Capitolo 9

Equazioni differenziali ordinarie.

9.1 Generalità. Problema di Cauchy. Teoremi di esistenza ed unicità.

Sia

$$F\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_n\right)$$

una funzione reale definita in $A \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$.
Consideriamo il seguente:
Problema — Stabilire se esistono funzioni reali $y\left(x\right)$ aventi per dominio un intervallo di $I_y \subseteq \mathbb{R}$, ivi derivabili n volte, soddisfacenti alle equazioni seguenti:

1. $\forall x \in I_y \qquad \left(x, y\left(x\right), y^{(1)}\left(x\right), \ldots, y^{(n)}\left(x\right)\right) \in A$
2. $\forall x \in I_y \qquad F\left(x, y\left(x\right), y^{(1)}\left(x\right), \ldots, y^{(n)}\left(x\right)\right) = 0$

In caso affermativo determinare dette funzioni. ■

Il problema posto prende il nome di **equazione differenziale ordinaria di ordine** n e viene indicato brevemente tramite la scrittura:

$$F\left(x, y, y^{(1)}, \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0 \qquad (9.1.1)$$

Ogni funzione reale $y\left(x\right)$ avente per dominio un intervallo di $\mathbb{R}$, ivi derivabile n volte e soddisfacente alle condizioni 1.) e 2.), dicesi **una soluzione** oppure **un integrale** della (9.1.1), mentre il suo diagramma assume la denominazione di **curva integrale** della (9.1.1). Integrare la (9.1.1) significa determinarne le soluzioni.
Sia

$$f\left(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1}\right)$$

una funzione reale definita in $B \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ e sia

$$F(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n) = y_n - f(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1}) \qquad \forall (x, y, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n) \in B \times \mathbb{R}$$

In tal caso la (9.1.1) si scrive:

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y^{(1)}, \ldots, y^{(n-1)}\right) \tag{9.1.2}$$

e questa dicesi **un'equazione differenziale ordinaria di ordine n e di forma normale**.
In particolare se

$$f(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1}) = \varphi(x) - [a_1(x)\, y_{n-1} + \ldots + a_n(x)\, y],$$

dove $\varphi, a_1, \ldots, a_n$ sono funzioni reali definite in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$, la (9.1.2) diventa:

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\, y = \varphi(x). \tag{9.1.3}$$

La (9.1.3) dicesi **una equazione differenziale lineare di ordine** n.
Le funzioni $a_1, \ldots, a_n$ diconsi **i coefficienti** della (9.1.3), mentre φ si chiama **termine noto** (coerentemente col fatto che la funzione φ è l'unico termine in cui non figura la funzione incognita y).
Se φ è identicamente nulla in B la (9.1.3) si dice **omogenea**.
Se la (9.1.3) *non* è omogenea[1], l'equazione omogenea avente gli stessi coefficienti della (9.1.3) dicesi **associata** alla (9.1.3).

Osservazione 105 Si conviene che, quando si parla di un integrale dell'equazione (9.1.3) senza precisare se è reale o complesso, s'intende parlare di un integrale reale.

Osservazione 106 Per stabilire se un'equazione differenziale è lineare o non lineare è utile tener presente che in un'equazione lineare di ordine n il complesso dei termini che contiene l'incognita y e le sue derivate rassomiglia a un **polinomio omogeneo di** 1^o **grado** nelle variabili $y, y^{(1)}, \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}$.

Esempio 54 L'equazione

$$y' + y \cos x = \sin x$$

è un'equazione lineare completa del 1^o ordine.
L'equazione

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

[1] In tal caso l'equazione (9.1.3) dicesi **completa**.

è un'equazione lineare omogenea del 2^o ordine con coefficienti costanti.
L'equazione

$$\log y' + y = 0$$

è un'equazione differenziale del primo ordine non lineare.
L'equazione

$$y' + y\cos x = \sin x \cdot y^{\alpha} \text{ con } \alpha \in \mathbb{R}$$

- se è $\alpha = 0$, è lineare completa;
- se è $\alpha = 1$ è lineare omogenea;
- se è $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 1$ non è lineare.

L'equazione

$$\log y + x = 0$$

che ha per soluzione la funzione

$$y = e^{-x}$$

non è un'equazione differenziale lineare e non è nemmeno un'equazione differenziale perchè in essa non figura alcuna derivata della funzione incognita y. Quest'equazione si può chiamare semplicemente un'equazione funzionale per esprimere il fatto che l'incognita è una funzione.

Con riferimento alla (9.1.2) si pone il seguente
***Problema* — [Problema di Cauchy (o di valori iniziali)]**
Assegnato il punto

$$(x_0, h_0, h_1, \ldots, h_{n-1}) \in B,$$

stabilire se esistono integrali $y(x)$ della (9.1.2) definiti in un intorno di x_0, tali che:

$$y(x_0) = h_0, y^{(1)}(x_0) = h_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = h_{n-1}$$

in caso affermativo determinarle. ■

Relativamente al problema di Cauchy sussistono i teoremi seguenti di cui omettiamo la dimostrazione.

Teorema 9.1 (di sola esistenza dovuto a Peano.) *Se B è un aperto di $\mathbb{R}^{n+1}$ e se f è continua in B, assegnato $(x_0, h_0, h_1, \ldots, h_{n-1}) \in B$ esiste almeno un integrale $y(x)$ della (9.1.1) definito in un intorno di x_0 ed ivi di classe C^n tale che*

$$y(x_0) = h_0, y^{(1)}(x_0) = h_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = h_{n-1}$$

La sola continuità di f assicura l'esistenza ma non l'unicità della soluzione del problema di Cauchy.
Ad esempio il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' & = 3\sqrt[3]{y^2} \\ \\ y(x_0) & = 0 \end{cases}$$

ammette almeno due soluzioni:

$$y_1(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R} \ ; \ y_2(x) = (x - x_0)^3 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Teorema 9.2 (di esistenza ed unicità: caso del rettangolo) *Ammesso che B sia il rettangolo chiuso di $\mathbb{R}^{n+1}$,*

$$B = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \times [h_0 - \beta, h_0 + \beta] \times \ldots \times [h_n - \beta_n, h_n + \beta_n]$$

Nelle ipotesi

- $i_1)$ *f è continua in B,*
- $i_2)$ *f è dotata nell'interno di B delle derivate parziali prime rispetto alle variabili $y, y_1, \ldots, y_{n-1}$ limitate,*

esistono un numero positivo $\delta \leqslant \alpha$ ed una sola funzione reale $y(x)$ di classe C^n in $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ tale che:

$$y^{(n)}(x) = f\left(x, y(x), y^{(1)}(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)\right) \qquad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

$$y(x_0) = h_0, y^{(1)}(x_0) = h_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = h_{n-1}$$

Teorema 9.3 (Teorema di esistenza e unicità: caso della striscia.) *Nelle ipotesi:*

