

## Capitolo 7

# Superfici. Integrali superficiali.

### 7.1 Superfici regolari. Bordo di una superficie regolare.

#### 7.1.1 Superfici regolari

un sottoinsieme  $S$  di  $\mathbb{R}^3$  si chiama **superficie regolare** se è il codominio di una funzione vettoriale  $g = (g_1, g_2, g_3)$  di classe  $C^1$  in un dominio limitato, internamente connesso e misurabile  $B$  di  $\mathbb{R}^2$ , invertibile e tale che

$$g_u(u, v) \wedge g_v(u, v) \neq 0 \quad \forall (u, v) \in B \quad (7.1.1)$$

Fissato nello spazio un riferimento cartesiano  $(O, x, y, z)$   $S$  è il luogo dei punti  $P = (x, y, z)$  dello spazio tali che

$$P = O + g_1(u, v)\mathbf{i} + g_2(u, v)\mathbf{j} + g_3(u, v)\mathbf{k} \quad (u, v) \in B \quad (7.1.2)$$

ovvero

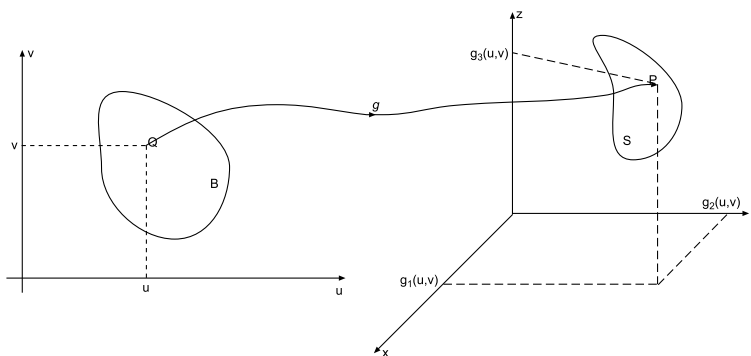


Figura 7.1: Definizione di superficie regolare.

$$\begin{cases} x = g_1(u, v) \\ y = g_2(u, v) \\ z = g_3(u, v) \end{cases} \quad (u, v) \in B \quad (7.1.3)$$

La funzione  $g$  dicesi **una parametrizzazione regolare di  $S$** .  $B$  si chiama **dominio di base**; sia la (7.1.2) che le (7.1.3) diconsì **una rappresentazione parametrica regolare di  $S$** .

Poniamo per ogni  $(u, v) \in B$ :

$$J_1(u, v) = \frac{\partial(g_2, g_3)}{\partial(u, v)}(u, v) \quad , \quad J_2(u, v) = \frac{\partial(g_3, g_1)}{\partial(u, v)}(u, v)$$

$$J_3(u, v) = \frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(u, v)}(u, v)$$

$$E(u, v) = |g_u(u, v)|^2 \quad , \quad F(u, v) = g_u(u, v) \times g_v(u, v)$$

$$G(u, v) = |g_v(u, v)|^2$$

Poichè  $\forall (u, v) \in B$

$$\begin{aligned} g_u(u, v) \wedge g_v(u, v) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ g_{1u}(u, v) & g_{2u}(u, v) & g_{3u}(u, v) \\ g_{1v}(u, v) & g_{2v}(u, v) & g_{3v}(u, v) \end{vmatrix} = \\ &= J_1(u, v) \mathbf{i} + J_2(u, v) \mathbf{j} + J_3(u, v) \mathbf{k} \end{aligned}$$

la (7.1.1) è equivalente alla seguente

$$\forall (u, v) \in B \quad J_1^2(u, v) + J_2^2(u, v) + J_3^2(u, v) > 0$$

Aggiungiamo che, detto  $\omega(u, v)$  l'angolo dei vettori  $g_u(u, v)$  e  $g_v(u, v)$ , risultando

$$\begin{aligned} |g_u(u, v) \wedge g_v(u, v)|^2 &= E(u, v) G(u, v) \sin^2 \omega(u, v) = \\ &= E(u, v) G(u, v) - (F(u, v))^2, \end{aligned}$$

la (7.1.1) equivale anche alla condizione

$$E(u, v) G(u, v) - (F(u, v))^2 > 0 \quad \forall (u, v) \in B \quad (7.1.4)$$

la (7.1.4) implica che

$$E(u, v) > 0 \quad \forall (u, v) \in B \quad (7.1.5)$$

$$G(u, v) > 0 \quad \forall (u, v) \in B \quad (7.1.6)$$

Dalla (7.1.4), (7.1.5) e (7.1.6) si deduce che, per ogni fissato  $(u, v) \in B$ , la forma quadratica

$$\Phi : (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow E(u, v) \lambda^2 + 2F(u, v) \lambda \mu + G(u, v) \mu^2$$

è definita positiva, risulta i.e.

$$E(u, v)\lambda^2 + 2F(u, v)\lambda\mu + G(u, v)\mu^2 > 0 \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \quad (7.1.7)$$

La (7.1.7) si chiama **prima forma quadratica associata alla superficie  $S$  relativa a  $g$  ed al punto  $(u, v)$** .

Rileviamo esplicitamente che a norma dei teoremi di Weierstrass e di Bolzano una superficie regolare è un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^3$  compatto e convesso.

•   •   •

Sia  $S$  una superficie regolare. Se

$$g : B \rightarrow \mathbb{R}^3$$

e

$$\vartheta : B_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

sono parametrizzazioni regolari di  $S$ , si dimostra che

$$g(\partial B) = \vartheta(\partial B_1)$$

l'immagine tramite  $g$  della frontiera di  $B$  coincide con l'immagine tramite  $\vartheta$  della frontiera di  $B_1$ .

La parte di  $S$ ,  $g(\partial B)$ , che per quanto detto sopra è indipendente da  $g$ , dicesi **bordo di  $S$**  e viene indicata con  $\Gamma(S)$ .

### 7.1.2 Piano tangente ad una superficie regolare.

Sia  $S$  una superficie regolare. Se

$$g = (g_1, g_2, g_3) : B \rightarrow \mathbb{R}^3$$

è una parametrizzazione regolare di  $S$ , per ogni  $(u, v) \in B$  il versore applicato nel punto  $P = g(u, v)$ :

$$\mathbf{n}_g(P) = \frac{g_u(u, v) \wedge g_v(u, v)}{|g_u(u, v) \wedge g_v(u, v)|}$$

si chiama **versore normale a  $S$  nel punto  $P$  relativo a  $g$** .

l'appellativo di versore normale attribuito a  $\mathbf{n}(P)$  è motivato da una proprietà geometrica di cui esso gode quando  $P \in S - \Gamma(s)$ .

Sia dunque

$$P_0 = g(u_0, v_0) \in S - \Gamma(s),$$

sicchè

$$Q_0 = (u_0, v_0) \in \overset{\circ}{B}.$$

Consideriamo una curva regolare aperta [chiusa]  $\bar{\Gamma}$  contenuta nell'interno di  $B$ , passante per  $Q_0$ , e denotiamo con  $C$  l'immagine di  $\Gamma$  tramite  $g$ . Verifichiamo che  $C$  è una curva regolare aperta [chiusa] (contenuta in  $S$  e passante per  $P_0$ ).

Supponiamo, per fissare le idee, che  $\Gamma$  sia aperta. Detta

$$\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

una parametrizzazione regolare di  $\Gamma$  e posto

$$\varphi(t_0) = Q_0,$$

consideriamo la funzione composta

$$\psi(t) = g(\varphi(t)) \quad \forall t \in [a, b]$$

la quale è di classe  $C^0$  in  $[a, b]$ , invertibile ed ha per codominio  $C$ . Poichè

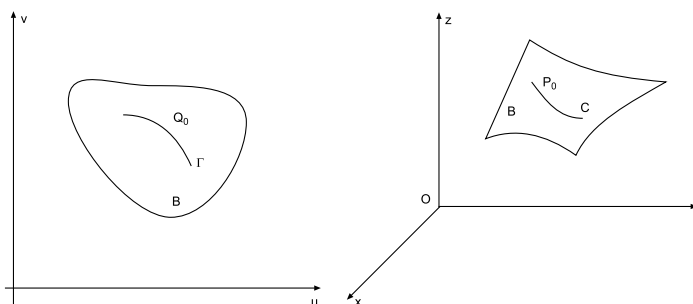


Figura 7.2: Piano tangente ad una superficie regolare.

