperti di $\mathbb{R}^2$ connessi ed a connessione semplice. Domini regolari limitati di $\mathbb{R}^2$.

Premettiamo il teorema seguente di cui omettiamo la dimostrazione.

Teorema 6.7 (di Jordan) *Ogni curva Γ di $\mathbb{R}^2$ semplice*[1] *e chiusa è la frontiera di un dominio limitato ed internamente connesso.*

[1] Sia Γ una curva del piano di $\mathbb{R}^2$. Si dice che Γ è una **curva semplice** (o una curva

Indicheremo detto dominio con $D(\Gamma)$.
Un aperto connesso Ω di $\mathbb{R}^2$ si dice **a connessione semplice** se verifica la condizione seguente:

Per ogni curva Γ semplice e chiusa inclusa in Ω risulta $D(\Gamma) \subset \Omega$.

Evidentemente $\mathbb{R}^2$, i rettangoli aperti di $\mathbb{R}^2$ ed i cerchi aperti di $\mathbb{R}^2$ sono insiemi aperti a connessione semplice, mentre $\mathbb{R}^2$ privato di un punto e le corone circolari aperte sono insiemi aperti ma non a connessione semplice.

Un dominio limitato ed internamente connesso D di $\mathbb{R}^2$ si dice **regolare** se la sua frontiera ∂D è l'unione di un numero finito di curve generalmente regolari chiuse

$$\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$$

soddisfacenti alle condizioni seguenti:

1. $\forall i \in \{1, \ldots, m \quad\} \, D(\Gamma_i) \subset \overset{o}{D}(\Gamma_0)$
2. $\forall i, j \in \{1, \ldots, m\}$ con $i \neq j$ $D(\Gamma_i) \cap D(\Gamma_j) = \emptyset$
3. Per $i \in \{0, \ldots, m\}$ esiste una parametrizzazione generalmente regolare $\varphi^i : [a_i, b_i] \to \mathbb{R}^2$ di Γ_i tale che ogni $P \in \Gamma_i \varphi_i$ è un punto medio di un segmento $P'P''$ normale a Γ_i in P con $PP' - \{P\} \subset \overset{o}{D}$, $P''P - \{P\} \subset \mathbb{R}^2 - D$
$$\mathbf{t}_{\varphi^i}(P) \wedge \frac{P' - P}{|P' - P|} = \mathbf{i} \wedge \mathbf{j}$$

Le curve $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$ diconsi **i contorni di** D : Γ_0 è il contorno esterno $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$ sono i contorni interni. In assenza di contorni interni D dicesi **ad unico contorno**.
Per ogni punto $P \in \Gamma_i$ regolare rispetto a φ^i

$$\frac{P' - P}{|P' - P|}$$

si chiama **versore normale interno alla frontiera di** D **in** P e viene indicato con $\mathbf{n}_i(P)$; il suo opposto:

$$\frac{P'' - P}{|P'' - P|}$$

ordinaria o una curva di Jordan) quando esiste almeno una rappresentazione parametrica di Γ

$$P = P(t) \qquad t \in (a, b)$$

che gode della seguente proprietà:
La funzione $P = P(t)$ è localmente invertibile in $]a, b[$ e la sua inversa locale in $]a, b[$ è continua.

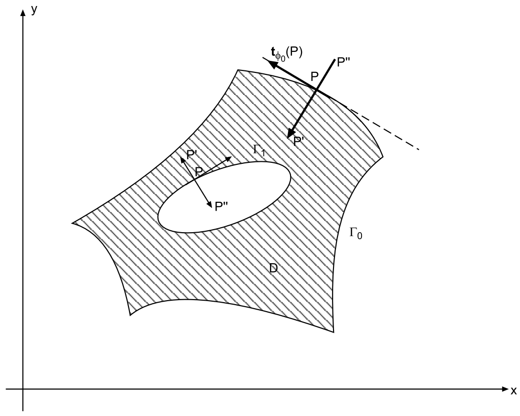

Figura 6.16: Dominio limitato ed internamente connesso D : dominio regolare.

si chiama invece **versore normale esterno alla frontiera di** D **in** P e viene indicato con $\mathbf{n}_e(P)$.
Convenzionalmente ciascuna curva Γ_i viene orientata assumendo come positivo il verso determinato dalla classe. intuitivamente questo significa che il verso positivo sul contorno esterno è quello antiorario, mentre il verso positivo sui contorni interni è quello orario. Se $f(P)$ è una funzione reale continua sulla frontiera di D, si pone per definizione

$$\int_{\partial D} f(P)\,ds = \sum_{i=0}^{m} \int_{\Gamma_i} f(P)\,ds$$

se $\mathbf{v}(P)$ è un campo vettoriale continuo sulla frontiera di D, si pone per definizione

$$\int_{+\partial D} v(P) \times dP = \sum_{i=0}^{m} \int_{+\Gamma_i} v(P) \times dP \qquad (6.11.1)$$

La somma presente al secondo membro della (6.11.1) dicesi **la circuitazione di v lungo la frontiera di** D.

6.12 Formule di Gauss nel piano. I teoremi di Stokes e della divergenza.

Sia D un dominio regolare limitato di $\mathbb{R}^2$. Orientiamo ciascun contorno di D assumendo come positivo il verso precisato nel paragrafo precedente[2]. Per

[2]Si chiama **verso positivo sulla frontiera di** D il verso sulla frontiera di D che lascia alla sinistra i punti interni al **dominio** D.

ogni punto regolare P della frontiera di D denotiamo con

$$\mathbf{t}(P) = t_x(P)\,\mathbf{i} + t_y(P)\,\mathbf{j}$$

il versore tangente positivo a ∂D in P e con

$$\mathbf{n}_e(P) = n_{ex}(P)\,\mathbf{i} + n_{ey}(P)\,\mathbf{j}$$

il versore normale esterno a ∂D in P.
Rilevato che

$$\begin{cases} n_{ex}(P) &= \mathbf{n}_e(P) \times \mathbf{i} = \mathbf{t}(P) \times \mathbf{j} = t_y(P) \\ \\ n_{ey}(P) &= \mathbf{n}_e(P) \times \mathbf{j} = \mathbf{t}(P) \times (-\mathbf{i}) = t_x(P) \end{cases} \tag{6.12.1}$$

Sussiste il teorema seguente di cui omettiamo la dimostrazione.

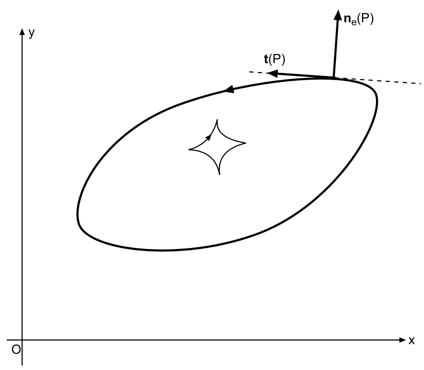

Figura 6.17: Versore tangente e normale esterno alla frontiera del dominio D.

Teorema 6.8 (Formule di Gauss) *Se u è una funzione reale di classe C^1 in D, si ha:*

$$\begin{aligned} \iint_D u_x dxdy &= \int_{\partial D} u n_{ex} ds \\ \iint_D u_y dxdy &= \int_{\partial D} u n_{ey} ds \end{aligned} \tag{6.12.2}$$

Osservazione 75 Si dimostra che le curve generalmente regolari aperte o chiuse di $\mathbb{R}^2$ sono insiemi misurabili e di misura nulla. Conseguentemente ogni dominio regolare limitato di $\mathbb{R}^2$ è misurabile.