- $i_1)$ *$B = I \times \mathbb{R}^n$ con I intervallo chiuso di $\mathbb{R}$,*
- $i_2)$ *$f(x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$ continua in B,*
- $i_3)$ *$f(x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$ dotata in $\overset{o}{B}$ delle derivate parziali prime rispetto a $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, tali derivate essendo limitate in $[a, b] \times \mathbb{R}^n$ qualunque sia l'intervallo compatto $[a, b] \subseteq I$,*

assegnato $x_0 \in I$ e $(h_0, h_1, \ldots, h_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, esiste una ed una sola funzione $y(x)$ di classe C^n in I tale che

$$y^{(n)}(x) = f\left(x, y(x), y^{(1)}(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)\right) \qquad \forall x \in I$$

$$y(x_0) = h_0, y^{(1)}(x_0) = h_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = h_{n-1}$$

Da quest'ultimo teorema si deduce il

Teorema 9.4 *Se i coefficienti $a_1, \ldots, a_n$ ed il termine noto φ della (9.1.3) sono di classe C^0 nell'intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$, assegnato $x_0 \in I$ e $(h_0, h_1, \ldots, h_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ esiste una ed una sola funzione $y(x)$ di classe C^n in I tale che*

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)\, y(x) = \varphi(x) \qquad \forall x \in I,$$

$$y(x_0) = h_0, y^{(1)}(x_0) = h_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = h_{n-1}$$

9.2 Equazioni differenziali lineari con i coefficienti ed il termine noto di classe C^0.

9.2.1 Equazioni omogenee.

Sia
$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)\, y(x) = 0 \tag{9.2.1}$$
una equazione omogenea con i coefficienti di classe C^0 nell'intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$. In base al teorema 9.4 la (9.2.1) ammette infiniti integrali di classe C^n in I. L'insieme J_0 di detti integrali dicesi **integrale generale della (9.2.1)**.
Poniamo

$$\forall y \in C^n(I) \qquad T(y) = y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\, y$$

ed osserviamo che
$$\forall y \in C^n(I) \qquad T(y) \in \overset{o}{C}(I)$$
$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ e } \forall y \in C^n(I) \qquad T(\lambda y) = \lambda T(y),$$
$$\forall y_1, y_2 \in C^n(I) \qquad T(y_1 + y_2) = T(y_1) + T(y_2)$$
sicchè T è un'applicazione lineare dello spazio vettoriale $C^n(I)$ nello spazio vettoriale $C^0(I)$. tale applicazione dicesi **un operatore differenziale di ordine n (di coefficienti $a_1, \ldots, a_n$)**.
Visto che una funzione $y \in C^n(I)$ è integrale della (9.2.1) se e solo se

$$T(y) = 0,$$

J_0 coincide con il nucleo di T e quindi è un sottospazio di $C^n(I)$.
Ci proponiamo di determinare le dimensioni di J_0. A tale scopo premettiamo alcune considerazioni.

Teorema 9.5 *Un integrale φ della (9.2.1), che in un punto $x_0 \in I$ si annulla con tutte le sue derivate fino a quella di ordine $n-1$, è l'integrale nullo (i.e. la funzione definitivamente nulla in I).*

Dimostrazione — L'asserto sussiste in base al teorema 9.4, tenendo presente che l'integrale si annulla in x_0 con tutte le sue derivate. $\square$

Osservazione 107 Consideriamo l'equazione del prim'ordine

$$y' + a_1(x)\,y = 0 \tag{9.2.2}$$

dove a_1 è una funzione reale di classe C^0 in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$. Ogni integrale y della (9.2.2), distinto da quello nullo, assume in I o soltanto valori positivi o soltanto valori negativi. Infatti se esistessero in I due punti x_1 e x_2 tali che

$$y(x_1) < 0 \text{ e } y(x_2) > 0$$

per il teorema degli zeri y si annullerebbe in almeno un punto x_0 interno all'intervallo compatto di estremi x_1 e x_2 e di conseguenza, stante il teorema 9.5, si avrebbe

$$y(x) = 0 \qquad \forall x \in I$$

il che è assurdo.

Consideriamo un'equazione differenziale lineare omogenea di ordine n

$$y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)\,y(x) = 0 \tag{9.2.3}$$

con coefficienti definiti e continui in I. Consideriamo poi n integrali della (9.2.3)

$$y_1, y_2, \ldots, y_n$$

Consideriamo ora il seguente determinante di ordine n:

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1^{(1)}(x) & y_2^{(1)}(x) & \cdots & y_n^{(1)}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Tale determinante è ovviamente una funzione definita e derivabile in I. Orbene tale determinante si chiama **il determinante wronskiano**, o semplicemente il **wronskiano**[2], degli n integrali $y_1, y_2, \ldots, y_n$ e si denota col simbolo $W(x)$.

Se ora calcoliamo la derivata di $W(x)$ (si veda, per il calcolo della derivata di un determinante, l'appendice F a pag. 401) troviamo che $W'(x)$ è la somma di n determinanti, dei quali i primi $n-1$ sono nulli perchè hanno due righe eguali e l'ultimo è:

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1^{(1)}(x) & y_2^{(1)}(x) & \cdots & y_n^{(1)}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & \cdots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \cdots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} \tag{9.2.4}$$

[2]La parola wronskiano deriva da Wronski, nome di un matematico polacco (1778-1853)

Teniamo ora presente che $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sono integrali dell'equazione differenziale (9.2.3), i.e. che risulta:

$$y^{(n)} = -\left(a_1(x)\, y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)\, y(x)\right)$$

e quindi si vede subito che il determinante al secondo membro della (9.2.4) si può scomporre nella somma di n determinanti, dei quali il primo è eguale a:

$$-a_1(x)\, W(x)$$

e gli altri $n-1$ sono nulli avendo due righe proporzionali.
In definitiva si ha sempre:

$$W'(x) = -a_1(x)\, W(x)\,. \tag{9.2.5}$$

Osservazione 108 Dalla (9.2.5) moltiplicando ambo i membri per:

$$e^{\int_{x_0}^{x} a_1(t)dt}$$

risulta:

$$e^{\int_{x_0}^{x} a_1(t)dt}\left[W'(x) + a_1(x)\, W(x)\right] = 0$$

ossia:

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int_{x_0}^{x} a_1(t)dt} \cdot W(x)\right] = 0,$$

da cui si ricava:

$$e^{\int_{x_0}^{x} a_1(t)dt} \cdot W(x) = \text{costante},$$

in tutto I. Ma per $x = x_0$ il primo membro di quest'ultima relazione vale $W(x_0)$, e quindi, in tutto I, si ha:

$$e^{\int_{x_0}^{x} a_1(t)dt} \cdot W(x) = W(x_0)\,,$$

da cui si deduce che:

$$W(x) = W(x_0) \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(t)dt}\,. \tag{9.2.6}$$

tale relazione è nota, in letteratura, come **formula di Liouville**.