$\forall t \in [a, b] : \varphi(t) \in \overset{\circ}{B}$ , per un teorema di derivazione delle funzioni composte  $\psi$  è derivabile in  $[a, b]$  e si ha

$$\forall t \in [a, b] \quad \psi'(t) = g_u(\varphi(t)) \varphi_1'(t) + g_v(\varphi(t)) \varphi_2'(t) \quad (7.1.8)$$

da cui si evince che  $\psi'$  è di classe  $C^0$  in  $[a, b]$ , ossia  $\psi$  è di classe  $C^1$  in  $[a, b]$ .

La (7.1.8) implica che  $\forall t \in [a, b]$ :

$$|\psi'(t)|^2 = E(\varphi(t)) (\varphi_1'(t))^2 + 2F(\varphi(t)) \varphi_1'(t) \varphi_2'(t) + G(\varphi(t)) (\varphi_2'(t))^2$$

sicchè

$$|\psi'(t)|^2 > 0 \quad \forall t \in [a, b]$$

giacchè per ogni fissato  $t \in [a, b]$  la forma quadratica

$$\Phi(\lambda, \mu) = E(\varphi(t)) \lambda^2 + 2F(\varphi(t)) \lambda \mu + G(\varphi(t)) \mu^2 \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

è definita positiva e  $\varphi'(t) = (\varphi'_1(t), \varphi'_2(t)) \neq \mathbf{0}$ .

resta così provato che  $C$  è una curva regolare aperta. La curva  $C$  prende il nome di **curva regolare tracciata su  $S$** .

Assumendo nella (7.1.8)  $t = t_0$  si ottiene:

$$\psi'(t_0) = g_u(u_0, v_0) \varphi'_1(t_0) + g_v(u_0, v_0) \varphi'_2(t_0) \quad (7.1.9)$$

La (7.1.9) ci dice che il vettore  $\psi'(t_0)$  che è tangente a  $C$  in  $P_0$ , è una combinazione lineare dei vettori  $g_u(u_0, v_0)$  e  $g_v(u_0, v_0)$ , cosicchè esso è ortogonale al vettore  $g_u(u_0, v_0) \wedge g_v(u_0, v_0)$ .

Dunque il versore  $\mathbf{n}_g(P_0)$  è normale a tutte le curve regolari tracciate su  $S$  e passanti per  $P_0$ .

**Teorema 7.1** *Sia  $S$  una superficie regolare. Se  $g : B \rightarrow \mathbb{R}^3$  e se  $\vartheta : B_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  sono parametrizzazioni regolari di  $S$ , si ha:*

$$\mathbf{n}_g(P) = \mathbf{n}_\vartheta(P) \quad \forall P \in S$$

oppure

$$\mathbf{n}_g(P) = -\mathbf{n}_\vartheta(P) \quad \forall P \in S$$

**Dimostrazione** — Omessa. □

Sia  $S$  una superficie regolare. In base al teorema 7.1, per ogni  $P \in S$  i versori normali a  $S$  in  $P$  relativi alle parametrizzazioni regolari di  $S$  o coincidono o sono opposti, pertanto essi giacciono su una stessa retta  $n(P)$  passante per  $P$ , che si chiama **retta normale a  $S$  nel punto  $P$** . Il piano  $\Pi(P)$  passante per  $P$  e perpendicolare a  $n(P)$  si chiama **piano tangente a  $S$  in  $P$** .

Se  $g : B \rightarrow \mathbb{R}^3$  è una parametrizzazione regolare di  $S$  e  $P_0 = g(u_0, v_0)$  è un punto di  $S$ ,  $\Pi(P_0)$  ha equazione cartesiana

$$J_1(u_0, v_0)(x - g_1(u_0, v_0)) + J_2(u_0, v_0)(y - g_2(u_0, v_0)) + J_3(u_0, v_0)(z - g_3(u_0, v_0)) = 0$$

## 7.2 Superfici regolari orientate.

Sia  $S$  una superficie regolare. Se  $g : B \rightarrow \mathbb{R}^3$  è una parametrizzazione regolare di  $S$ , l'insieme dei versori

$$\{\mathbf{n}_g(P) : P \in S\}$$

dicesi il **verso (di attraversamento) di  $S$  relativo a  $g$** .

Siano  $g : B \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $\vartheta : B_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametrizzazioni regolari di  $S$ . Si dice che  $g$  e  $\vartheta$  hanno **lo stesso verso [verso opposto]** se

$$\forall P \in S \quad \mathbf{n}_g(P) = \mathbf{n}_\vartheta(P) \quad [\mathbf{n}_g(P) = -\mathbf{n}_\vartheta(P)]$$

In base al teorema 7.1 due parametrizzazioni regolari qualsiasi di  $S$  o hanno lo stesso verso oppure verso opposto.

Aggiungiamo che, se  $g : B \rightarrow \mathbb{R}^3$  è una parametrizzazione regolare di  $S$ , indicato con  $B_1$  il dominio di  $\mathbb{R}^2$  simmetrico di  $B$  rispetto all'asse delle  $u$  è

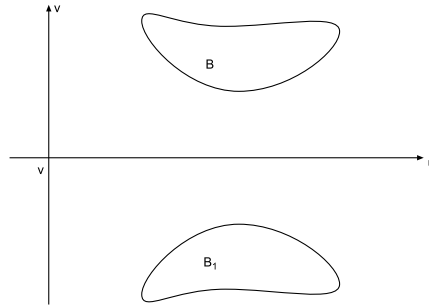


Figura 7.3: Dominio  $B_1$  simmetrico di  $B$  rispetto all'asse  $u$ .

immediato constatare che la funzione vettoriale

$$\bar{g}(\xi, \eta) = g(\xi, -\eta) \quad \forall (\xi, \eta) \in B_1$$

è una parametrizzazione regolare di  $S$  avente verso opposto a quello di  $g$ .

Sia  $S$  una superficie regolare e sia  $g : B \rightarrow \mathbb{R}^3$  una sua parametrizzazione regolare. In base a quanto è stato detto precedentemente è possibile ripartire l'insieme della parametrizzazioni regolari di  $S$  in due classi :

- $[g]$  costituita da  $g$  e dalle parametrizzazioni regolari di  $S$  aventi lo stesso verso;
- $[\bar{g}]$  costituita da  $\bar{g}$  e da tutte le parametrizzazioni regolari di  $S$  aventi verso opposto a quello di  $g$ .

I due insiemi di versori:

$$\{\mathbf{n}_\vartheta(P) : P \in S, \vartheta \in [g]\} = \{\mathbf{n}_g(P) : P \in S\}$$

$$\{\mathbf{n}_\vartheta(P) : P \in S, \vartheta \in [\bar{g}]\} = \{-\mathbf{n}_g(P) : P \in S\}$$

si chiamano **i versi (di attraversamento) di  $S$** , il primo determinato dalla classe  $[g]$ , o, più semplicemente da  $\bar{g}$ .

Orientare la superficie regolare  $S$  significa distinguere i due versi di attraversamento di  $S$  chiamando positivo uno di essi e negativo l'altro.

Il verso assunto come positivo viene indicato con  $+S$  quello negativo con  $-S$ .

Per ogni  $P \in S$  il versore normale a  $S$  in  $P$ , appartenente a  $+S$  si chiama **versore normale positivo** e viene indicato con

$$\mathbf{n}(P)$$

il suo opposto,

$$-\mathbf{n}(P)$$

si chiama **versore normale negativo**.

Ogni parametrizzazione regolare appartenente alla classe che determina  $+S$  [ $-S$ ] dicesi **una orientazione positiva [negativa] di  $S$** .

### 7.3 Superfici regolari notevoli.

#### 7.3.1 Diagrammi regolari.

Sia  $f(x, y)$  una funzione reale di classe  $C^1$  nel dominio limitato, internamente connesso e misurabile di  $B$  di  $\mathbb{R}^2$ .

Consideriamo la funzione vettoriale

$$g : (u, v) \in B \rightarrow (u, v, f(u, v))$$

la quale è ovviamente di classe  $C^1$  in  $B$ , invertibile ed ha per codominio il diagramma  $S$  di  $f$ .