Le (6.12.2), tenendo presente le (6.12.1) si riscrivono:

$$\iint_D u_x dxdy = \int_{\partial D} u(P)\,t_y ds = \int_{\partial D} [u(P)\,\mathbf{j} \times \mathbf{t}(P)]\,ds = \int_{+\partial D} u(x,y)\,dy$$

$$\iint_D u_y dxdy = -\int_{\partial D} u(P)\, t_x ds = -\int_{\partial D} [u(P)\,\mathbf{i} \times \mathbf{t}(P)]\, ds = -\int_{+\partial D} u(x,y)\, dx$$

In particolare, assumendo $u(x,y) = x$, $t(x,y) \in D$ e $u(x,y) = y$ e $t(x,y) \in D$, si ha:

$$\mu_2(D) = \int_{+\partial D} xdy$$

$$\mu_2(D) = -\int_{+\partial D} ydx$$

da cui sommando membro a membro

$$\mu_2(D) = \frac{1}{2}\int_{+\partial D} (-ydx + xdy)$$

Sia $\mathbf{v}(P) = X(P)\,\mathbf{i} + Y(P)\,\mathbf{j}$ un campo vettoriale di classe C^1 in D. Sfruttando le formule di Gauss, risulta:

$$\begin{aligned}\iint_D [\mathrm{rot}\,\mathbf{v}(P) \times \mathbf{k}]\, dxdy &= \iint_D [Y_x(P) - X_y(P)]\, dxdy = \\ &= -\iint_D X_y(P)\, dydx + \iint_D Y_x(P)\, dxdy = \\ &= \int_{+\partial D} X(x,y)\, dx + \int_{+\partial D} Y(x,y)\, dy = \int_{+\partial D} \mathbf{v}(P)\, xdP \qquad (6.12.3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iint_D \mathrm{div}\, v(P)\, dxdy &= \iint_D [X_x(P) + Y_y(P)]\, dxdy = \\ &= \iint_D X_x(P)\, dxdy + \iint_D Y_y(P)\, dxdy = \\ &= \int_{\partial D} X(P)\, n_{ex}(P)\, dx + \int_{\partial D} Y(P)\, n_{ey}(P)\, dy = \int_{\partial D} [\mathbf{v}(P) \times \mathbf{n}_{ex}(P)]\, ds \qquad (6.12.4)\end{aligned}$$

L'uguaglianza (6.12.3) è nota come **teorema di Stokes nel piano**. Il primo membro di essa si chiama **flusso del rotore di v attraverso** D. Pertanto la (6.12.3) ci dice che *il flusso del rotore di* $\mathbf{v}$ *attraverso D uguaglia la circuitazione di* $\mathbf{v}$ *lungo la frontiera di D.*

L'uguaglianza (6.12.4) è nota come **teorema della divergenza nel piano**. Il secondo membro si chiama **flusso che è uscente dalla frontiera di** D. Pertanto la (6.12.4) ci dice che *l'integrale doppio esteso a D della divergenza di* $\mathbf{v}$ *eguaglia il flusso di* $\mathbf{v}$ *uscente dalla frontiera di D.*

6.13 Approfondimenti

6.13.1 Integrale curvilineo di una forma differenziale lineare esteso a una curva orientata generalmente regolare, semplice e aperta o chiusa.

Consideriamo una forma differenziale lineare in tre variabili:

$$X(x,y,z)\,dx + Y(x,y,z)\,dy + Z(x,y,z)\,dz$$

con i coefficienti X, Y, Z **continui** in un insieme A dello spazio (O,x,y,z).
Consideriamo anche il campo vettoriale

$$\mathbf{v} = (X,Y,Z) \equiv X(x,y,z)\,\mathbf{i} + Y(x,y,z)\,\mathbf{j} + Z(x,y,z)\,\mathbf{k},$$

e ricordiamo che, $\forall P = (x,y,z) \in A$ e $\forall dP = (dx,dy,dz) \in \mathbb{R}^3$, risulta

$$X(x,y,z)\,dx + Y(x,y,z)\,dy + Z(x,y,z)\,dz = \mathbf{v}(P) \times dP.$$

Consideriamo una curva Γ dello spazio (O,x,y,z) contenuta in A, 1) **generalmente regolare** 2) **semplice**, 3) **aperta**.
Consideriamo una rappresentazione parametrica generalmente regolare e semplice di Γ:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \qquad t \in [a,b] \\ z = z(t) \end{cases} \tag{6.13.1}$$

(N.B. L'intervallo base è compatto poichè Γ è una curva aperta.)
Consideriamo due punti distinti di Γ, P' e P''; in particolare P' e P'' potrebbero essere anche gli estremi di Γ. Indichiamo con $\Gamma(P',P'')$ l'arco di Γ di estremi P' e P''. Si pone per definizione:

$$(\Gamma)\int_{P'}^{P''} X dx + Y dy + Z dz \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \int_{t'}^{t''} \left[X(P(t))\,x'(t) + Y(P(t))\,y'(t) + Z(P(t))\,z'(t)\right] dt \tag{6.13.2}$$

essendo t' e t'' i valori del parametro che corrispondono ai punti P' e P'' (e che sono univocamente determinati perchè la rappresentazione (6.13.1) è una rappresentazione semplice di una curva aperta).
Equivalentemente, posto $P(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad \forall t \in [a,b]$, si pone per definizione:

$$(\Gamma)\int_{P'}^{P''} \mathbf{v} \times dP \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t'}^{t''} \left[\mathbf{v}(P(t)) \times P'(t)\right] dt. \tag{6.13.3}$$

L'integrale

$$(\Gamma)\int_{P'}^{P''} Xdx + Ydy + Zdz,$$

definito mediante l'equazione (6.13.2), si chiama **l'integrale curvilineo della forma differenziale $Xdx + Ydy + Zdz$ esteso all'arco $\Gamma(P', P'')$ orientato nel verso che va da P' a P''**.
L'integrale

$$(\Gamma)\int_{P'}^{P''} \mathbf{v} \times dP,$$

definito mediante l'eguaglianza (6.13.3), si chiama **l'integrale curvilineo del prodotto scalare del vettore $\mathbf{v}(P)$ esteso all'arco $\Gamma(P', P'')$ orientato nel verso che va da P' a P''**, oppure **il lavoro del vettore P nello spostamento del punto P da P' a P'' lungo Γ**.
Si noti che, poichè i secondi membri delle (6.13.2) e (6.13.3) sono uguali, gl'integrali a 1^o membro delle (6.13.2) e (6.13.3), i.e. gli integrali

$$(\Gamma)\int_{P'}^{P''} Xdx + Ydy + Zdz \qquad \text{e} \qquad (\Gamma)\int_{P'}^{P''} \mathbf{v} \times dP$$

sono notazioni diverse di uno stesso numero reale.
Si noti ancora che l'integrale definito a 2^o membro della (6.13.2) (e quindi anche quello a 2^o membro della (6.13.3) ha senso perchè la funzione integranda è generalmente continua e limitata nell'intervallo compatto di estremi t' e t'' (dato che le sue discontinuità possono essere solo di 1^a specie) e quindi sommabile in tale intervallo compatto.
Si noti ancora che t' e t'' sono i valori del parametro che corrispondono a P' e P'', e quindi t' non è tenuto a essere minore di t''; inoltre t' risulterà minore di t'' quando e solo quando il verso che va da P' a P'' coincide con il verso delle t crescenti relativo alla rappresentazione parametrica (6.13.1).
L'arco $\Gamma(P', P'')$ si chiama **curva d'integrazione** o **cammino d'integrazione** degl'integrali curvilinei considerati.