E' evidente quindi che:

Teorema 9.6 *Il wronskiano di $y_1, y_2, \ldots, y_n$ è un integrale dell'equazione $y' + a_1(x)\, y$.*

Sussiste anche il seguente:

Teorema 9.7 (Teorema del wronskiano) *Il wronskiano di n integrali dell'equazione differenziale lineare omogenea (9.2.3), o è identicamente nullo oppure non si annulla mai nell'intervallo I.*

Dimostrazione — Infatti, se $W(x)$ non è identicamente nullo, esiste in I un punto x_0 in cui riesce $W(x_0) \neq 0$, ma allora dalla (9.2.6) segue che è sempre, in tutto I, $W(x) \neq 0$. □

Dati dunque n integrali della (9.2.3) il loro wronskiano o è sempre diverso da zero in I oppure è identicamente nullo. nel primo caso si dice che gli n integrali sono **indipendenti**, nel secondo caso che sono **dipendenti**.
Vale il seguente:

Teorema 9.8 *Consideriamo l'equazione omogenea (9.2.3), gl'integrali*

$$y_1, y_2, \ldots, y_n$$

e il loro wronskiano $W(x)$.
Le tre proprietà seguenti sono equivalenti:

α) *Gli integrali $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sono linearmente dipendenti;*

β) $W(x) = 0 \qquad \forall x \in I$;

γ) $\exists x_0 \in I : W(x_0) = 0$

Conseguentemente gl'integrali $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sono linearmente indipendenti se e solo se il loro wronskiano è privo di zeri in I.

Dimostrazione —
$\alpha) \Rightarrow \beta)$ Per ipotesi $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sono linearmente dipendenti. Allora almeno uno di tali integrali è una combinazione lineare dei rimanenti. Da ciò deriva che nel determinante wronskiano di essi almeno una colonna è combinazione lineare delle rimanenti. Da ciò, per una nota proprietà dei determinanti, segue che $W(x) = 0 \quad \forall x \in I$ c.v.d.
$\beta) \Rightarrow \gamma)$. Banale.
$\gamma) \Rightarrow \alpha)$ Per ipotesi $\exists x_0 \in I : W(x_0) = 0$. Consideriamo il seguente sistema lineare omogeneo di n equazioni nelle n incognite $c_1, c_2, \ldots, c_n$:

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + \ldots + c_n y_n(x_0) & = & 0 \\ c_1 y_1'(x_0) + \ldots + c_n y_n'(x_0) & = & 0 \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \ldots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) & = & 0 \end{cases}$$

Il determinante dei coefficienti di tale sistema è proprio il wronskiano $W(x_0)$, che per ipotesi è nullo.

Pertanto il sistema considerato ammette almeno una soluzione non banale, i.e. non nulla, che indicheremo con $(\bar{c}_1, \bar{c}_2, \ldots, \bar{c}_n)$.
Consideriamo ora la funzione:

$$y(x) = \bar{c}_1 y_1(x) + \bar{c}_2 y_2(x) + \ldots + \bar{c}_n y_n(x).$$

tale funzione è un integrale della (9.2.3) perchè è una combinazione lineare di integrali della (9.2.3); inoltre verifica le condizioni iniziali

$$y(x_0) = 0, y'(x_0) = 0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

[Infatti si ha ad esempio

$$y'(x_0) = \bar{c}_1 y_1'(x) + \bar{c}_2 y_2(x) + \ldots + \bar{c}_n y_n'(x) = 0$$

perchè il vettore numerico $(\bar{c}_1, \bar{c}_2, \ldots, \bar{c}_n)$ è soluzione del sistema di equazioni considerato.]
Conseguentemente, per il teorema sulle equazioni lineari omogenee di ordine n dedotto dal teorema di esistenza e unicità (i.e. il teorema 9.5)si ha:

$$y(x) = 0 \qquad \forall x \in I$$

tale eguaglianza, perchè le costanti $(\bar{c}_1, \bar{c}_2, \ldots, \bar{c}_n)$ non sono tutte nulle, ci dice che gl'integrali $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sono linearmente dipendenti: c.v.d. $\square$

Osservazione 109 Il teorema del wronskiano (cfr. teorema 9.7) può essere dimostrato anche osservando che per l'equivalenza tra le proprietà β) e γ) del teorema precedente, se il wronskiano si annulla in un punto $x_0 \in I$, allora esso si annulla in ogni punto di I.

Teorema 9.9 (Ricerca dell'integrale generale) *Consideriamo un'equazione differenziale lineare omogenea di ordine n*

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)\, y(x) = 0$$

i.e. la (9.2.3) con coefficienti definiti e continui in un intervallo I e consideriamo n integrali di essa $y_1, y_2, \ldots, y_n$.
Vale la seguente implicazione:

$$\left(\begin{array}{c}\text{Gl'integrali sono linearmente}\\ \text{indipendenti}\end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{l}\text{La combinazione lineare}\\ y = c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x)\\ \text{al variare di } c_1, c_2, \ldots, c_n \text{ in}\\ \mathbb{R} \text{ fornisce la totalità degli}\\ \text{integrali della (9.2.3)}\\ \text{i.e. fornisce l'integrale}\\ \text{generale della (9.2.3)}\end{array}\right)$$

Dimostrazione — Detto $z(x)$ un integrale della (9.2.3), dobbiamo far vedere che l'integrale $z(x)$ si può ottenere dalla combinazione lineare

$$y = c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x)$$

particolarizzando le costanti. A tale scopo, fissato a piacere un punto $x_0 \in I$, consideriamo gli n numeri reali

$$h_0, h_1, \ldots, h_{n-1}$$

definiti come segue:

$$h_0 \overset{\text{def}}{=} z(x_0), h_1 = z'(x_0), \ldots, h_{n-1} = z^{(n-1)}(x_0)$$

Consideriamo ora il seguente sistema lineare non omogeneo di n equazioni nelle n incognite $c_1, c_2, \ldots, c_n$:

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + \ldots + c_n y_n(x_0) & = & h_0 \\ c_1 y_1'(x_0) + \ldots + c_n y_n'(x_0) & = & h_1 \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \ldots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) & = & h_{n-1} \end{cases}$$

Il determinante dei coefficienti di tale sistema è il wronskiano $W(x_0)$ che è non nullo perchè gl'integrali $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sono linearmente indipendenti. Pertanto il sistema ammette una ed una sola soluzione che indicheremo con $\left(c_1^0, c_2^0, \ldots, c_n^0\right)$.
Consideriamo ora la funzione:

$$y_0(x) = c_1^0 y_1(x) + \ldots + c_n^0 y_n(x).$$

Questa funzione è un integrale della 9.2.3; inoltre verifica le seguenti condizioni iniziali

$$y_0(x) = h, y_0'(x_0) = h_1, \ldots, y_0^{(n-1)}(x_0) = h_{n-1}$$

e cioè verifica le stesse condizioni iniziali verificate dall'integrale $z(x)$. Pertanto per il teorema di esistenza e unicità si ha:

$$z(x) = y_0(x) \qquad \forall x \in I$$

i.e. $z(x) = c_1^0 y_1(x) + \ldots + c_n^0 y_n(x) \qquad \forall x \in I$. L'eguaglianza scritta ci dice che l'integrale $z(x)$ si può ottenere dalla combinazione lineare

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$$

particolarizzando le costanti. c.v.d. □

Osservazione 110 Per il teorema ora visto è chiaro che:

Teorema 9.10 *Lo spazio vettoriale J_0 ha dimensione n.*

Osservazione 111 Per il teorema ora visto, per cercare l'integrale generale dell'equazione omogenea (9.2.3) basta trovare una n-pla d'integrali linearmente indipendenti di tale equazione.
Per questo motivo ogni n-pla d'integrali linearmente indipendenti della (9.2.3)

$$(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

si chiama **un sistema fondamentale d'integrali della (9.2.3)**.
Si può dimostrare che esistono infiniti sistemi fondamentali di integrali della (9.2.3).