Risultando, per ogni  $(u, v) \in B$ :

$$J_1(u, v) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ f_u(u, v) & f_v(u, v) \end{vmatrix} = -f_u(u, v)$$

$$J_2(u, v) = \begin{vmatrix} f_u(u, v) & f_v(u, v) \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -f_v(u, v)$$

$$J_3(u, v) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Si ha:

$$\forall (u, v) \in B \quad g_u(u, v) \wedge g_v(u, v) = -f_u(u, v) \mathbf{i} - f_v(u, v) \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

il che implica

$$\forall (u, v) \in B \quad g_u(u, v) \wedge g_v(u, v) \neq \mathbf{0}$$

Pertanto  $S$  è una superficie regolare e  $g$  ne costituisce una parametrizzazione regolare.

Tale superficie dicesi **un diagramma regolare rispetto al piano  $xy$** .

In maniera analoga si definiscono i diagrammi regolari rispetto agli altri due piani coordinati.

Detto  $P_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  un punto di  $S$ , il piano tangente a  $S$  in  $P_0$  ha equazione:

$$-f_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + z - f(x_0, y_0) = 0$$

i.e.

$$z = f(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0)$$

• • •

Sia  $\gamma$  una curva regolare aperta di  $\mathbb{R}^2$  contenuta in un piano, ad esempio nel piano  $z = 0$ .

Sia

$$\begin{cases} x = \varphi_1(u) \\ y = \varphi_2(u) \end{cases} \quad u \in [a, b]$$

una rappresentazione parametrica regolare di  $\Gamma$ .

L'insieme  $S^*$  costituito dai punti dello spazio appartenenti alla retta passanti per i punti di  $\Gamma$  e parallela all'asse  $z$  dicesi **una superficie cilindrica**. La curva  $\Gamma$  si chiama **direttrice** mentre la retta passante per i punti di  $\Gamma$  e parallela all'asse  $z$  si dicono **generatrici**. Siano  $c$  e  $d$  numeri reali con

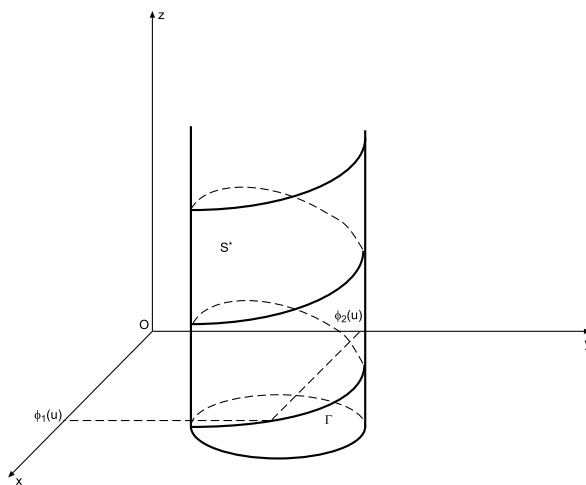


Figura 7.4: Superficie cilindrica.

$c < d$ . Denotiamo con  $S$  la parte di  $S^*$  compresa tra i piani  $z = c$  e  $z = d$ . Evidentemente il generico punto  $P$  di  $S$  ha coordinate

$$(\varphi_1(u), \varphi_2(u), v)$$

con  $(u, v) \in [a, b] \times [c, d]$ . Sicchè  $S$  è il codominio della funzione vettoriale

$$g : (u, v) \in [a, b] \times [c, d] \rightarrow (\varphi_1(u), \varphi_2(u), v)$$

la quale è di classe  $C^1$  in  $[a, b] \times [c, d]$  ed è ivi invertibile.  
Risultando per ogni  $(u, v) \in [a, b] \times [c, d]$ :

$$J_1(u, v) = \begin{vmatrix} \varphi_2'(u) & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \varphi_2'(u)$$

$$J_2(u, v) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \varphi_1'(u) & 0 \end{vmatrix} = -\varphi_1'(u)$$

$$J_3(u, v) = \begin{vmatrix} \varphi_1'(u) & 0 \\ \varphi_2'(u) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

si ha  $\forall (u, v) \in [a, b] \times [c, d]$ :

$$J_1^2(u, v) + J_2^2(u, v) + J_3^2(u, v) = (\varphi_2'(u))^2 + (\varphi_1'(u))^2 > 0$$

Dunque  $S$  è una superficie regolare e  $g$  ne costituisce una parametrizzazione regolare. Detta superficie dicesi **una superficie regolare cilindrica**.

• • •

Sia  $\Gamma$  una curva regolare aperta di  $\mathbb{R}^2$  contenuta in un semipiano, ad esempio nel semipiano  $x > 0, y = 0$ . Sia:

$$\begin{cases} x = \varphi_1(u) \\ z = \varphi_2(u) \end{cases} \quad u \in [a, b]$$

una rappresentazione parametrica regolare di  $\Gamma$ . Denotiamo con  $S$  la parte dello spazio descritta da  $\Gamma$  facendo ruotare detto semipiano intorno all'asse  $z$ , ad esempio nel verso antiorario, di un angolo  $\alpha \in ]0, 2\pi[$ .

Rilevato che  $\varphi_1(u) > 0 \quad \forall u \in [a, b]$ , osserviamo che il generico punto  $P$  di  $S$  ha coordinata

$$(\varphi_1(u) \cos v, \varphi_1(u) \sin v, \varphi_2(u))$$

con  $(u, v) \in [a, b] \times [c, d]$  Sicchè  $S$  è il codominio della funzione vettoriale

$$g : (u, v) \in [a, b] \times [c, d] \rightarrow (\varphi_1(u) \cos v, \varphi_1(u) \sin v, \varphi_2(u))$$

la quale è di classe  $C^1$  in  $[a, b] \times [0, \alpha]$  ed ivi invertibile.

Risultando

$$J_1(u, v) = \begin{vmatrix} \varphi_1'(u) \sin v & \varphi_1(u) \cos v \\ \varphi_2'(u) & 0 \end{vmatrix} = -\varphi_2'(u) \varphi_1(u) \cos v,$$

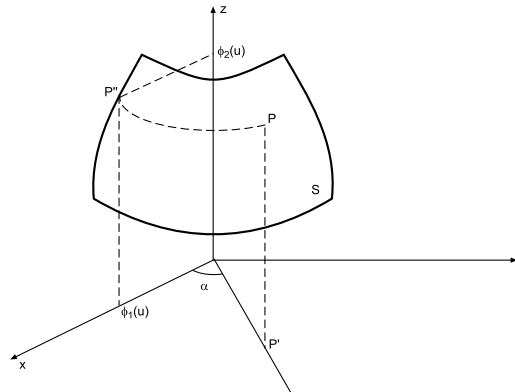


Figura 7.5: Superficie di rotazione.

$$J_2(u, v) = \begin{vmatrix} \varphi_2'(u) & 0 \\ \varphi_1'(u) \sin v & \varphi_1(u) \cos v \end{vmatrix} = -\varphi_2'(u) \varphi_1(u) \sin v,$$

$$J_3(u, v) = \begin{vmatrix} \varphi_1'(u) \cos v & -\varphi_1(u) \sin v \\ \varphi_1'(u) \sin v & \varphi_1(u) \cos v \end{vmatrix} = \varphi_1'(u) \varphi_1(u)$$

si ha:

$$J_1^2(u, v) + J_2^2(u, v) + J_3^2(u, v) = (\varphi_2'(u))^2 (\varphi_1(u))^2 + (\varphi_1'(u))^2 (\varphi_1(u))^2 = (\varphi_1(u))^2 [(\varphi_1'(u))^2 + (\varphi_2'(u))^2] > 0$$

dunque  $S$  è una superficie regolare e  $g$  ne è una parametrizzazione regolare. Detta superficie dicesi **una superficie regolare di rotazione**.