• • •

Consideriamo una curva Γ dello spazio (O, x, y, z) contenuta in A 1) generalmente regolare 2) semplice 3) chiusa. Consideriamo anche una rappresentazione parametrica generalmente regolare e semplice di Γ:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad t \in [a, b] \tag{6.13.4}$$

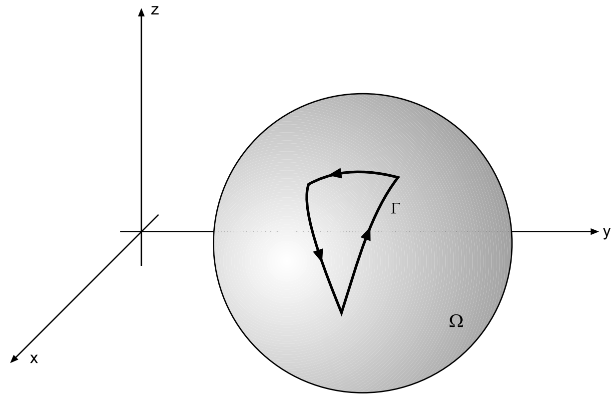

Figura 6.18: Γ, curva dello spazio (O, x, y, z) contenuta in A generalmente regolare, semplice e chiusa.

Fissiamo su Γ un verso positivo non necessariamente coincidente col verso delle t crescenti relativo alla (6.13.4) (e cioè col verso positivo indotto su Γ dalla (6.13.4)), e indichiamo con ${}^{+}\Gamma$ la curva Γ orientata nel verso positivo fissato, e con ${}^{-}\Gamma$ la curva Γ orientata nel verso opposto.
Si pone allora pre definizione:

$$\int_{+\Gamma} Xdx + Ydy + Zdz =$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \pm \int_a^b \left[X\left(P\left(t\right)\right)x'\left(t\right) + Y\left(P\left(t\right)\right)y'\left(t\right) + Z\left(P\left(t\right)\right)z'\left(t\right)\right]dt$$

dove a 2^o membro va scelto il segno $+$ quando il verso positivo fissato su Γ coincide col verso delle t crescenti relativo alla rappresentazione (6.13.4); il segno $-$ in caso contrario.
Equivalentemente, posto $P\left(t\right) = \left(x\left(t\right), y\left(t\right)\right), z\left(t\right) \quad \forall t\left[a, b\right]$, si pone per definizione

$$\int_{+\Gamma} \mathbf{v} \times dP \stackrel{\text{def}}{=} \pm \int_a^b \left[v\left(P\left(t\right)\right) \times P'\left(t\right)\right]dt \tag{6.13.5}$$

dove $\pm$ vanno scelti col criterio prima precisato.
Gli integrali definiti mediante le eguaglianze (6.13.4) e (6.13.5) hanno nomi analoghi a quelli introdotti quando il cammino d'integrazione è una curva aperta; in più, ora che Γ è una curva chiusa, l'integrale

$$\int_{+\Gamma} \mathbf{v} \times dP$$

si chiama (oltre che lavoro del vettore $\mathbf{v}\,/P$) quando P si sposta su Γ nel verso positivo fissato) anche **circuitazione del vettore $\mathbf{v}\,/P$) lungo la curva chiusa Γ orientata nel verso positivo fissato**.
Quando si vuol mettere in rilievo che Γ è una curva chiusa, gli integrali curvilinei, definiti mediante le eguaglianze (6.13.4) e (6.13.5), vengono denotati con i simboli

$$\oint\limits_{^{+}\Gamma} Xdx + Ydy + Zdz \qquad , \qquad \oint\limits_{^{+}\Gamma} \mathbf{v} \times dP$$

Ovviamente l'integrale curvilineo della forma differenziale $Xdx + Ydy + Zdz$ esteso alla curva chiusa orientata $^{+}\Gamma$ può essere **equivalentemente** definito come la somma degli integrali curvilinei della forma differenziale considerata estesi alle due curve aperte orientate nelle quali la curva chiusa orientata $^{+}\Gamma$ è decomposta da due punti distinti P' e P'' di essa fissati ad arbitrio.

Osservazione 76 Le definizione date sono lecite perchè si dimostra che l'integrale curvilineo di una forma differenziale esteso a una curva aperta orientata o a una curva chiusa orientata **non dipende** dalla particolare rappresentazione parametrica, generalmente regolare e semplice, che si utilizza per definirlo.

Osservazione 77 Dalle definizioni date segue che:

$$(\Gamma)\int\limits_{P'}^{P''} Xdx + Ydy + Zdz = -\,(\Gamma)\int\limits_{P''}^{P'} Xdx + Ydy + Zdz$$

$$\oint\limits_{^{+}\Gamma} Xdx + Ydy + Zdz = -\oint\limits_{^{-}\Gamma} Xdx + Ydy + Zdz$$

Dunque l'**integrale curvilineo di una forma differenziale**, a differenza di quanto accade per l'integrale curvilineo di una funzione reale, i.e. per l'integrale denotato col simbolo $\int\limits_{\Gamma} f\,(P)\,ds$, **dipende dal verso fissato sul cammino d'integrazione**.

Si dimostra la seguente proposizione sulla relazione tra l'integrale curvilineo di una forma differenziale e l'integrale curvilineo di una funzione:

Proposizione 12 *Valgono le seguenti formule:*

$$(\alpha) \quad (\Gamma)\int\limits_{P'}^{P''} \mathbf{v} \times dP = \int\limits_{\Gamma(P',P'')} [\mathbf{v}\,(P) \times \mathbf{t}\,(P)]\,ds$$

$$(\beta) \quad \oint\limits_{\Gamma} \mathbf{v} \times dP = \int\limits_{\Gamma} [v\,(P) \times t\,(P)]\,ds$$

avendo indicato con $\mathbf{t}\,(P)$ *il versore tangente positivo alla curva* Γ *nel punto* P *relativo al verso fissato sulla curva* Γ.
In altri termini l'integrale curvilineo del prodotto scalare $\mathbf{v} \times dP$ *esteso a una curva orientata risulta eguale all'integrale curvilineo esteso a tale curva della componente del vettore* $\mathbf{v}\,(P)$ *secondo l'asse tangente positivo alla curva in* P *relativo al verso fissato sulla curva.*

Dimostrazione — 1^o **caso** : Il verso che va da P' a P'' coincide con quello delle t crescenti relativo alla rappresentazione parametrica (generalmente regolare e semplice)

$$\begin{cases} x = x\,(t) \\ y = y\,(t) \\ z = z\,(t) \end{cases} \qquad t \in [a,b] \tag{6.13.6}$$

In tal caso risulta: $t' < t''$ e $\mathbf{t}\,(P\,(t)) = \frac{P'(t)}{|P'(t)|}$ generalmente in $[a,b]$.
Pertanto si ha:

$$\int\limits_{\Gamma(P',P'')} [\mathbf{v}\,(P) \times \mathbf{t}\,(P)]\, ds \overset{\text{teorema}}{=} \int\limits_{\min\{t',t''\}}^{\max\{t',t''\}} [\mathbf{v}\,(P\,(t)) \times \mathbf{t}\,(P\,(t))] \left|P'\,(t)\right| dt =$$

$$= \int\limits_{t'}^{t''} \left[\mathbf{v}\,(P\,(t)) \times \frac{P'\,(t)}{|P'\,(t)|}\right] \left|P'\,(t)\right| dt = \int\limits_{t'}^{t''} \left[\mathbf{v}\,(P\,(t)) \times P'\,(t)\right] dt =$$

$$\overset{\text{def}}{=} (\Gamma) \int\limits_{P'}^{P''} \mathbf{v} \times dP.$$