Osservazione 112 Per il teorema visto i singoli integrali dell'equazione omogenea (9.2.3) si possono ottenere da una combinazione lineare

$$y = c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x)$$

di n integrali linearmente indipendenti della (9.2.3) **particolarizzando le costanti** $c_1, c_2, \ldots, c_n$. E' proprio per tale motivo che i singoli integrali dell'equazione (9.2.3) sono chiamati **integrali particolari**.

Osservazione 113 Per il teorema visto, se gl'integrali $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ sono linearmente indipendenti, la combinazione lineare $y = c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x)$ può essere considerata come una funzione reale della variabile reale x e degli n parametri costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$, i.e. come una funzione reale del tipo

$$y = y(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

che al variare dei parametri costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$ in $\mathbb{R}$ fornisce tutti e soli gl'integrali della (9.2.3). Ciò spiega la definizione d'integrale generale per le equazioni lineari, complete o omogenee, i.e. la seguente:

Definizione 97 *Consideriamo un'equazione lineare*

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\, y = f(x)$$

completa o omogenea, con coefficienti e termine noto definiti e continui in un intervallo I. Si chiama ***integrale generale*** *dell'equazione considerata ogni funzione reale del tipo*

$$y = y(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

definita in $I \times \mathbb{R}^n$, la quale, al variare dei parametri costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$ in $\mathbb{R}$, fornisce tutti e soli gl'integrali dell'equazione considerata.

Osservazione 114 Si noti che mentre l'integrale generale di un'equazione lineare di ordine n definito come **l'insieme** di tutti gli integrali è unico, l'integrale generale definito come **funzione** del tipo $y = y\left(x, c_1, c_2, \ldots, c_n\right)$ che fornisce tutti e soli gl'integrali dell'equazione lineare non è unico.
Infatti, se la funzione $y = y\left(x, c_1, c_2, \ldots, c_n\right)$ è un integrale generale di un'equazione lineare, anche le funzioni:

$$y = y\left(x, 2c_1, 2c_2, \ldots, 2c_n\right) \quad , \quad y = y\left(x, 3c_1, 3c_2, \ldots, 3c_n\right) \quad , \quad \ldots$$

sono integrali generali.
Nella teoria delle equazioni lineari, quando si parla d'integrale generale, si preferisce far riferimento all'integrale generale definito come **l'insieme** di tutti gl'integrali **di un'**equazione, e non come una funzione. Il teorema prima visto, tenendo presente la definizione testè data d'integrale generale può essere rienunciato come segue:

Teorema 9.11 *Consideriamo un'equazione lineare omogenea di ordine n*

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\, y = 0$$

con coefficienti definiti e continui in I e consideriamo n integrali di essa $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Vale l'implicazione:

$$\left(\begin{array}{c} y_1, y_2, \ldots, y_n \text{ sono linearmente} \\ \text{indipendenti} \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{l} \text{La combinazione lineare} \\ y = c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x)\,, \\ \text{considerata come una funzione} \\ \text{del tipo } y = y\left(x, c_1, c_2, \ldots, c_n\right) \\ \text{definita in } I \times \mathbb{R}, \text{ è un integrale} \\ \text{generale della (9.2.3)} \end{array}\right)$$

9.3 Equazioni non omogenee (o complete).

Passiamo ora allo studio delle equazioni differenziali lineari d'ordine n non omogenee, i.e. delle equazioni del tipo:

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = g(x)\,, \tag{9.3.1}$$

ove le funzioni $a_1, a_2, \ldots, a_n, g$ le supporremo sempre continue nell'intervallo chiuso $I \subseteq \mathbb{R}$.
Chiamasi **equazione omogenea associata** alla (9.3.1), l'equazione stessa resa omogenea, i.e. l'equazione:

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = 0 \tag{9.3.2}$$

Per le equazioni lineari non omogenee sussiste il seguente:

Teorema 9.12 *Se si conosce un integrale y_0 dell'equazione non omogenea (9.3.1), aggiungendo ad esso un qualsiasi integrale φ dell'equazione omogenea associata (9.3.2), si ottiene una funzione*

$$y_0 + \varphi$$

che è ancora un integrale della equazione non omogenea (9.3.1).
Viceversa, ogni integrale della equazione non omogenea (9.3.1) può essere ottenuto in questo modo, i.e. aggiungendo a y_0 un integrale dell'equazione omogenea associata (9.3.2).

Dimostrazione — Siccome, per ipotesi, y_0 è un integrale della equazione (9.3.1) e φ un integrale della (9.3.2), risulta:

$$y_0^{(n)}(x) + a_1(x)\, y_0^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)\, y_0(x) = g(x),$$

$$\varphi^{(n)}(x) + a_1(x)\, \varphi^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)\, \varphi_n(x) = 0;$$

addizionando membro a membro queste due identità, si ottiene:

$$(y_0(x) + \varphi(x))^{(n)} + a_1(x)\,(y_1(x) - \varphi(x))^{(n-1)} + \\ + \ldots + a_n(x)\,(y_0(x) - \varphi(x)) = g(x),$$

il che prova la prima affermazione fatta, i.e. che la funzione

$$(y_0(x) + \varphi(x))$$

è un integrale dell'equazione non omogenea (9.3.1).

Per la seconda affermazione fatta, basta far vedere che, detto y_1 un *qualsiasi* altro integrale dell'equazione non omogenea (9.3.1), la funzione differenziale

$$\psi = y_1 - y_0$$

è una soluzione dell'equazione omogenea associata (9.3.2).
Infatti per ipotesi, è:

$$y_1^{(n)}(x) + a_1(x)\, y_1^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)\, y_1(x) = g(x),$$
$$y_0^{(n)}(x) + a_1(x)\, y_0^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)\, y_0(x) = g(x)$$

donde sottraendo membro a membro:

$$(y_1(x) - y_0(x))^{(n)} + a_1(x)\,(y_1(x) - y_0(x))^{(n-1)} + \\ + \ldots + a_n(x)\,(y_1(x) - y_0(x)) = 0$$

il che prova che la funzione $\psi = y_1 - y_0$ è un integrale dell'equazione omogenea associata (9.3.2), e quindi che y_1 si ottiene sommando a y_0 un conveniente integrale della (9.3.2). □

Questo teorema mostra che per ottenere tutti gli integrali dell'equazione non omogenea (9.3.1) si può procedere così:

1. determinare tutti gli integrali dell'equazione omogenea (9.3.2);
2. determinare un integrale qualsiasi $y_0(x)$ dell'equazione non omogenea (9.3.1).