## 7.4 Area di una superficie regolare: integrali superficiali.

Premettiamo il seguente:

**Teorema 7.2** Sia  $S$  una superficie regolare.

Se

$$g : B \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{e} \quad \vartheta : B_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

sono parametrizzazioni regolari di  $S$ , detta  $f$  una funzione reale continua su  $S$ , si ha:

$$\iint_B f(g(u, v)) |g_u(u, v) \wedge g_v(u, v)| \, du \, dv = \iint_{B_1} f(\vartheta(\xi, \eta)) |\vartheta_\xi(\xi, \eta) \wedge \vartheta_\eta(\xi, \eta)| \, d\xi \, d\eta$$

**Dimostrazione** — Omessa. □

Siano:  $S$  una superficie regolare,  $f$  una funzione reale continua su  $S$ . L'integrale doppio

$$\lambda = \iint_B f(u, v) |g_u(u, v) \wedge g_v(u, v)| \, dudv,$$

che per il teorema (7.2) è indipendente dalla parametrizzazione regolare  $g$  di  $S$ , si chiama **l'integrale superficiale di  $f$  esteso ad  $S$** , e viene indicato con uno dei simboli:

$$\int_S f d\sigma \quad , \quad \int_S f(P) d\sigma \quad , \quad \int_S f(x, y, z) d\sigma.$$

Se  $f(P) = 1 \quad \forall P \in S$ , l'integrale doppio

$$\iint_B |g_u(u, v) \wedge g_v(u, v)| \, dudv$$

dicesi **l'area della superficie regolare  $S$** . Indicheremo detta area con  $\sigma(S)$ .

**Osservazione 82** Con riferimento al diagramma regolare di  $S$  visto nella sezione 7.3.1 di pagina 273 si ha:

$$\sigma(S) = \iint_B \sqrt{1 + (f_x(x, y))^2 + (f_y(x, y))^2} \, dxdy$$

**Osservazione 83** Con riferimento alla superficie cilindrica regolare  $S$  della sezione 7.3.1 (vedi pag. 274) si ha:

$$\begin{aligned} \sigma(S) &= \iint_{[a,b] \times [c,d]} \sqrt{(\varphi'_1(u))^2 + (\varphi'_2(u))^2} \, dudv = \\ &= \int_a^b \left( \int_c^d \sqrt{(\varphi'_1(u))^2 + (\varphi'_2(u))^2} \, dv \right) du = \ell(\Gamma) (d - c) \end{aligned}$$

**Osservazione 84** Con riferimento alla superficie regolare di rotazione  $S$  della sezione 7.3.1 (vedi pag. 275) si ha:

$$\begin{aligned} \sigma(S) &= \iint_{[a,b] \times [c,d]} \varphi_1(u) \cdot \sqrt{(\varphi'_1(u))^2 + (\varphi'_2(u))^2} \, dudv = \\ &= \mathcal{L} \left( \int_a^b \varphi_1(u) \cdot \sqrt{(\varphi'_1(u))^2 + (\varphi'_2(u))^2} \, du \right) = \mathcal{L} \int_{\Gamma} x ds \end{aligned}$$

Sia:

$$\mathbf{v}(P) = X(P)\mathbf{i} + Y(P)\mathbf{j} + Z(P)\mathbf{k}$$

un campo vettoriale di classe  $C^0$  nell'aperto  $\Omega$  di  $\mathbb{R}^3$ . La funzione

$$X(x, y, z) dydz + Y(x, y, z) dzdx + Z(x, y, z) dxdy \quad (7.4.1)$$

definita per  $(x, y, z) \in \Omega$  e  $(dx, dy, dz) \in \mathbb{R}^3$  dicesi **una forma differenziale quadratica (di coefficienti  $(X, Y, Z)$ )**.

Sia  $S$  una superficie regolare contenuta in  $\Omega$ . Orientata  $S$ , denotiamo  $\forall P \in S$  con  $\mathbf{n}(P)$  il versore normale positivo a  $S$  in  $P$ . Si dimostra che la funzione

$$P \in S \rightarrow \mathbf{n}(P)$$

è continua in  $S$ .

Ciò implica che la funzione reale

$$P \in S \rightarrow \mathbf{v}(P) \times \mathbf{n}(P)$$

è continua su  $S$ . L'integrale superficiale

$$\int_S [\mathbf{v}(P) \times \mathbf{n}(P)] d\sigma$$

dicesi **il flusso di  $\mathbf{v}$  attraverso  $S$  oppure l'integrale superficiale della forma differenziale quadratica (7.4.1) esteso alla superficie orientata  $S$** .

Quando si adopera quest'ultima locuzione, detto integrale viene indicato col simbolo

$$\int_{+S} X(x, y, z) dydz + Y(x, y, z) dzdx + Z(x, y, z) dxdy$$

Si pone poi per definizione

$$\begin{aligned} \int_{-S} X(x, y, z) dydz + Y(x, y, z) dzdx + Z(x, y, z) dxdy = \\ - \int_{+S} X(x, y, z) dydz + Y(x, y, z) dzdx + Z(x, y, z) dxdy. \end{aligned}$$

Se  $g: B \rightarrow \mathbb{R}^3$  è una parametrizzazione regolare di  $S$  si ha:

$$\begin{aligned} \int_S [\mathbf{v}(P) \times \mathbf{n}(P)] d\sigma = \\ = \iint_B [\mathbf{v}(g(u, v)) \times \mathbf{n}(g(u, v))] |g_u(u, v) \wedge g_v(u, v)| dudv = \\ = \pm \iint_B [X(g(u, v)) J_1(u, v) + Y(g(u, v)) J_2(u, v) + Z(g(u, v)) J_3(u, v)] dudv \end{aligned}$$

dove vale il segno "+" quando  $g$  è un'orientazione positiva di  $S$ , quello "-" in caso contrario ( $g$  è negativo).

## 7.5 Il teorema di Stokes nello spazio.

**Teorema 7.3** Sia  $\mathbf{v} = (X, Y, Z)$  un campo vettoriale a tre componenti continuo in uno **pseudodominio**  $A$  dello spazio  $(O, x, y, z)$  e avente per valori vettori geometrici dello spazio.

Sia  $S$  una porzione di superficie regolare dotata di **bordo regolare** (i.e. una porzione di superficie regolare tale che esista una rappresentazione parametrica regolare avente come dominio base un dominio regolare di  $\mathbb{R}^2$ ) contenuta nello pseudodominio  $A$ .

Fissiamo una pagina positiva<sup>1</sup> di  $S$  che denotiamo con  $+S$ ; fissiamo un verso positivo sul bordo di  $S$ , e indichiamo con  $+\Gamma(S)$  il bordo di  $S$  orientato nel verso positivo fissato.

Supponiamo ora verificate le seguenti ipotesi:

1. gli orientamenti fissati su  $S$  e  $\Gamma(S)$  sono **coerenti**<sup>2</sup>;
2. il campo vettoriale  $\mathbf{v} = (X, Y, Z)$  è di classe  $C^1$  nello pseudodominio  $A$ ;
3. risulta

$$S \subseteq \overset{\circ}{A} \text{ oppure } S \subseteq FA \cap A \text{ oppure } A \text{ è un } \mathbf{dominio} \text{ di classe } C^1$$

il che significa che la superficie  $S$  deve essere o tutta contenuta nell'interno di  $A$  o tutta contenuta nella frontiera di  $A$  e che, nel caso particolare che  $A$  è un dominio di classe  $C^1$ , la superficie  $S$  può anche essere contenuta in parte nell'interno di  $A$  e in parte nella frontiera di  $A$ .

---

<sup>1</sup>L'immagine geometrica intuitiva di una superficie conduce a distinguere *due facce*, e quindi, se in ciascun punto  $P$  della superficie si rappresenta il versore normale positivo mediante un segmento orientato applicato in  $P$ , è intuitivo il fatto che l'insieme di tali vettori individua una delle due facce della superficie. La possibilità di distinguere due facce rappresenta un'importante proprietà delle porzioni di superficie regolare, e si esprime dicendo che una tal superficie è **bilatera**.

Allo scopo di dare un significato preciso alla *faccia* di una porzione di superficie regolare di  $S$ , denotiamo con  $\mathcal{P}^+$  l'insieme costituito da tutte le coppie che si ottengono associando ad ogni punto  $P = (u, v)$  di  $S$  il versore normale positivo  $\mathbf{n} = \mathbf{n}(u, v)$ ; denotiamo quindi con  $\mathcal{P}^-$  l'insieme costituito dalle coppie  $(P, -\mathbf{n}(P))$  con  $P \in S$ . l'insieme  $\mathcal{P}^+$  [ $\mathcal{P}^-$ ] si chiama **la pagina positiva [negativa]**, o **la faccia positiva [negativa]** della porzione di superficie  $S$ .