2^o **caso** : Il verso che va da P' a P'' coincide con quello delle t decrescenti relativo alla rappresentazione (6.13.6).
In tal caso risulta: $t' > t''$ e $\mathbf{t}\,(P\,(t)) = -\frac{P'(t)}{|P'(t)|}$ generalmente in $[a,b]$.
Pertanto si ha:

$$\int\limits_{\Gamma(P',P'')} [\mathbf{v}\,(P) \times \mathbf{t}\,(P)]\, ds \overset{\text{teorema}}{=} \int\limits_{\min\{t',t''\}}^{\max\{t',t''\}} [\mathbf{v}\,(P\,(t)) \times \mathbf{t}\,(P\,(t))] \left|P'\,(t)\right| dt =$$

$$= \int\limits_{t''}^{t'} \left[\mathbf{v}\,(P\,(t)) \times \left(-\frac{P'\,(t)}{|P'\,(t)|}\right)\right] \left|P'\,(t)\right| dt = \int\limits_{t'}^{t''} \left[\mathbf{v}\,(P\,(t)) \times P'\,(t)\right] dt =$$

$$\overset{\text{def}}{=} (\Gamma) \int\limits_{P'}^{P''} \mathbf{v} \times dP.$$

□

Osservazione 78 In virtù delle formule (α) e (β), poichè l'integrale curvilineo di una funzione reale non dipende dalla particolare rappresentazione parametrica che si considera della curva d'integrazione, si ha che anche l'integrale curvilineo di una forma differenziale non dipende dalla particolare rappresentazione parametrica (generalmente regolare e semplice) che si utilizza per definirlo.
Sempre per le formule (α) e (β), poichè l'integrale curvilineo di una funzione gode della proprietà additiva, si ha che anche l'integrale curvilineo di una forma differenziale gode della proprietà additiva

Osservazione 79 Eliminando nella teoria precedente la funzione $Z(x, y, z)$, la variabile z dalle funzioni $X(x, y, z)$ e $Y(x, y, z)$ e la funzione $z(t)$ dalle rappresentazioni parametriche considerate, si ottiene *la teoria dell'integrale curvilineo di una forma differenziale lineare in due variabili*, i.e. del tipo

$$X(x, y)\, dx + Y(x, y)\, dy$$

esteso a una curva Γ del piano (O, x, y) generalmente regolare, semplice e aperta o chiusa. C'è però da osservare che, quando Γ è una curva generalmente regolare, semplice e chiusa del piano (O, x, y), il verso positivo su Γ non si fissa ad arbitrio come si fa per una curva generalmente regolare e chiusa dello spazio (O, x, y), ma si fissa con una convenzione ben precisa espressa dalla seguente

Definizione 73 *Sia Γ una curva generalmente regolare, semplice e chiusa del piano (O, x, y). Si chiama* ***verso positivo su*** Γ *il verso su Γ che lascia alla sinistra i punti interni a Γ.*
Conseguentemente, se Γ è una curva generalmente regolare, semplice e chiusa del piano (O, x, y), il simbolo ${}^{+}\Gamma$ indica la curva Γ orientata nel verso che lascia alla sinistra i punti interni a Γ, il simbolo ${}^{-}\Gamma$ indica la curva Γ orientata nel verso opposto.

Osservazione 80 Si noti che la definizione precedente è fondata sulla nozione di punto interno a una curva chiusa del piano (O, x, y), nozione questa fondata a sua volta sul teorema di Jordan per le curve chiusa del piano (O, x, y). Pertanto non avrebbe alcun senso voler estendere la definizione precedente a una curva Γ generalmente regolare, semplice e chiusa dello spazio (O, x, y, z). E' proprio per questa ragione che il verso positivo su una curva Γ generalmente regolare, semplice e chiusa dello spazio (O, x, y, z) si fissa ad arbitrio.

6.14 Forme differenziali esatte e campi vettoriale conservativi di classe C^0.

6.14.1 Forme differenziali esatte in due variabili.

Sia

$$X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy \tag{6.14.1}$$

una forma differenziale lineare di classe C^0 nell'aperto connesso Ω di $\mathbb{R}^2$.
Sia poi

$$\mathbf{v}(P) = X(P)\,\mathbf{i} + Y(P)\,\mathbf{j} \qquad \forall P \in \Omega \tag{6.14.2}$$

Si dice che **la (6.14.1) è esatta** oppure che **il campo vettoriale (6.14.2) è un campo conservativo**, se esiste una funzione reale $U(x,y)$ di classe C^1 in Ω tale che

$$\frac{\partial U}{\partial x}(P) = X(P) \quad \frac{\partial U}{\partial y}(P) = Y(P) \qquad \forall P \in \Omega$$

ovvero:

$$\operatorname{grad} U(P) = \mathbf{v}(P) \qquad \forall P \in \Omega$$

La funzione U dicesi allora **una primitiva della (6.14.1)** oppure **un potenziale scalare del campo vettoriale (6.14.2)**.

Teorema 6.9 *Se la (6.14.1) è esatta e se U è una sua primitiva, tutte e sole le primitive della (6.14.1) sono le funzioni reali del tipo $U(x,y) + c$, essendo c una costante reale arbitraria.*

Dimostrazione — Evidentemente, qualunque sia la costante reale c, $U(x,y)+c$ è una primitiva della (6.14.1), risultando:

$$\forall P \in \Omega \qquad \frac{\partial (U_1 - U)}{\partial x}(P) = \frac{\partial U_1}{\partial x}(P) - \frac{\partial U}{\partial x}(P) = X(P) - X(P) = 0$$

$$\forall P \in \Omega \qquad \frac{\partial (U_1 - U)}{\partial y}(P) = \frac{\partial U_1}{\partial y}(P) - \frac{\partial U}{\partial y}(P) = Y(P) - Y(P) = 0$$

e tenendo conto che l'aperto Ω è un connesso, una conseguenza del teorema di Lagrange garantisce l'esistenza di una costante reale c tale che $\forall P \in \Omega$:

$$U_1 - U = c$$

Per ogni coppia di punti distinti di Ω, P' e P'', denotiamo con $\mathcal{F}(P', P'')$ la classe delle curve aperte generalmente regolari incluse in Ω di estremi P' e P'', orientate nel verso che va da P' a P''. Detta classe è non vuota, dal momento che, essendo Ω un aperto connesso, esiste almeno una poligonale semplice di estremi P' e P'' (che è una curva generalmente regolare aperta in base a quanto stabilito in precedenza) contenuta in Ω. □

6.14.2 Forme differenziali esatte in tre variabili.

Consideriamo tre funzioni reali di tre variabili reali

$$X(x,y,z)\,, Y(x,y,z)\,, Z(x,y,z)$$

definite in un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^3$.
Consideriamo poi la seguente funzione:

$$X(P)\,dx + Y(P)\,dy + Z(P)\,dz, \tag{6.14.3}$$

la quale è una funzione delle 6 variabili

$$x, y, z, dx, dy, dz$$

definita in $A \times \mathbb{R}^3$.
La funzione (6.14.3) si chiama una forma **differenziale lineare in tre variabili**; le funzioni

$$X(x,y,z)\,, Y(x,y,z)\,, Z(x,y,z)$$

si chiamano **i coefficienti** della forma differenziale lineare (6.14.3).
Si noti che una forma differenziale lineare in tre variabili è in realtà una funzione di 6 variabili reali.
Il campo vettoriale:

$$\mathbf{v} = (X,Y,Z) \equiv X(x,y,z)\,\mathbf{i} + Y(x,y,z)\,\mathbf{j} + Z(x,y,z)\,\mathbf{k} \tag{6.14.4}$$

si chiama **il campo vettoriale associato alla forma differenziale lineare (6.14.3)**; viceversa la forma differenziale lineare (6.14.3) si chiama **la forma differenziale lineare associata al campo vettoriale (6.14.4)**.
Si noti che $\forall P = (x,y,z) \in A$ e $\forall dP = (dx,dy,dz) \in \mathbb{R}^3$ risulta;

$$X(x,y,z)\,dx + Y(x,y,z)\,dy + Z(x,y,z)\,dz = \mathbf{v}(P) \times dP$$

Di grande importanza è il seguente teorema che esprime *una condizione necessaria affinchè una forma differenziale lineare sia esatta espressa con una proprietà del suo integrale curvilineo.*