Dopo di ciò **tutti** gli integrali dell'equazione non omogenea (9.3.1) si ottengono sommando ad y_0 successivamente gli integrali della (9.3.2).

Poichè tutti gli integrali dell'equazione omogenea associata si ottengono dal suo integrale generale, al variare delle n costanti arbitrarie, possiamo enunciare la seguente regola:
L'integrale generale dell'equazione differenziale lineare di ordine n non omogenea (9.3.1), si ottiene aggiungendo all'integrale generale dell'equazione lineare omogenea ad essa associata (9.3.2), un integrale particolare qualsiasi dell'equazione non omogenea (9.3.1), i.e. esso è dato dalla relazione:

$$y(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x) + y_0(x) \tag{9.3.3}$$

ove $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ è un sistema fondamentale di integrali della (9.3.2, y_0 un integrale qualsiasi della (9.3.1) e $c_1, c_2, \ldots, c_n$ costanti arbitrarie.

9.4 Il metodo di Lagrange per l'integrazione delle equazioni differenziali lineari non omogenee.

Consideriamo un'equazione differenziale lineare completa:

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)\, y(x) = f(x) \tag{9.4.1}$$

con coefficienti e termine noto definiti e continui in un intervallo I.
Consideriamo poi l'equazione omogenea associata alla (9.4.1)

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)\, y(x) = 0 \tag{9.4.2}$$

Supponiamo ora che sia noto l'integrale generale dell'equazione omogenea (9.4.2). Ciò equivale a supporre che siano noti n integrali linearmente indipendenti della (9.4.2), $y_1, y_2, \ldots, y_n$, dato che, come sappiamo, l'integrale generale della (9.4.2) è fornito dalla combinazione lineare

$$y = c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x)$$

al variare delle costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$ in $\mathbb{R}$.
Il metodo di Lagrange è un *metodo che **serve** a trovare un integrale particolare u dell'equazione completa (9.4.1) nell'ipotesi da noi fatta che sia noto*

l'integrale generale dell'omogenea associata (9.4.2).
L'importanza di questo metodo è dovuta al fatto che, una volta che è stato determinato con esso un integrale particolare u dell'equazione completa (9.4.1), resta determinato anche l'integrale generale dell'equazione completa (9.4.1).
infatti, poichè com'è noto risulta

$$J = J_0 + u,$$

l'integrale generale della equazione completa (9.4.1) sarà fornito dalla funzione:

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x) + u(x)$$

al variare di $c_1, c_2, \ldots, c_n$ in $\mathbb{R}$.

Osservazione 115 Si noti che i singoli integrali dell'equazione completa (9.4.1) si possono ottenere dalla funzione

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x) + u(x)$$

particolarizzando le costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Questo è il motivo per cui anche i singoli integrali dell'equazione completa (9.4.1) si chiamano integrali **particolari**.

Il metodo di Lagrange **consiste** nel cercare un integrale particolare u dell'equazione completa (9.4.1) del tipo:

$$u(x) = \gamma_1(x) y_1(x) + \gamma_2(x) y_2(x) + \ldots + \gamma_n(x) y_n(x)$$

dove

$$\gamma_1(x), \gamma_2(x), \ldots, \gamma_n(x)$$

sono n funzioni derivabili incognite da determinare. In altri termini il metodo di Lagrange **consiste nel cercare** un integrale particolare u dell'equazione completa (9.4.1) che abbia l'espressione formale che si ottiene dalla combinazione lineare

$$y = c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x),$$

che fornisce l'integrale generale dell'omogenea associata, sostituendo alle costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$ delle funzioni derivabili incognite $\gamma_1(x), \gamma_2(x), \ldots, \gamma_n(x)$ da determinare; per tale motivo il metodo di Lagrange è anche detto **metodo della variazione delle costanti**.
Per determinare le funzioni derivabili incognite $\gamma_1(x), \gamma_2(x), \ldots, \gamma_n(x)$ in modo tale che la funzione

$$u(x) = \gamma_1(x) y_1(x) + \ldots + \gamma_n(x) y_n(x)$$

sia un integrale particolare dell'equazione completa (9.4.1), si sfrutta il seguente:

Teorema 9.13 *Se le derivate $\gamma_1', \gamma_2', \ldots, \gamma_n'$ delle n funzioni derivabili incognite $\gamma_1(x), \gamma_2(x), \ldots, \gamma_n(x)$ soddisfano il seguente sistema di n equazioni nelle n incognite $\gamma_1', \gamma_2', \ldots, \gamma_n'$*

$$\begin{cases} \gamma_1' y_1 + \gamma_2' y_2 + \ldots + \gamma_n' y_n & = & 0 \\ \gamma_1' y_1' + \gamma_2' y_2' + \ldots + \gamma_n' y_n' & = & 0 \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_1' y_1^{(n-1)} + \gamma_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + \gamma_n' y_n^{(n-1)} & = & f \end{cases} \tag{9.4.3}$$

la funzione $u(x) = \gamma_1(x) y_1(x) + \gamma_2(x) y_2(x) + \ldots + \gamma_n(x) y_n(x)$ è un integrale particolare dell'equazione completa (9.4.1).

Dimostrazione — Omessa. □

Osservazione 116 Si osservi che il sistema (9.4.3) è un sistema lineare non omogeneo di n equazioni nelle n incognite $\gamma_1', \gamma_2', \ldots, \gamma_n'$.
Il determinante dei coefficienti di tale sistema è il wronskiano degli n integrali $y_1, y_2, \ldots, y_n$ dell'equazione omogenea (9.4.2).
Poichè tali integrali sono linearmente indipendenti, si ha:

$$W(x) \neq 0 \qquad \forall x \in I.$$

Pertanto il sistema (9.4.3) permette di determinare in modo univoco l'incognite $\gamma_1', \gamma_2', \ldots, \gamma_n'$.
Applicando la regola di Kramer si ha ad esempio:

$$\gamma_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 & \cdots & y_n \\ 0 & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f(x) & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}}{W(x)} \overset{\text{Regola di Laplace}}{=} f(x) \frac{W_1(x)}{W(x)}$$

avendo indicato con $W_1(x)$ il complemento algebrico dell'ultimo elemento della prima colonna di $W(x)$.
In generale si ha

$$\gamma_k' = f(x) \frac{W_k(x)}{W(x)} \qquad \forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

avendo indicato con $W_k(x)$ il complemento algebrico dell'ultimo elemento della $k-$ma colonna di $W(x)$.
Determinate in tal modo le funzioni $\gamma_1', \gamma_2', \ldots, \gamma_n'$, si determinano le funzioni $\gamma_1(x), \gamma_2(x), \ldots, \gamma_n(x)$ con le n integrazioni indefinite:

$$\gamma_1 = \int \gamma' dx, \gamma_2 = \int \gamma_2' dx, \ldots, \gamma_n = \int \gamma_n' dx.$$

Si noti che le funzioni $\gamma_1(x), \gamma_2(x), \ldots, \gamma_n(x)$ vengono così determinate a meno di una costante additiva.
Per il teorema enunciato la funzione

$$u(x) = \gamma_1(x)\, y_1(x) + \gamma_2(x)\, y_2(x) + \ldots + \gamma_n(x)\, y_n(x)$$

è un integrale particolare dell'equazione completa (9.4.1).