<sup>2</sup>Gli orientamenti fissati su  $S$  e  $\Gamma(S)$  risultano coerenti quando una persona, che percorre il bordo  $\Gamma(S)$  nel verso positivo fissato ed è orientata come il versore normale che determina la pagina positiva di  $S$  fissata, vede alla sua sinistra i punti interni a  $S$ .

Nelle ipotesi fatte vale la seguente formula detta **formula di Stokes** nello spazio:

$$\int_{\Gamma(S)} (\mathbf{v} \times \mathbf{t}) ds = \int_S (\text{rot } \mathbf{v} \times \mathbf{n}) d\sigma \quad (7.5.1)$$

dove  $\mathbf{t}$  è il versore tangente al bordo  $\Gamma(S)$  orientato nel verso positivo fissato su  $\Gamma(S)$ , i.e. nel verso di  $+\Gamma(S)$ , e  $\mathbf{n}$  è il versore normale a  $S$  che determina la pagina positiva  $+S$  fissata.

Si suole leggere la formula (7.5.1) come segue:

**Se la superficie  $S$  e il suo bordo  $\Gamma(S)$  sono orientati coerentemente, la circuitazione<sup>3</sup> del vettore  $\mathbf{v}$  lungo il bordo di  $S$  orientato nel verso positivo fissato eguaglia il flusso del rotore del vettore  $\mathbf{v}$  uscente dalla pagina positiva di  $S$  fissata.**

**Dimostrazione** — Omessa. □

**Osservazione 85** Ricordiamo che per un teorema sull'integrale curvilineo di una forma differenziale lineare si ha:

$$\int_{\Gamma(S)} [\mathbf{v}(P) \times \mathbf{t}(P)] ds = \int_{+\Gamma(S)} \mathbf{v} \times dP \equiv \int_{+\Gamma(S)} Xdx + Ydy + Zdz.$$

Ricordiamo ancora che risulta:

$$\text{rot } \mathbf{v} \stackrel{\text{def.}}{=} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

Conseguentemente, per il teorema sul significato vettoriale dell'integrale su-

---

<sup>3</sup>Per definizione la circuitazione di  $\mathbf{v}$  lungo il bordo di  $S$  è

$$\int_{\Gamma(S)} [\mathbf{v}(P) \times \mathbf{t}(P)] ds$$

perficiale di una funzione differenziale quadratica<sup>4</sup> si ha:

$$\int_S (\operatorname{rot} \mathbf{v} \times \mathbf{n}) d\sigma = \int_{+S} (Z_y - Y_z) dydz + (X_z - Z_x) dzdx + (Y_x - X_y) dxdy.$$

Pertanto la formula di Stokes nello spazio, i.e. la formula (7.5.1), si può riscrivere come segue:

$$\begin{aligned} \int_{+\Gamma(S)} X dx + Y dy + Z dz &= \\ &= \int_{+S} (Z_y - Y_z) dydz + (X_z - Z_x) dzdx + (Y_x - X_y) dxdy \quad (7.5.2) \end{aligned}$$

La formula (7.5.2) si chiama **la formula di Stokes nello spazio espressa con l'integrale curvilineo di una forma differenziale lineare e con l'integrale superficiale di una forma differenziale quadratica.**

**Osservazione 86** la formula di Stokes nello spazio può essere utilizzata per calcolare l'integrale superficiale  $\int_S (\operatorname{rot} \mathbf{v} \times \mathbf{n}) d\sigma$ , i.e. il flusso del rotore del vettore  $\mathbf{v}$  uscente dalla pagina positiva di  $S$  fissata. In tal caso è preferibile scrivere la formula di Stokes nello spazio come segue:

$$\int_S (\operatorname{rot} \mathbf{v} \times \mathbf{n}) d\sigma = \int_{+\Gamma(S)} X dx + Y dy + Z dz \quad (7.5.3)$$

---

<sup>4</sup>Sussiste il seguente

**Teorema 7.4** Consideriamo una forma differenziale quadratica

$$X dx + Y dy + Z dz$$

con coefficienti continui in un insieme  $A$  dello spazio  $(O, x, y, z)$ , e consideriamo il campo vettoriale associato a tale forma differenziale quadratica, i.e. il campo vettoriale

$$\mathbf{v} = (X, Y, Z) \equiv X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}.$$

Consideriamo poi una porzione di superficie regolare  $S$  dotata di bordo regolare contenuta in  $A$ , e fissiamo su  $S$  una pagina positiva che denoteremo con  $+S$ .

Risulta allora:

$$\int_{+S} X dydz + Y dzdx + Z dxdy = \int_S (\mathbf{v} \times \mathbf{n}) d\sigma$$

dove  $\mathbf{n}$  è il versore normale a  $S$  che determina la pagina positiva  $+S$  fissata.

In altri termini l'integrale superficiale di una forma differenziale quadratica esteso a una pagina di una porzione di superficie regolare risulta eguale al **flusso uscente** (i.e., per definizione, all'integrale  $\int_S (\mathbf{v} \times \mathbf{n}) d\sigma$ ) da tale pagina del campo vettoriale associato a tale forma differenziale quadratica.

## 7.6 Domini regolari e limitati in $\mathbb{R}^3$ . Formule di Gauss nello spazio. Il teorema della divergenza nello spazio.

Un dominio limitato ed internamente connesso  $D$  di  $\mathbb{R}^3$  dicesi **regolare** se la sua frontiera  $\partial D$  è l'unione di un numero finito di superfici regolari  $S_1, \dots, S_n$  con  $S_i$  dotata di una parametrizzazione regolare

$$g_i : B_i \rightarrow \mathbb{R}^3$$

di dominio base regolare in modo che siano soddisfatte le condizioni seguenti:

1.  $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$  con  $i \neq j$   $S_i \cap S_j = \emptyset$  oppure  $S_i \cap S_j = \Gamma(S_i) \cap \Gamma(S_j)$
2.  $\forall i \in \{1, \dots, m\}$  ogni  $P \in S_i - \Gamma(S_i)$  è il punto medio di un segmento  $P'P''$  normale a  $S_i$  in  $P$  con

$$P'P - \{P\} \subset \overset{\circ}{D} \text{ e } P''P - \{P\} \subset \mathbb{R}^3 - D$$

3.  $\forall i \in \{1, \dots, m\}$  e  $\forall P \in S_i - \Gamma(S_i)$

$$\mathbf{n}_g(P) = \frac{P'' - P}{|P'' - P|}$$

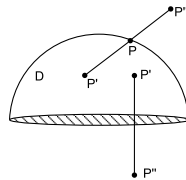


Figura 7.6: Dominio regolare limitato in  $\mathbb{R}^3$ .

Orientare **positivamente** la frontiera di  $D$  significa orientare ciascuna superficie  $S_i$  assumendo come positivo il verso di attraversamento della parametrizzazione. Per ogni  $i \in \{1, \dots, m\}$  e  $\forall P \in S_i - \Gamma(S_i)$  il vettore  $\mathbf{n}_g(P)$  si chiama **vettore normale esterno a  $\partial D$  in  $P$**  e viene indicato con  $\mathbf{n}_e(P)$ ; il suo opposto si chiama invece **vettore normale interno a  $\partial D$  in  $P$**  e viene denotato con  $\mathbf{n}_i(P)$ . Si dimostra che ogni superficie regolare è una parte di  $\mathbb{R}^3$  misurabile e di misura nulla, conseguentemente ogni dominio regolare limitato è misurabile.