Teorema 6.10 *Consideriamo una forma differenziale lineare*

$$Xdx + Ydy + Zdz \tag{6.14.5}$$

con coefficienti continui in un aperto connesso Ω dello spazio (O,x,y).
Vale la seguente implicazione:

$$\left(\begin{array}{l}\text{La forma differenziale}\\ Xdx+Ydy+Zdz\\ \text{è esatta in }\Omega\end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l}\forall P' \text{ e } P'' \text{ con } P' \neq P'' \text{ risulta:}\\ (\Gamma)\displaystyle\int_{P'}^{P''} Xdx+Ydy+Zdz = U(P'')-U(P')\end{array}$$

essendo U una qualsiasi primitiva della (6.14.5) e Γ una qualsiasi curva ***generalmente regolare, semplice e aperta*** *passante per P' e P'', contenuta in Ω.*
(NB: curve Γ di tale tipo esistono perchè Ω è un aperto connesso).
Conseguentemente, ***se la forma differenziale (6.14.5) è esatta in*** Ω,

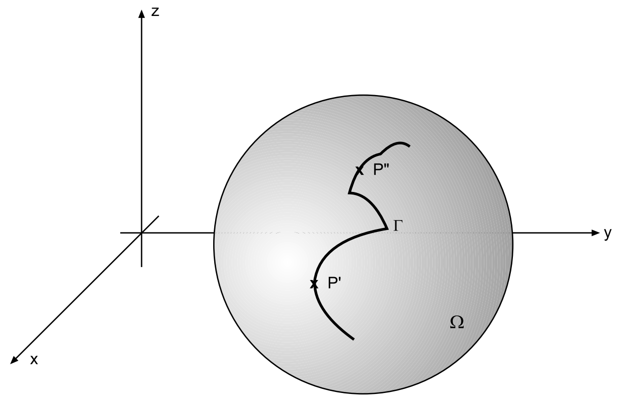

Figura 6.19: Rappresentazione grafica di Ω, Γ, P' e P''.

$\forall P'$ e $P'' \in \Omega$ con $P' \neq P''$, l'integrale curvilineo

$$(\Gamma) \int_{P'}^{P''} X dx + Y dy + Z dz$$

è ***indipendente*** *dalla particolare curva Γ generalmente regolare, semplice e chiusa contenuta in Ω, l'integrale curvilineo della forma differenziale (6.14.5) esteso alla curva chiusa Γ, orientata in un verso positivo fissato a piacere, è nullo.*

Dimostrazione — Consideriamo due punti distinti di Ω, P' e P'', una curva Γ generalmente regolare, semplice e aperta passante per P' e P'' e contenuta in Ω, e consideriamo una primitiva $U(x, y, z)$ della forma differenziale (6.14.5). Consideriamo poi una rappresentazione parametrica generalmente regolare semplice di Γ:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad t \in [a, b]$$

Diciamo t' e t'' i valori del parametro t corrispondenti ai punti P' e P'', sicchè risulta:

$$P' = P(t') \text{ e } P'' = P(t'') .$$

Si vede subito ora che la funzione

$$U\left(x\left(t\right),y\left(t\right),z\left(t\right)\right) \tag{6.14.6}$$

è una primitiva generalizzata nell'intervallo $[a,b]$ della funzione

$$X\left(x,y,z\right)x'\left(t\right)+Y\left(x,y,z\right)y'\left(t\right)+Z\left(x,y,z\right)z'\left(t\right) \tag{6.14.7}$$

Infatti la funzione (6.14.6) è certamente continua in $[a,b]$ perchè composta mediante funzioni continue; inoltre poichè le funzioni $x\left(t\right),y\left(t\right),z\left(t\right)$ sono generalmente derivabili in $[a,b]$, per il teorema di derivazione delle funzioni composte scalari di una variabile reale, anche la (6.14.6) è generalmente derivabile in $[a,b]$ e si ha:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}U\left(x\left(t\right),y\left(t\right),z\left(t\right)\right)&=\frac{\partial U}{\partial x}x'\left(t\right)+\frac{\partial U}{\partial y}y'\left(t\right)+\frac{\partial U}{\partial z}z'\left(t\right)=\\&=X\left(x,y,z\right)x'\left(t\right)+Y\left(x,y,z\right)y'\left(t\right)+Z\left(x,y,z\right)z'\left(t\right)\end{aligned}$$

generalmente in $[a,b]$. quindi effettivamente la (6.14.6) è una primitiva generalizzata della (6.14.7).
Conseguentemente risulta:

$$\begin{aligned}&(\Gamma)\int_{P'}^{P''}Xdx+Ydy+Zdz\overset{\text{def}}{=}\\&=\int_{t'}^{t''}\left[X\left(x,y,z\right)x'\left(t\right)+Y\left(x,y,z\right)y'\left(t\right)+Z\left(x,y,z\right)z'\left(t\right)\right]dt=\\&=U\left(x\left(t''\right),y\left(t''\right),z\left(t''\right)\right)-U\left(x\left(t'\right),y\left(t'\right),z\left(t'\right)\right)=U\left(P''\right)-U\left(P'\right)\end{aligned}$$

Naturalmente abbiamo tenuto presente la formula fondamentale del calcolo integrale per funzioni generalmente continue in un intervallo. Si noti che per applicare, come noi abbiamo fatto, il teorema di derivazione delle funzioni composte alla funzione $U\left(x\left(t\right),y\left(t\right),z\left(t\right)\right)$, occorre sapere che la componente esterna, i.e. la funzione $U\left(x,y,z\right)$, è differenziabile in Ω. Che cosa ci assicura tale proprietà? Ce lo assicura in fatto che, essendo

$$\frac{\partial U}{\partial x}=X,\frac{\partial U}{\partial y}=Y,\frac{\partial U}{\partial z}=Z$$

in Ω con X,Y,Z continui in Ω per ipotesi, la funzione $U\left(x,y,z\right)$ è dotata di derivate parziali prime continue in Ω, e quindi, essendo Ω aperto, essa è differenziabile in Ω. □

Il teorema 6.10 è in un certo senso invertito dal teorema seguente che fornisce *la condizione sufficiente affinchè una forma differenziale lineare sia esatta espressa con una proprietà del suo integrale curvilineo.*