9.5 Integrazione delle equazioni differenziali lineari.

9.5.1 L'equazione lineare del prim'ordine.

Consideriamo un'equazione lineare del 1^o ordine:

$$y' + a_1(x)\, y = f(x) \tag{9.5.1}$$

con il coefficiente $a_1(x)$ e il termine noto $f(x)$ definiti e continui in un intervallo (a, b).
Per integrare tale equazione, com'è noto, dobbiamo prima trovare l'integrale generale dell'omogenea associata e poi dobbiamo aggiungere a questo un integrale particolare della completa che possiamo trovare col metodo di Lagrange.
L'equazione omogenea associata alla (9.5.1) è l'equazione:

$$y' + a_1(x)\, y = 0 \tag{9.5.2}$$

E' utile ricordare che, per il teorema sulle equazioni lineari omogenee del 1^o ordine, un integrale $y(x)$ della (9.5.2) o è privo di zeri in (a, b) o è identicamente nullo in (a, b); nel caso che è privo di zeri esso sarà di segno costante.
L'equazione omogenea (9.5.2)è detta un'**equazione a variabili separabili**, perchè, essendo

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

con $dy \stackrel{\text{def}}{=} y'(x)\, dx$ (funzione di x e dx), essa si può scrivere nelle seguenti forme:

$$\frac{dy}{dx} = -a_1(x)\, y$$

e

$$\frac{dy}{y} = -a_1(x)\, dx \tag{9.5.3}$$

e nella forma (9.5.3) il simbolo y che indica la variabile dipendente (i.e. la funzione incognita $y(x)$) si trova solo al 1^o membro, mentre il simbolo x che indica la variabile indipendente si trova solo a 2^o membro.
Quando la (9.5.2) è scritta nella forma (9.5.3) si dice che **si sono separate le variabili**. Più in generale si chiama *equazione a variabile separabili* un'equazione del tipo

$$y' = u(x)\, v(y)$$

dato che un'equazione di tale tipo si può scrivere nella forma

$$\frac{dy}{v\,(y)} = u\,(x)\,dx.$$

Si noti però che le equazioni (9.5.2) e (9.5.3) **non** sono equivalenti perchè la (9.5.2) ammette l'integrale identicamente nullo in (a, b), mentre la (9.5.3) non ammette tale integrale.
Ciò che si può dire è che gl'integrali della (9.5.3) sono tutti e soli gl'integrali privi di zeri della (9.5.2).

Per trovare l'integrale della (9.5.3), diciamo $y\,(x)$ un generico integrale della (9.5.3). Poichè $y\,(x)$ verifica l'eguaglianza (9.5.3), $y\,(x)$ verifica anche l'eguaglianza:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int a_1\,(x)\,dx$$

Ora l'integrale

$$\int \frac{dy}{y},$$

per la formula d'integrazione indefinita per sostituzione, si calcola come se y fosse una variabile indipendente e quindi si ha:

$$\int \frac{dy}{y} = \log|y| + c.$$

Detta poi $A\,(x)$ una primitiva di $a_1\,(x)$ si ha:

$$-\int a_1\,(x)\,dx = -A\,(x) + c.$$

Dall'eguaglianza

$$\int \frac{dy}{y} = -\int a_1\,(x)\,dx$$

si deduce che $\log|y|$ e $-A\,(x)$ sono primitive di una stessa funzione e precisamente della funzione $-a_1\,(x)$. Conseguentemente si ha che:

$$\exists k \in \mathbb{R} : \log|y| = -A\,(x) + k.$$

Da tale eguaglianza si deduce che:

$$|y| = \mathrm{e}^k\,\mathrm{e}^{-A(x)}\,.$$

Da questa eguaglianza, tenendo presente che l'integrale y è di segno costante e quindi la funzione $|y|$ coincide o con la funzione $+y$ o con la funzione $-y$, si deduce l'eguaglianza:

$$y = \pm\,\mathrm{e}^k\,\mathrm{e}^{-A(x)} \;\text{ con }\; \begin{cases} + & \text{se è } y\,(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b) \\[2ex] - & \text{se è } y\,(x) < 0 \quad \forall x \in (a, b) \end{cases}$$

Da tale eguaglianza, posto $c = \pm\, \mathrm{e}^k$ si deduce l'eguaglianza[3]:

$$y = c\,\mathrm{e}^{-A(x)} \quad \text{con } c \in \mathbb{R} - \{0\} \tag{9.5.4}$$

Dunque abbiamo visto che un generico integrale y della (9.5.3) ha un'espressione del tipo (9.5.4).
Ripercorrendo il procedimento all'inverso si vede che vale anche il viceversa e cioè che ogni funzione y che ha un'espressione del tipo (9.5.4) è un integrale della (9.5.3).
pertanto la funzione (9.5.4) al variare di c in $\mathbb{R} - \{0\}$ fornisce tutti e soli gl'integrali della (9.5.3) e quindi tutti e soli gl'integrali della (9.5.2) privi di zeri in (a, b).
Si osservi ora che per $c = 0$ la funzione (9.5.4) fornisce l'integrale nullo della (9.5.2) che è stato escluso quando si sono separate le variabili.
Pertanto la funzione:

$$y = c\,\mathrm{e}^{-A(x)} \ \text{con } c \in \mathbb{R}, \tag{9.5.5}$$

al variare di c in $\mathbb{R}$, fornisce la totalità degli integrali della (9.5.2) i.e. fornisce l'integrale generale della (9.5.2).
Il metodo con cui è stata integrata l'equazione omogenea (9.5.2) si chiama **metodo di separazione delle variabili**.
Per trovare ora un integrale particolare dell'equazione completa (9.5.1), useremo il metodo di Lagrange i.e. cercheremo un integrale particolare della (9.5.1) del tipo:

$$u = \gamma(x)\,\mathrm{e}^{-A(x)}$$

dove $\gamma(x)$ è una funzione derivabile incognita da determinare.
Per il teorema visto nel metodo di Lagrange, la funzione $u = \gamma(x)\,\mathrm{e}^{-A(x)}$ è un integrale della equazione completa (9.5.1) se $\gamma'(x)$ soddisfa la condizione