**Teorema 7.5 (Formule di Gauss nello spazio)** Sia  $f(x, y, z)$  una funzione reale di classe  $C^1$  in un dominio regolare  $A$  dello spazio  $(O, x, y, z)$ . Valgono le seguenti formule, dette **formule di Gauss nello spazio**:

$$\begin{aligned} \iiint_A \frac{\partial f}{\partial x} dx dy dz &= \int_{+\partial A} f dy dz \\ \iiint_A \frac{\partial f}{\partial y} dx dy dz &= \int_{+\partial A} f dz dx \\ \iiint_A \frac{\partial f}{\partial z} dx dy dz &= \int_{+\partial A} f dx dy \end{aligned}$$

essendo

$+\partial A \stackrel{\text{def}}{=} \text{faccia di } FA \text{ rivolta verso l'esterno del dominio } A$

**Dimostrazione** — Omessa. □

il teorema 7.5 può essere ritenuto come segue:

**Teorema 7.6** Sia  $f(x, y, z)$  una funzione reale di classe  $C^1$  in un dominio regolare  $A$  dello spazio  $(O, x, y, z)$ . Valgono allora le seguenti formule, anch'esse dette **formule di Gauss nello spazio**:

$$\begin{aligned} \iiint_A \frac{\partial f}{\partial x} dx dy dz &= \int_{\partial A} f \cdot \underbrace{(\mathbf{i} \times \mathbf{n}_e)}_{\cos(x, \mathbf{n}_e)} d\sigma \\ \iiint_A \frac{\partial f}{\partial y} dx dy dz &= \int_{\partial A} f \cdot \underbrace{(\mathbf{j} \times \mathbf{n}_e)}_{\cos(y, \mathbf{n}_e)} dz dx \\ \iiint_A \frac{\partial f}{\partial z} dx dy dz &= \int_{\partial A} f \cdot \underbrace{(\mathbf{k} \times \mathbf{n}_e)}_{\cos(z, \mathbf{n}_e)} dx dy \end{aligned}$$

**Dimostrazione** —

$$\begin{aligned} \iiint_A \frac{\partial f}{\partial x} dx dy dz &= \int_{+\partial A} f dy dz = \int_{+\partial A} f dy dz + 0 dz dx + 0 dx dy = \\ &\stackrel{\text{posto } \mathbf{v}=(f,0,0)}{\cong} \int_{\partial A} (\mathbf{v} \times \mathbf{n}_e) d\sigma = \int_{\partial A} [(f\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}) \times \mathbf{n}_e] d\sigma = \\ &= \int_{\partial A} f \cdot (\mathbf{i} \times \mathbf{n}_e) d\sigma. \end{aligned}$$

resta così dimostrata la prima relazione testè vista. In modo analogo si dimostrano le altre relazioni. □

Da quest'ultimo teorema si deduce facilmente il seguente:

**Teorema 7.7 (Teorema della divergenza nello spazio)** Sia  $\mathbf{v} = (X, Y, Z)$  un campo vettoriale di classe  $C^1$  in un dominio regolare  $A$  dello spazio. vale allora la seguente formula:

$$\iiint_A \operatorname{div} \mathbf{v} dx dy dz = \int_{\partial A} (\mathbf{v} \times \mathbf{n}_e) d\sigma.$$

in altri termini l'integrale triplo della divergenza di un vettore  $\mathbf{v}$  esteso a un dominio regolare dello spazio è uguale al flusso di tale vettore uscente dalla frontiera di tale dominio regolare.

**Dimostrazione** — Si ha:

$$\begin{aligned} \iiint_A \operatorname{div} \mathbf{v} dx dy dz &= \iiint_A \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dx dy dz = \\ &= \int_{\partial A} [X \cdot (\mathbf{i} \times \mathbf{n}_e) + Y \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{n}_e) + Z \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{n}_e)] d\sigma = \\ &= \int_{\partial A} (X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}) \times \mathbf{n}_e d\sigma = \int_{\partial A} (\mathbf{v} \times \mathbf{n}_e) d\sigma. \end{aligned}$$

□

**Osservazione 87** la formula contenuta nel teorema della divergenza nello spazio si chiama **formula di Ostrogradski** dal nome di un matematico russo (1901-1961).

## 7.7 regola d'integrazione per parti relativa agli integrali doppi e tripli.

**Teorema 7.8** Siano  $f(x, y)$  e  $g(x, y)$  due funzioni reali continue in un dominio regolare di  $A$  del piano  $(O, x, y)$ . vale la seguente formula, detta **formula d'integrazione per parti nel piano**:

$$\iint_A f \cdot \frac{\partial g}{\partial x} dx dy = \int_{\partial A} fg \cdot \underbrace{(\mathbf{i} \times \mathbf{n}_e)}_{\cos(x, \mathbf{n}_e)} ds - \iint_A \frac{\partial f}{\partial x} \cdot g dx dy \quad (7.7.1)$$

se le derivate  $f_x$  e  $g_x$  esistono e sono continue in  $A$ .

Vale inoltre la seguente formula:

$$\iint_A f \cdot \frac{\partial g}{\partial y} dx dy = \int_{\partial A} fg \cdot \underbrace{(\mathbf{j} \times \mathbf{n}_e)}_{\cos(y, \mathbf{n}_e)} ds - \iint_A \frac{\partial f}{\partial y} \cdot g dx dy$$

**7.7 regola d'integrazione per parti relativa agli integrali doppi e tripli.** 285

se le derivate  $f_y$  e  $g_y$  esistono e sono continue in  $A$ .

**Dimostrazione** — Dimostriamo, ad esempio, la (7.7.1). Per la prima formula di Gauss ne piano si ha:

$$\iint_A \frac{\partial}{\partial x} (fg) dx dy = \int_{\partial A} fg (\mathbf{i} \times \mathbf{n}_e) ds.$$

Da tale eguaglianza, tenendo presente che risulta:

$$\frac{\partial}{\partial x} (fg) = f_x \cdot g + f \cdot g_x$$

si deduce la (7.7.1). □

**Teorema 7.9** Siano  $f(x, y, z)$  e  $g(x, y, z)$  due funzioni reali di classe  $C^1$  in un dominio regolare  $A$  dello spazio  $(O, x, y, z)$ . Valgono allora le seguenti formule, dette **formule d'integrazione per parti nello spazio**:

$$\iiint_A f \frac{\partial g}{\partial x} dx dy dz = \int_{\partial A} f \cdot g \cdot (\mathbf{i} \times \mathbf{n}_e) d\sigma - \iiint_A \left( \frac{\partial f}{\partial x} \cdot g \right) dx dy dz \quad (7.7.2)$$

$$\iiint_A f \frac{\partial g}{\partial y} dx dy dz = \int_{\partial A} f \cdot g \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{n}_e) d\sigma - \iiint_A \left( \frac{\partial f}{\partial y} \cdot g \right) dx dy dz \quad (7.7.3)$$

$$\iiint_A f \frac{\partial g}{\partial z} dx dy dz = \int_{\partial A} f \cdot g \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{n}_e) d\sigma - \iiint_A \left( \frac{\partial f}{\partial z} \cdot g \right) dx dy dz \quad (7.7.4)$$

**Dimostrazione** — Dimostriamo, ad esempio, la (7.7.2). Per la prima formula di Gauss nello spazio si ha:

$$\iiint_A \frac{\partial}{\partial x} (fg) dx dy dz = \int_{\partial A} fg (\mathbf{i} \times \mathbf{n}_e) ds.$$

Da tale eguaglianza, tenendo presente che risulta:

$$\frac{\partial}{\partial x} (fg) = f_x \cdot g + f \cdot g_x,$$

si deduce la (7.7.2). □

## 7.8 Applicazioni.

**Esercizio** — Sia  $S$  la superficie diagramma della funzione

$$f(x, y) = x^2 + xy - y^2$$

considerata definita nell'insieme  $A$  tratteggiato in figura 7.7.

- Calcolare l'area di  $S$ ;
- trovare l'equazione del piano tangente a  $S$  nel punto  $P_0 = (0, 2, -4)$ ;
- trovare il versore normale a  $S$  nel punto  $P_0$  orientato in modo da formare un angolo acuto con l'asse  $z$ .

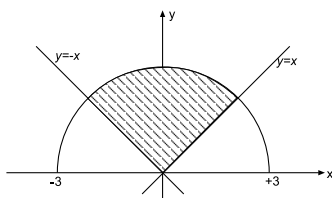


Figura 7.7: Insieme  $A$ .