Teorema 6.11 *Consideriamo una forma differenziale lineare*

$$Xdx + Ydy + Zdz \tag{6.14.8}$$

con ***coefficienti continui*** *in un* ***aperto connesso*** Ω *dello spazio* (O, x, y, z). *Vele la seguente implicazione:*

$$\left(\begin{array}{l} \forall P' \text{ e } P'' \in \Omega \text{ con } P' \neq P'' \\ (\Gamma) \displaystyle\int\limits_{P'}^{P''} Xdx + Ydy + Zdz \text{ è} \\ \textit{indipendente da } \Gamma \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{l} \text{1) } \textit{la forma differenziale} \\ Xdx + Ydy + Zdz \text{ è esatta} \\ \text{2) } \forall P_0 \in \Omega \textit{ la funzione} \\ U : P \in \Omega \to \displaystyle\int\limits_{P_0}^{P} Xdx + Ydy + Zdz \\ \textit{è una primitiva in } \Omega \textit{ della forma} \\ \textit{differenziale } Xdx + Ydy + Zdz \\ [\textit{con la convenzione} \\ \displaystyle\int\limits_{P_0}^{P_0} Xdx + Ydy + Zdz = 0] \end{array}\right)$$

Dimostrazione — Faremo veder che, considerata la funzione U del punto 2) della tesi, risulta

$$\frac{\partial U}{\partial x} = X, \frac{\partial U}{\partial y} = Y, \frac{\partial U}{\partial z} = Z$$

in Ω. Con ciò resterà dimostrato il punto 2) della tesi, e quindi anche il punto 1) della tesi.
Facciamo vedere, ad esempio, che risulta

$$\frac{\partial U}{\partial x} = X \text{ in } \Omega.$$

Fissiamo a piacere un punto $P_1 = (x_1, y_1, z_1) \in \Omega$. Dobbiamo far vedere che risulta

$$\frac{\partial U}{\partial x}(P_1) = X$$

i.e. che:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{U(x_1 + \Delta x, y_1, z_1) - U(x_1, y_1, z_1)}{\Delta x} = X(x_1, y_1, z_1).$$

A tale scopo, detto Δx un incremento della variabile x piccolo in modo tale che il segmento di estremi $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_1 + \Delta x, y_1, z_1)$ sia contenuto in Ω, osserviamo che si ha:

$$\frac{U(x_1+\Delta x, y_1, z_1) - U(x_1, y_1, z_1)}{\Delta x} = \frac{U(P_2) - U(P_1)}{\Delta X} =$$
$$= \frac{\int\limits_{P_0}^{P_2} X dx + Y dy + Z dz - \int\limits_{P_0}^{P_1} X dx + Y dy + Z dz}{\Delta x} =$$
$$= \frac{\int\limits_{P_0}^{P_2} X dx + Y dy + Z dz + \int\limits_{P_1}^{P_0} X dx + Y dy + Z dz}{\Delta x} = \frac{\int\limits_{P_1}^{P_2} X dx + Y dy + Z dz}{\Delta x}.$$

Per calcolare l'integrale

$$\int\limits_{P_1}^{P_2} X dx + Y dy + Z dz,$$

poichè per l'ipotesi del teorema esso è indipendente dalla particolare curva Γ passante per P_1 e P_2 contenuta in Ω, possiamo servirci della più semplice curva passante per P_1 e P_2 e contenuta in Ω, e cioè del segmento P_1P_2. tale segmento è parallelo all'asse x e ammette ovviamente la seguente

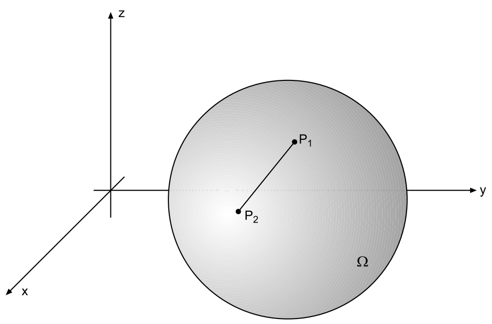

Figura 6.20: Segmento P_1P_2 contenuto in Ω.

rappresentazione parametrica (supposto $\Delta x > 0$ per fissare le idee):

$$\begin{cases} x = t \\ y = y_1 \\ z = z_1 \end{cases} \qquad t \in [x_1, x_1 + \Delta x]$$

Conseguentemente risulta:

$$\int_{P_1}^{P_2} X dx + Y dy + Z dz \overset{\text{def}}{=}$$

$$\overset{\text{def}}{=} \int_{x_1}^{x_2} \left[X(t, y_1, z_1) \overbrace{x'(t)}^{=1} + Y(t, y_1, z_1) \overbrace{y'(t)}^{=0} + Z(t, y_1, z_1) \overbrace{z'(t)}^{=0} \right] dt =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} X(t, y_1, z_1)\, dt \overset{\text{teo. della media}}{=} X(x_1 + \vartheta \Delta x, y_1, z_1) \Delta x$$

con ϑ opportuno numero di $[0, 1]$.
Quindi si ha:

$$\frac{U(x_1 + \Delta x, y_1, z_1) - U(x_1, y_1, z_1)}{\Delta x} = \frac{X(x_1 + \vartheta \Delta x, y_1, z_1) \Delta x}{\Delta x} = X(x_1 + \vartheta \Delta x, y_1, z_1)$$

passando al limite tale eguaglianza per $\Delta x \to 0$, e tenendo presente che la funzione $X(x, y, z)$ è continua nel punto $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, si ottiene l'eguaglianza

$$\frac{\partial U}{\partial x}(P_1) = X(P_1).$$

Poichè P_1 è stato fissato a piacere in Ω, si ha:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = X \text{ in } \Omega;$$

con ragionamenti analoghi si vede che risulta

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Y \text{ e } \frac{\partial U}{\partial z} = Z \text{ in } \Omega$$

Da queste stesse eguaglianze, essendo X, Y, Z continui in Ω per ipotesi, segue che la funzione U ha derivate parziali continue in Ω, e quindi, essendo Ω aperto, è differenziabile in Ω, e quindi è anche continua in Ω, come richiesto nella definizione di primitiva.
Con ciò resta dimostrato il punto 2) della tesi, e quindi anche il punto 1) della tesi.
Il teorema è completamente dimostrato. □

Dai teoremi 6.10 e 6.11 si deduce banalmente il seguente teorema che esprime la condizione necessaria e sufficiente affinchè una forma differenziale sia esatta espressa con una proprietà del suo integrale curvilineo:

Teorema 6.12 *Consideriamo una forma differenziale lineare*

$$Xdx + Ydy + Zdz \tag{6.14.9}$$

con coefficienti continui in un aperto connesso Ω dello spazio (O, x, y, z) allora le seguenti 3 proprietà sono equivalenti:

1. *La forma differenziale lineare $Xdx + Ydy + Zdz$ è esatta in Ω.*

2. *$\forall P'$ e $P'' \in \Omega$ con $P' \neq P''$ l'integrale curvilineo*

$$(\Gamma) \int_{P'}^{P''} Xdx + Ydy + Zdz$$

   è indipendente da Γ (e quindi dipende solo dagli estremi e dal verso del cammino d'integrazione).

3. *$\forall$ curva Γ generalmente regolare, semplice e chiusa contenuta in Ω risulta*

$$\oint_{+\Gamma} Xdx + Ydy + Zdz = 0,$$

   avendo indicato con ${}^{+}\Gamma$ la curva Γ orientata in un verso positivo fissato a piacere.

Quest'ultimo teorema può essere rienunciato come segue (condizione necessaria e sufficiente affinchè un campo vettoriale sia conservativo.)

Teorema 6.13 *Consideriamo un campo vettoriale a tre componenti*

$$\mathbf{v} = (X, Y, Z) \equiv X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$$

continuo in un aperto connesso Ω dello spazio (O, x, y, z).
Le seguenti 3 proprietà sono equivalenti:

1. *Il campo vettoriale $\mathbf{v}$ è conservativo (nel senso che deriva da un potenziale scalare)*

2. *$\forall P'$ e $P'' \in \Omega$ con $P' \neq P''$ l'integrale curvilineo*

$$(\Gamma) \int_{P'}^{P''} \mathbf{v} \times dP.$$

   è indipendente da Γ, e cioè il lavoro di $\mathbf{v}\,(P)$ nello spostamento di P da P' a P'' lungo Γ è indipendente da Γ.