$$\gamma'(x)\,\mathrm{e}^{-A(x)} = f(x)\,. \tag{9.5.6}$$

E' da notare però che in questo caso, poichè c'è una sola funzione incognita da determinare, i.e. $\gamma(x)$, non è necessario applicare il teorema visto nel metodo di Lagrange: per determinare $\gamma(x)$ basta semplicemente imporre che la funzione $u = \gamma(x)\,\mathrm{e}^{-A(x)}$ sia un integrale dell'equazione completa (9.5.1), i.e. basta imporre che risulti:

$$u'(x) + a_1(x)\,u(x) = f(x)\,.$$

Ciò facendo si ha:

$$\gamma'(x)\,\mathrm{e}^{-A(x)} + \gamma(x)\,\mathrm{e}^{-A(x)}\,(-a_1(x)) + a_1(x)\,\gamma(x)\,\mathrm{e}^{-A(x)} = f(x)$$

e cioè, semplificando , si ha:

$$\gamma'(x)\,\mathrm{e}^{-A(x)} = f(x)$$

[3]Valida per c opportuna costante non nulla.

Come si vede, imponendo che u sia un integrale dell'equazione completa (9.5.1), abbiamo ritrovato la stessa condizione (9.5.6) fornita del teorema visto nel metodo di Lagrange, senza utilizzare tale teorema. Ricavando $\gamma'(x)$ si ha:

$$\gamma'(x) = f(x)\,\mathrm{e}^{A(x)} \quad , \quad \gamma(x) = \int f(x)\, e^{A(x)} dx$$

e quindi si ha:

$$u = \mathrm{e}^{-A(x)} \int f(x)\,\mathrm{e}^{A(x)}\, dx.$$

Pertanto l'integrale generale della equazione completa (9.5.1) è fornito dalla funzione:

$$y = c\,\mathrm{e}^{-A(x)} + \mathrm{e}^{-A(x)} \int f(x)\,\mathrm{e}^{A(x)}\, dx. \tag{9.5.7}$$

al variare di c in $\mathbb{R}$, dove $A(x)$ indica una primitiva di $a_1(x)$ e dove l'integrale a 2^o membro indica una primitiva scelta a piacere della funzione $f(x)\,\mathrm{e}^{A(x)}$.

Osservazione 117 Quando in un esercizio si deve integrare una equazione lineare del 1^o ordine, è consuetudine non utilizzare la formula (9.5.7), anche perchè è difficile ricordarla a memoria.
l'integrazione andrà dunque fatta ripetendo in forma sintetica il procedimento esposto in generale; i.e. si troverà prima l'integrale generale dell'omogenea associata applicando il metodo della separazione delle variabili, poi si troverà un'integrale particolare della completa applicando il metodo di Lagrange.

Esercizio — Integrare l'equazione

$$y' - y \cdot \cos x = \frac{\mathrm{e}^{\sin x}}{1 + x^2} \tag{9.5.8}$$

L'equazione (9.5.8) è un'equazione lineare completa del 1^o ordine.
L'equazione omogenea associata alla (9.5.8) è l'equazione:

$$y' - y \cdot \cos x = 0 \tag{9.5.9}$$

L'equazione (9.5.9) è a variabili separabili e separando le variabili si scrive:

$$\frac{dy}{y} = \cos x dx \tag{9.5.10}$$

Gl'integrali della (9.5.10) sono tutti gl'integrali privi di zeri della (9.5.9). Per integrare la (9.5.10), diciamo y un generico integrale della (9.5.10).
poichè y verifica l'eguaglianza (9.5.10), y verifica anche l'eguaglianza:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \cos x dx.$$

Da tale eguaglianza segue che: $\exists k \in \mathbb{R} : \log|y| = \sin x + k$, e quindi si ha:

$$|y| = \mathrm{e}^k\, \mathrm{e}^{\sin x}\,.$$

Da tale eguaglianza, poichè l'integrale y è di segno costante, segue che:

$$y = \pm\, \mathrm{e}^k \cdot \mathrm{e}^{\sin x} \ \text{ con } \begin{cases} + & \text{se è } y\,(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \\ - & \text{se è } y\,(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Da tale eguaglianza, posto $c = \pm\, \mathrm{e}^k$, si deduce l'eguaglianza:

$$y = c\, \mathrm{e}^{\sin x} \ \text{ con } c \in \mathbb{R} - \{0\} \tag{9.5.11}$$

La (9.5.11) al variare di c in $\mathbb{R} - \{0\}$ fornisce tutti e soli gl'integrali della (9.5.10) e quindi tutti e soli gl'integrali privi di zeri della (9.5.9).
Poichè per $c = 0$ la funzione (9.5.11) fornisce l'integrale nullo della (9.5.9), che era stato escluso quando si sono separate le variabili, la funzione

$$y = c\, \mathrm{e}^{\sin x} \ \text{ con } c \in \mathbb{R} \tag{9.5.12}$$

al variare di c in $\mathbb{R}$ fornisce la totalità degl'integrali della (9.5.9) i.e. l'integrale generale della (9.5.9).

Determiniamo ora un integrale particolare della equazione completa (9.5.8) applicando il metodo di Lagrange, e i.e. cerchiamo un integrale particolare della completa (9.5.8) del tipo

$$u = \gamma\,(x)\, \mathrm{e}^{\sin x}\,.$$

per determinare $\gamma\,(x)$ imponiamo che u sia soluzione della (9.5.8). Ciò facendo, si ha:

$$\gamma'\,(x)\, \mathrm{e}^{\sin x} + \gamma\,(x)\, \mathrm{e}^{\sin x} \cos x - \gamma\,(x)\, \mathrm{e}^{\sin x} \cos x = \frac{\mathrm{e}^{\sin x}}{1 + x^2}$$

Semplificando si ha:

$$\gamma'\,(x)\, \mathrm{e}^{\sin x} = \frac{\mathrm{e}^{\sin x}}{1 + x^2}$$

e quindi:

$$\gamma'\,(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

i.e.

$$\gamma\,(x) = \int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x + c$$

Pertanto un integrale particolare della completa è la funzione

$$u = \operatorname{arctg} x \cdot \mathrm{e}^{\sin x}\,.$$

L'integrale generale della completa è quindi fornito dalla funzione:

$$y = c\,\mathrm{e}^{\sin x} + \operatorname{arctg} x \cdot \mathrm{e}^{\sin x} \qquad \text{con } c \in \mathbb{R} \tag{9.5.13}$$

al variare di c in $\mathbb{R}$.