• • •

Com'è noto dalla teoria si ha:

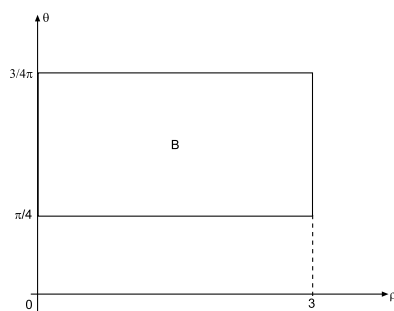
$$\begin{aligned} \text{area } S &= \iint_A \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy = \iint_A \sqrt{1 + (2x + y)^2 + (x - 2y)^2} dx dy = \\ &= \iint_A \sqrt{1 + 4x^2 + y^2 + 4xy + x^2 + 4y^2 - 4xy} dx dy = \\ &= \iint_A \sqrt{1 + 5(x^2 + y^2)} dx dy \end{aligned}$$

Passiamo a coordinate polari. Le equazioni della trasformazione sono

$$\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \end{cases}$$

Quando il punto  $(x, y)$  descrive l'insieme  $A$ , il punto  $(\rho, \vartheta)$  descrive l'insieme  $B$  del piano  $(\rho, \vartheta)$  definito dalle limitazioni

$$0 \leq \rho \leq 3 \quad \text{e} \quad \frac{\pi}{4} \leq \vartheta \leq 3\frac{\pi}{4}$$

Figura 7.8: Insieme  $B$  trasformato di  $A$ .

Quindi si ha:

$$\begin{aligned}
 \iint_A \sqrt{1+5(x^2+y^2)} dx dy &= \iint_B \sqrt{1+5\rho^2} \rho d\rho d\vartheta = \\
 &= \int_0^3 d\rho \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sqrt{1+5\rho^2} \rho d\vartheta = \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^3 \sqrt{1+5\rho^2} \rho d\rho = \\
 &= \frac{\pi}{20} \int_0^3 (1+5l^2)^{\frac{1}{2}} d(1+5l^2) dl = \frac{\pi}{20} \left[ \frac{(1+5l^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^3 = \frac{\pi}{30} (46^{\frac{3}{2}} - 1).
 \end{aligned}$$

L'equazione del piano tangente a  $S$  nel punto  $P_0 = (0, 2, -4)$  è la seguente:

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

con  $(x_0, y_0) = (0, 2)$  è:

$$z = f(0, 2) + f_x(0, 2)(x - 0) + f_y(0, 2)(y - 2)$$

Si ha ora:

$$f(0, 2) = -4 \quad f_x(0, 2) = [2x + y]_{(0,2)} = 2 \quad f_y(0, 2) = [x - 2y]_{(0,2)} = -4$$

Quindi l'equazione del piano tangente a  $S$  nel punto  $P_0 = (0, 2, -4)$  è:

$$2x - 4y - z + 4 = 0$$

Il versore richiesto è il versore normale positivo, i.e. il versore fornito dalle seguenti eguaglianza:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}(P_0) &= \frac{(-f_x(0,2))}{\sqrt{1+f_x^2(0,2)+f_y^2(0,2)}}\mathbf{i} + \frac{(-f_y(0,2))}{\sqrt{1+f_x^2(0,2)+f_y^2(0,2)}}\mathbf{j} + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2(0,2)+f_y^2(0,2)}}\mathbf{k} = -\frac{2}{\sqrt{21}}\mathbf{i} + \frac{4}{\sqrt{21}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{21}}\mathbf{k} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{21}}(-2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}) \end{aligned}$$

**Osservazione 88** Si ricordi che una rappresentazione parametrica di  $S$  è la seguente:

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^2 + uv - v^2 \end{cases} \quad (u, v) \in A \quad (7.8.1)$$

Com'è noto, poichè  $f(x, y)$  è di classe  $C^1$ ,  $S$  è una porzione di superficie regolare e la (7.8.1) è una rappresentazione parametrica regolare di  $S$ . I minori  $J_1, J_2, J_3$  relativi alla rappresentazione (7.8.1), com'è noto, sono forniti dalle seguenti eguaglianze:

$$\begin{aligned} J_1(u, v) &= -f_x(u, v) = 2u + v \quad ; \quad J_2(u, v) = -f_y(u, v) = -u + 2v \quad ; \\ J_3(u, v) &= 1 \end{aligned}$$

Notiamo anche che l'asse normale positivo a  $S$  in un punto relativo alla rappresentazione (7.8.1) è per definizione l'asse normale parallelo ed equiverso al vettore  $P_u \wedge P_v$ , e risulta coincidente con l'asse normale orientato in modo da formare un angolo acuto con l'asse  $z$ , i.e. orientato verso l'alto.

Si ricordi, per finire, che la rappresentazione parametrica di  $S$  indicata con le equazioni parametriche scalari (7.8.1) può anche essere denotata con l'equazione parametrica vettoriale:

$$P = O + u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (u^2 + uv - v^2)\mathbf{k} \quad (u, v) \in A$$

■

**Esercizio** — Sia  $S$  la parte compresa tra i piani di equazione  $z = 1$  e  $z = 2$  della superficie cilindrica avente per direttrice la curva  $\Gamma$  del piano  $(x, y)$  di equazione

$$y = \sin x \quad \text{con } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

e avente generatrici parallele all'asse  $z$ .

Calcolare l'integrale superficiale

$$\int_S \frac{y^2 z}{\sqrt{\cos^2 x + 1}} d\sigma$$

• • •

una rappresentazione parametrica di  $\Gamma$  è la seguente:

$$\begin{cases} x = u \\ y = \sin u \end{cases} \quad u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Una rappresentazione parametrica della superficie cilindrica di direttrice  $\gamma$  e generatrici parallele all'asse  $z$  è:

$$\begin{cases} x = u \\ y = \sin u \\ z = v \end{cases} \quad u \in B = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [1, 2] \quad (7.8.2)$$

la matrice associata alla rappresentazione (7.8.2) è:

$$\begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Quindi risulta

$$J_1(u, v) = \cos u \quad J_2(u, v) = -1 \quad J_3(u, v) = 0$$

Risulta

$$J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = \cos^2 u + 1 > 0 \quad \forall (u, v) \in B = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [1, 2]$$

Quindi la rappresentazione parametrica (7.8.2) è una rappresentazione regolare di  $S$ . Poichè  $B$  è un dominio regolare,  $S$  è una porzione di superficie regolare dotata di bordo regolare<sup>5</sup>.

Si ha ora:

$$\begin{aligned} \int_S \frac{y^2 z}{\sqrt{\cos^2 x + 1}} d\sigma &\stackrel{\text{teorema}}{=} \iint_B \frac{\sin^2 u \cdot v}{\sqrt{\cos^2 u + 1}} \sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2} dudv = \\ &= \iint_B \frac{\sin^2 u \cdot v}{\sqrt{\cos^2 u + 1}} \sqrt{\cos^2 u + 1} dudv = \int_0^{\frac{\pi}{2}} du \int_1^2 \sin^2 u \cdot v dv = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u du \cdot \int_1^2 v dv = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2u}{2} du \int_1^2 v dv = 3 \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

■

<sup>5</sup>Ciò però ci era già noto per il teorema sul calcolo dell'area di una porzione di superficie cilindrica, dato che  $\Gamma$  è una curva regolare aperta.

### 7.8.1 Procedimenti per calcolare il flusso di un vettore.

Per calcolare il flusso di un vettore  $\mathbf{v}$  conviene distinguere 3 casi:

#### 1° caso.

Si desidera calcolare il flusso di un vettore  $\mathbf{v}$ , uscente da una pagina di una porzione di superficie regolare  $S$  dotata di bordo regolare.

In tal caso, per calcolare il flusso, conviene utilizzare la stessa definizione di flusso, i.e. il fatto che il flusso richiesto è per definizione l'integrale superficiale:

$$\int_S (\mathbf{v} \times \mathbf{n}) d\sigma$$

dove  $\mathbf{n}$  è il versore normale alla superficie  $S$  che determina la pagina fissata della superficie  $S$ .