3. *$\forall$ curva Γ generalmente regolare, semplice e chiusa contenuta in Ω risulta*
$$\oint_{+\Gamma} \mathbf{v} \times dP = 0,$$
i.e. la circuitazione (o il lavoro) del vettore $\mathbf{v}(P)$ lungo la curva chiusa Γ, orientata in un verso positivo fissato a piacere, è nulla.

• • •

Per semplicità enunceremo e dimostreremo alcuni teoremi per le forme differenziali lineari in due variabili. Poi estenderemo per analogia tali risultati alle forme differenziali lineari in tre variabili.
Avvertiamo anche che, per certi motivi che saranno chiari in seguito, nei teoremi che seguono, **non** è né necessario, né opportuno supporre che l'aperto Ω che si considera sia connesso.

Definizione 74 *Sia*
$$X(P)\,dx + Y(P)\,dy \tag{6.14.10}$$
una forma differenziale lineare di classe C^1 in un aperto Ω di $\mathbb{R}^2$.
Sia
$$\mathbf{v}(P) = X(P)\,\mathbf{i} + Y(P)\,\mathbf{j} \qquad \forall P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$$
Si dice che la forma differenziale (6.14.10) è ***chiusa*** *se il campo vettoriale* $\mathbf{v}$ *è irrotazionale, i.e. se:*
$$X_y(P) = Y_x(P) \qquad \forall P = (x, y) \in \Omega.$$

Sussiste la il seguente teorema che stabilisce la **condizione necessaria affinchè una forma differenziale lineare in due variabili sia esatta espressa con le *derivate incrociate* dei coefficienti**

Teorema 6.14 *Consideriamo una forma differenziale lineare in due variabili*
$$X dx + Y dy$$
con coefficienti continui in un aperto Ω del piano (O, x, y). Supponiamo che le derivate
$$\frac{\partial X}{\partial y} \text{ e } \frac{\partial Y}{\partial x}$$
esistano e siano continue in Ω.
Vale allora la seguente implicazione:
$$\left(\begin{array}{l}\text{La forma differenziale } X dx + Y dy \\ \text{è esatta in } \Omega\end{array}\right) \Rightarrow \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} \text{ in } \Omega$$
ossia: condizione necessaria affinchè la (6.14.10) sia esatta è che essa risulti chiusa.

Dimostrazione — Diciamo $U(x,y)$ una primitiva della (6.14.10), esistente certamente perchè la (6.14.10) è esatta.
Si ha allora per definizione di primitiva:

$$\frac{\partial X}{\partial x} = X \text{ e } \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y} = Y \text{ in } \Omega.$$

Per le ipotesi fatte sui coefficienti X e Y è lecito derivare la prima di queste eguaglianza rispetto a y e la seconda rispetto a x.
Ciò facendo si ha:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial X}{\partial y} \text{ e } \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} \text{ in } \Omega$$

Per le ipotesi fatte i secondi membri di tale eguaglianza sono continui in Ω; quindi anche i primi membri sono continui in Ω, e quindi per il teorema di Schwartz i primi membri sono eguali tra loro.
Conseguentemente si ha:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} \text{ in } \Omega$$

$\square$

Osservazione 81 La condizione

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x},$$

come si può vedere con esempi, **non è in generale anche sufficiente** ad assicurare che la forma differenziale

$$X dx + Y dy$$

sia esatta.

Esempio 47 Consideriamo ad esempio la forma differenziale lineare

$$-\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

la quale è di classe C^∞ in $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ ed è chiusa.
Detta Γ la circonferenza di centro l'origine e raggio $r > 0$ orientata nel verso antiorario, si ha:

$$\oint_{+\Gamma} \left(-\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy\right) = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{r\sin t}{r^2}(-r\sin t) + \frac{r\cos t}{r^2}(r\cos t)\right] dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

e ciò stante un teorema precedentemente visto, assicura che la forma differenziale in questione non è esatta.

Essa è però anche sufficiente ad assicurare ciò nei casi seguenti:

1^o caso: L'aperto Ω è semplicemente connesso;

2^o caso: I coefficienti X e Y sono funzioni positivamente omogenee in Ω di uno stesso grado $p \neq -1$.

3^o caso: L'aperto Ω è convesso rispetto ad un suo punto P_0

Valgono infatti i teoremi seguenti:

Teorema 6.15 (1^o caso di sufficienza) *Consideriamo una forma differenziale lineare in due variabili*

$$X dx + Y dy \tag{6.14.11}$$

con coefficienti continui in un aperto Ω del piano (O, x, y). Supponiamo che le derivate

$$\frac{\partial X}{\partial y} \text{ e } \frac{\partial Y}{\partial x} \textit{ in } \Omega$$

esistano e siano continue in Ω.
Vale la seguente implicazione:

$$\left(\begin{array}{l} 1) \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} \textit{ in } \Omega \\ 2) \Omega \textit{ è un aperto semplicemente} \\ \textit{connesso} \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{c} \textit{La forma differenziale} \\ X dx + Y dy \textit{ è esatta in } \Omega \end{array}$$

Dimostrazione — Supponiamo in un primo momento che lo stesso aperto Ω sia semplicemente connesso. Diciamo Γ una curva generalmente regolare, semplice e chiusa contenuta in Ω. Nelle ipotesi in cui ci siamo posti il do-

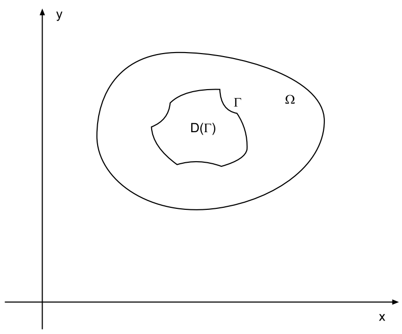

Figura 6.21: Il dominio $D(\Gamma)$.

minio $D(\Gamma)$, e cioè il dominio limitato di cui Γ è frontiera, è completamente contenuto in Ω. Pertanto le funzioni

$$X \quad , \quad Y \quad , \quad \frac{\partial X}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial Y}{\partial x}$$

sono continue nel dominio $D(\Gamma)$. Pertanto, tenendo anche presente che il dominio $D(\Gamma)$ è un dominio regolare, si può applicare al dominio $D(\Gamma)$ il teorema di Stokes nel piano e si ha:

$$\int\limits_{+F(D(\Gamma))} Xdx + Ydy = \iint\limits_{D(\Gamma)} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dxdy \overset{\text{ip. } 1)}{=} 0,$$

i.e. si ha:

$$\int\limits_{+\Gamma} Xdx + Ydy = 0.$$

Dunque abbiamo visto che comunque si fissa una curva generalmente regolare e chiusa Γ contenuta in Ω, risulta

$$\int\limits_{+\Gamma} Xdx + Ydy = 0.$$

Pertanto, per un teorema precedente, la forma differenziale (6.14.11) è esatta in Ω. Quindi il teorema è dimostrato se Ω stesso è semplicemente connesso. $\square$