#### 2° caso.

Si desidera calcolare il flusso di un vettore  $\mathbf{v}$  uscente dalla frontiera di un dominio regolare  $A$  del piano o dello spazio. In tal caso, per calcolare il flusso, conviene utilizzare i teoremi della divergenza nel piano o nello spazio e i.e. le formule:

$$\int_{FA} (\mathbf{v} \times \mathbf{n}_e) ds = \iint_A \operatorname{div} \mathbf{v} dx dy \quad (\text{per il piano})$$

$$\int_{FA} (\mathbf{v} \times \mathbf{n}_e) d\sigma = \iiint_A \operatorname{div} \mathbf{v} dx dy dz \quad (\text{per lo spazio})$$

#### 3° caso.

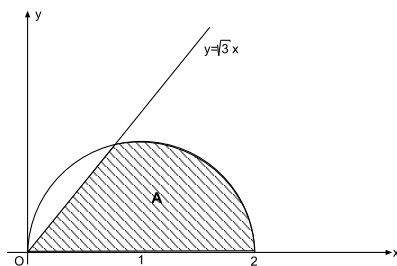
Si desidera calcolare il flusso del rotore di un vettore  $\mathbf{v} = (X, Y, Z)$  uscente da una pagina di una porzione di superficie regolare  $S$  dotata di bordo regolare. In tal caso, per calcolare il flusso, conviene utilizzare il teorema di Stokes nello spazio, i.e. la formula:

$$\int_S (\operatorname{rot} \mathbf{v} \times \mathbf{n}) d\sigma = \int_{+\Gamma(S)} X dx + Y dy + Z dz,$$

dove  $+\Gamma(S)$  indica il bordo della superficie  $S$  orientato coerentemente con la superficie  $S$ .

**Esercizio** — Sia  $S$  la parte della superficie di equazione

$$z = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$$

Figura 7.9: Insieme  $A$ .

che si proietta nel piano  $(x, y)$  nel dominio  $A$  tratteggiato in figura. Si consideri poi il vettore geometrico  $\mathbf{v} = z(x^2 + y^2)^{3/2} \mathbf{j}$ .

Calcolare il flusso del vettore  $\mathbf{v}$  uscente dalla pagina di  $S$  determinata dal versore normale  $\mathbf{n}$  alla superficie  $S$  orientato in modo da formare un angolo acuto con l'asse  $z$ .

✠ Posto

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1},$$

la superficie  $S$  è la superficie diagramma della restrizione di  $f(x, y)$  all'insieme  $A$ .

Si noti che, poichè i punti della superficie  $S$  soddisfano l'equazione  $z = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$ , i.e. l'equazione  $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ . Pertanto la superficie  $S$  non è altro che una parte della falda superiore dell'iperboloide a due falde di equazione

$$x^2 + y^2 - z^2 = -1$$

e precisamente la parte della falda superiore che si proietta in  $A$ .

Il flusso richiesto è per definizione l'integrale superficiale

$$\int_S (\mathbf{v} \times \mathbf{n}) d\sigma$$

dove  $\mathbf{n}$  è il versore normale a  $S$  orientato in modo da formare un angolo acuto con l'asse  $z$ , i.e. il versore normale positivo a  $S$ .

Com'è noto, risulta:

$$\mathbf{n}(P) = \frac{(-f_x(x, y))}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \mathbf{i} + \frac{(-f_y(x, y))}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \mathbf{k}$$

$$\forall P = (x, y, z) \in S,$$

e quindi si ha:

$$\begin{aligned} \int_S (\mathbf{v} \times \mathbf{n}) d\sigma &= \int_S \left[ z(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} \mathbf{j} \right] \times \mathbf{n} d\sigma = \\ &= \int_S z(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} \frac{(-f_y)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} d\sigma \quad (7.8.3) \end{aligned}$$

Per calcolare questo integrale superficiale occorre scrivere una rappresentazione parametrica di  $S$ . Una rappresentazione parametrica di  $S$ , com'è noto, è fornita dalle equazioni parametriche scalari:

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \sqrt{u^2 + v^2 + 1} \end{cases} \quad (u, v) \in A$$

E' noto che risulta

$$\begin{aligned} J_1(u, v) = -f_x(u, v) \quad , \quad J_2(u, v) = -f_y(u, v) \quad , \\ J_3(u, v) = 1 \quad \forall (u, v) \in A \end{aligned}$$

Pertanto si ha:

$$\begin{aligned} \int_S z(x^2 + y^2)^{3/2} \frac{(-f_y)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} d\sigma &= \\ &= \iint_A \sqrt{u^2 + v^2 + 1} (u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}} \frac{(-f_y(u, v))}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dudv = \\ &= - \iint_A (u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}} v dudv = - \iint_A (x^2 + y^2) y dx dy \quad (7.8.4) \end{aligned}$$

per calcolare l'integrale doppio

$$\iint_A (x^2 + y^2) y dx dy,$$

effettuiamo un passaggio dalle coordinate cartesiane di un generico punto di  $A$  alle coordinate polari  $\rho, \vartheta$  di tale punto.

Le equazioni della trasformazione sono:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \end{cases}$$

Quando il punto  $(x, y)$  descrive l'insieme  $A$ , il punto  $(\rho, \vartheta)$  descrive l'insieme  $B$  del piano  $(\rho, \vartheta)$  definito dalle limitazioni

$$0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{3} \quad 0 \leq \rho \leq \rho_1(\vartheta)$$

dove  $\rho_1(\vartheta)$  è il raggio vettore del punto  $P_1(\vartheta)$  in figura 7.10<sup>6</sup> di centro  $(1, 0)$

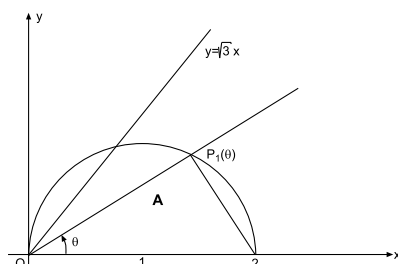


Figura 7.10: Insieme  $A$ : determinazione di  $\rho_1(\vartheta)$ .

e raggio 1.

dal triangolo rettangolo in figura si vede che risulta:

$$\rho_1(\vartheta) = 2 \cos \vartheta.$$

Quindi  $B$  è definito dalle limitazioni:

$$0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{3} \quad 0 \leq \rho \leq 2 \cos \vartheta.$$

Il dominio  $B$  è quindi il dominio rappresentato in figura 7.11: Si ha quindi:

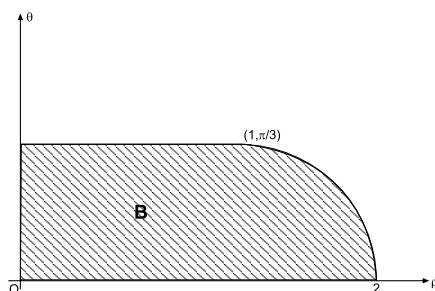


Figura 7.11: Insieme  $B$ .

$$\iint_A (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} y dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin \vartheta d\vartheta \left[ \frac{\rho^6}{6} \right]_0^{2 \cos \vartheta} = \frac{127}{84}$$

<sup>6</sup>Cioè del punto di anomalia  $\vartheta$  della circonferenza.

Risulta quindi:

$$\int_S (\mathbf{v} \times \mathbf{n}) d\sigma = -\frac{127}{84}$$

■

**Osservazione 89** Il fatto che il flusso uscente dalla pagina di  $S$  fissata sia negativo significa che il flusso **uscente** da tale pagina nel senso convenzionale, i.e. nel senso della definizione teorica di flusso "uscente", è in realtà un flusso **entrante** in tale pagina nel senso intuitivo della parola "entrante".

**Esercizio** — Si consideri il cubo dello spazio  $(O, x, y, z)$ ,  $A = [0, 2]^3$ , e si consideri il vettore geometrico

$$\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 32\mathbf{k}.$$

Calcolare il flusso del vettore  $\mathbf{v}$  usente dalla frontiera del cubo  $A$ .

◇ Il flusso richiesto è per definizione l'integrale superficiale

$$\int_{FA} (\mathbf{v} \times \mathbf{n}_e) d\sigma$$

Per il teorema della divergenza nello spazio si ha:

$$\begin{aligned} \int_{FA} (\mathbf{v} \times \mathbf{n}_e) d\sigma &= \iiint_A \operatorname{div} \mathbf{v} dx dy dz = \iiint_A \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dx dy dz = \\ &= \iiint_A \left( \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial (2y)}{\partial y} + \frac{\partial (32)}{\partial z} \right) dx dy dz = 6 \iiint_A dx dy dz = 6 \cdot \operatorname{vol} A = 48 \end{aligned}$$

■