Teorema 6.16 (2^o caso di sufficienza) *Consideriamo una forma differenziale lineare in due variabili*

$$Xdx + Ydy \tag{6.14.12}$$

con coefficienti continui in un aperto Ω del piano (O, x, y). Supponiamo che le funzioni X e Y siano di classe C^1 in Ω.
Vale la seguente implicazione:

$$\left(\begin{array}{l} 1)\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} \textit{ in } \Omega \\ 2) X \textit{ e } Y \textit{ sono funzioni positivamente} \\ \textit{omogenee in } \Omega \textit{ di uno stesso grado} \\ p \neq -1 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{l} \textit{1)La forma differenziale} \\ Xdx + Ydy \textit{ è esatta in } \Omega \\ \textit{2) } U(x,y) = \dfrac{xX + yY}{p+1} \\ \textit{è una primitiva di } Xdx + Ydy \\ \textit{in } \Omega \end{array}$$

Dimostrazione — Nelle ipotesi fatte si ha:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{p+1} \left[X + x\frac{\partial X}{\partial x} + y\frac{\partial Y}{\partial y} \right] \overset{\text{ip. } 1)}{=} \frac{1}{p+1} \left[X + x\frac{\partial X}{\partial x} + y\frac{\partial X}{\partial y} \right] =$$
$$\overset{\text{teo. di Eulero}}{=} \frac{1}{p+1} [X + pX] = X \text{ in } \Omega$$

In modo analogo si vede che risulta

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Y.$$

Con ciò è dimostrato il punto 2) della tesi, e quindi anche il punto 1).
Si noti che, per dimostrare l'eguaglianza $\frac{\partial U}{\partial x} = X$, si deve supporre che esista e sia continua in Ω anche la derivata $\frac{\partial U}{\partial x}$. $\square$

Allo scopo di dimostrare il 3^o **caso di sufficienza** abbisogna premettere la seguente

Definizione 75 *Si dice che Ω è un aperto **stellato** o un aperto **convesso rispetto a un punto** quando esiste un punto $P_0 \in \Omega$ tale che $\forall P \in \Omega - \{P_0\}$ il segmento P_0P è tutto contenuto in Ω.*

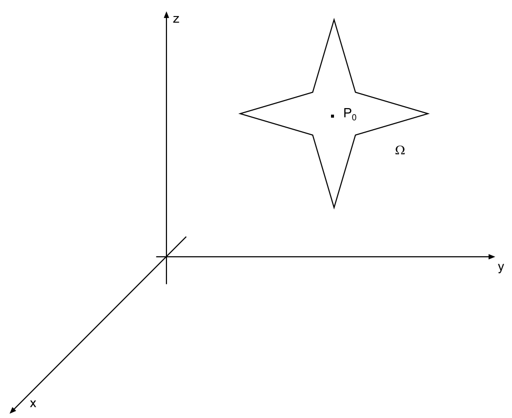

Figura 6.22: Aperto stellato Ω a forma di stella.

La parola **stellato** è suggerita dal fatto che certamente godono della proprietà precedente gli aperti a forma di stella.

Teorema 6.17 (3^o caso di sufficienza) *Se la forma differenziale*

$$Xdx + Ydy$$

è chiusa e se l'aperto Ω è convesso rispetto ad un punto $P_0 = (x_0, y_0)$, allora essa è esatta ed una sua primitiva è:

$$U(P) = (P_0P) \int_{P_0}^{P} \mathbf{v}(Q) \times dQ, \qquad \forall P = (x, y) \in \Omega$$

con la convenzione

$$(P_0P_0)\int_{P_0}^{P_0} \mathbf{v}\,(Q)\times dQ = 0$$

Dimostrazione — Sia $P=(x,y)\in\Omega-\{P_0\}$. rilevato che la funzione vettoriale

$$t\in[0,1]\to(x_0+t\,(x-x_0)\,,y_0+t\,(y-y_0))$$

è una parametrizzazione regolare del segmento P_0P il cui verso è quello che va da P_0 a P, si ha:

$$U\,(x,y)=\int_0^1[X\,(x_0+t\,(x-x_0)\,,y_0+t\,(y-y_0))\,(x-x_0)+$$
$$+Y\,(x_0+t\,(x-x_0)\,,y_0+t\,(y-y_0))\,(y-y_0)]\,dt$$

Osservato che l'uguaglianza precedente è valida anche quando $P=P_0$ (ambo i membri sono nulli) verifichiamo che

$$U_x\,(x,y)=X\,(x,y)\qquad\forall\,(x,y)\in\Omega$$

tenendo presente il teorema 5.25 di pag. 212 intanto si ha:

$$\forall\,(x,y)\in\Omega\quad U_x\,(x,y)=\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}[X\,(x_0+t\,(x-x_0)\,,y_0+t\,(y-y_0))\,(x-x_0)+$$
$$+Y\,(x_0+t\,(x-x_0)\,,y_0+t\,(y-y_0))\,(y-y_0)]\,dt=$$

$$=\int_0^1[t\,(x-x_0)\,X_x\,(x_0+t\,(x-x_0)\,,y_0+t\,(y-y_0))+$$
$$+X\,(x_0+t\,(x-x_0)\,,y_0+t\,(y-y_0))+$$
$$+t\,(y-y_0)\,Y_x\,(x_0+t\,(x-x_0)\,,y_0+t\,(y-y_0))]\,dt$$

D'altra parte si ha anche:

$$(X-x_0)\,X_x\,(x_0+t\,(x-x_0)\,,y_0+t\,(y-y_0))+$$
$$+\,(y-y_0)\,Y_x\,(x_0+t\,(x-x_0)\,,y_0+t\,(y-y_0))=$$
$$=(X-x_0)\,X_x\,(x_0+t\,(x-x_0)\,,y_0+t\,(y-y_0))+$$
$$+\,(y-y_0)\,X_y\,(x_0+t\,(x-x_0)\,,y_0+t\,(y-y_0))=$$
$$=\frac{d}{dt}X\,(x_0+t\,(x-x_0)\,,y_0+t\,(y-y_0))$$

Dunque:

$$\forall (x,y) \in \Omega \qquad U_x(x,y) = \int_0^1 \left[t \frac{d}{dt} X(x_0 + t(x-x_0), y_0 + t(y-y_0)) + \right.$$

$$\left. + X(x_0 + t(x-x_0), y_0 + t(y-y_0))(y-y_0) \right] dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{d}{dt}\left[tX(x_0 + t(x-x_0), y_0 + t(y-y_0)) \right] dt = X(x,y)$$

□

Allo stesso modo si vede che

$$U_y(x,y) = Y(x,y) \qquad \forall (x,y) \in \Omega$$

Gli aperti stellati, che sono ovviamente connessi, si dimostra che risultano anche a connessione semplice.
Pertanto il teorema 6.17 è un caso particolare del seguente:

Teorema 6.18 *Se la forma differenziale*

$$Xdx + Ydy$$

è chiusa e se l'aperto connesso Ω *è a connessione semplice, allora essa è esatta.*

Dimostrazione — Tenendo presente il teorema 6.17, si tratta di stabilire che, detta Γ una curva generalmente regolare chiusa inclusa in Ω orientata nel verso antiorario risulta:

$$\int_{+\Gamma} \mathbf{v}(P) \times dP = 0$$

infatti, visto che per ipotesi il dominio regolare limitato avente come unico contorno Γ, $D(\Gamma)$ è contenuto in Ω, utilizzando il teorema di Stokes nel piano e la definizione di forma differenziale chiusa, si ha:

$$\int_{+\Gamma} \mathbf{v}(P) \times dP = \int_{+\partial\Gamma} \mathbf{v}(P) \times dP = \iint_D [\mathrm{rot}\,\mathbf{v}(P) \times \mathbf{k}]\, dxdy = 0$$

□