• • •

Consideriamo ora il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - y \cdot \cos x &= \frac{\mathrm{e}^{\sin x}}{1+x^2} \\ \\ y\,(0) &= 10 \end{cases}$$

Per risolvere tale problema, considerata la funzione (9.5.13), si deve determinare la costante c in modo che risulti $y\,(0) = 10$. A tale scopo osserviamo che:

$$y\,(0) = 10 \Leftrightarrow \left[c\,\mathrm{e}^{\sin x} + \operatorname{arctg} x \cdot \mathrm{e}^{\sin x}\right] = 10 \Leftrightarrow c = 10.$$

Pertanto la soluzione del problema di Cauchy considerato è la funzione:

$$y = 10\,\mathrm{e}^{\sin x} + \operatorname{arctg} x \cdot \mathrm{e}^{\sin x}$$

■

9.5.2 Le equazioni lineari omogenee a coefficienti costanti.

Consideriamo un'equazione lineare omogenea di ordine n a coefficienti costanti e cioè un'equazione del tipo:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0 \tag{9.5.14}$$

con $a_1, a_2, \ldots, a_n$ costanti reali.
Un'equazione di questo tipo è **importantissima** sia perchè si presenta spesso nelle applicazioni, sia perchè il suo integrale generale si può trovare con relativa facilità con un metodo detto **metodo dell'equazione algebrica caratteristica**.
Il metodo dell'equazione algebrica caratteristica consiste nel cercare integrali della (9.5.14) del tipo

$$y = e^{\lambda x}$$

con λ reale o complesso e x variabile reale.
A questo proposito ricordiamo che :

$\forall \lambda = \alpha + j\beta \in \mathbb{C}$ e $\forall x \in \mathbb{R}$ risulta:

$$\mathrm{e}^{\lambda \mathrm{x}} = \mathrm{e}^{\alpha x}\left(\cos \beta x + j \sin \beta x\right)$$

Al fine di ricercare integrali della (9.5.14) del tipo $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ si utilizza il seguente:

Teorema 9.14 *Sia λ un numero reale o complesso. vale la seguente equivalenza:*

$$\begin{pmatrix} \text{La funzione } y = \mathrm{e}^{\lambda x} \\ \text{è un integrale della (9.5.14)} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda \text{ è una radice della} \\ \text{equazione algebrica} \\ \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \end{pmatrix}$$

Dimostrazione — Ricordiamo che risulta

$$D^k\,\mathrm{e}^{\lambda x} = \lambda^k\,\mathrm{e}^{\lambda x} \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Conseguentemente valgono le seguenti equivalenze:

$$y = \mathrm{e}^{\lambda x} \text{ è un integrale della (9.5.14)} \Leftrightarrow \lambda^n\,\mathrm{e}^{\lambda x} + a_1\lambda^{n-1}\,\mathrm{e}^{\lambda x} + \ldots + a_n\,\mathrm{e}^{\lambda x} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e^{\lambda x}\left(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n\right) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda \text{ è radice dell'equazione algebrica } \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0\ .$$

Il teorema è dimostrato. □

Osservazione 118 il teorema precedente riconduce l'integrazione della equazione differenziale (9.5.14) alla risoluzione dell'equazione algebrica

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \tag{9.5.15}$$

Tale equazione si chiama l'equazione algebrica caratteristica dell'equazione differenziale (9.5.14), coerentemente col fatto che essa è un'equazione algebrica completamente individuata quando è assegnata l'equazione differenziale (9.5.14). Si osservi a tale proposito che l'equazione algebrica (9.5.15) si ottiene formalmente dall'equazione differenziale (9.5.14) sostituendo a ogni derivata $y^{(k)}$ la potenza λ^k e in particolare sostituendo alla funzione $y \equiv y^{(0)}$ la potenza $\lambda^0 \equiv 1$.

Il teorema visto permette già di integrare qualche semplice equazione omogenea a coefficienti costanti.
Consideriamo ad esempio l'equazione:

$$y'' - y = 0$$

L'equazione algebrica caratteristica di tale equazione è l'equazione

$$\lambda^2 - 1 = 0,$$

che ammette le radici $\lambda = 1$ e $\lambda = -1$.
Quindi per il teorema visto l'equazione differenziale ammette i due integrali

$$y_1 = \mathrm{e}^x \quad \text{e} \quad y_2 = \mathrm{e}^{-x}\,.$$

Poichè questi integrali sono linearmente indipendenti, la combinazione lineare

$$y = c_1\,\mathrm{e}^x + c_2\,\mathrm{e}^{-x}$$

fornisce, al variare di c_1 e c_2 in $\mathbb{R}$, l'integrale generale dell'equazione differenziale considerata.

L'equazione differenziale considerata è stata di facile integrazione perchè l'equazione algebrica ha radici che sono **reali** e **semplici** (i.e. di molteplicità 1).
Naturalmente avremmo avuto qualche difficoltà se l'equazione algebrica avesse avuto qualche radice complessa λ perchè in tal caso l'integrale corrispondente a λ, i.e. $\mathrm{e}^{\lambda x}$, sarebbe stato complesso e non reale.
Una difficoltà ancora più grande avremmo avuto se l'equazione algebrica invece di avere due radici distinte, avesse avuto un'unica radice λ di molteplicità 2, perchè, in tal caso, sfruttando il teorema visto, avremmo ottenuto un'unico integrale, $\mathrm{e}^{\lambda x}$, e non due integrali distinti.
E' naturale allora porsi i seguenti problemi:

1^o **problema**

E' noto che per ottenere l'integrale generale della (9.5.14) occorre trovare n integrali della (9.5.14), $y_1, y_2, \ldots, y_n$ che siano **reali** e **linearmente indipendenti** (e quindi a due a due distinti) .
Orbene, se l'equazione algebrica caratteristica (9.5.15) ammette qualche radice complessa $\lambda = \alpha + j\beta$, come faremo per ottenere integrali della (9.5.14) che siano tutti reali?
Osserviamo che, se l'equazione algebrica (9.5.15) ammette una radice complessa $\lambda = \alpha + j\beta$, essa ammette anche la radice coniugata

$$\bar{\lambda} = \alpha - j\beta,$$

dato che i coefficienti della (9.5.15) sono reali.
Pertanto l'equazione differenziale (9.5.14) ammetterà i due integrali complessi

$$\mathrm{e}^{\lambda x} \equiv \mathrm{e}^{\alpha x}\,(\cos\beta x + j\sin\beta x) \qquad \text{e} \qquad \mathrm{e}^{\bar{\lambda} x} \equiv \mathrm{e}^{\alpha x}\,(\cos\beta x - j\sin\beta x)$$

i quali sono coniugati.
Ora è possibile dimostrare che la (9.5.14) ammetterà come integrali anche la parte reale e il coefficiente della parte immaginaria di $\mathrm{e}^{\lambda x}$, i.e. le funzioni reali:

$$y_1 = \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x \qquad \text{e} \qquad y_2 = \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Infatti sussiste il seguente:

Teorema 9.15 *Consideriamo un'equazione differenziale lineare omogenea di ordine n:*

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\, y = 0$$

con coefficienti reali definiti e continui in un intervallo I.
Consideriamo poi una funzione complessa $\varphi + j\psi$ definita in I.
Le seguenti proprietà sono equivalenti:

α) *$\varphi + j\psi$ è un integrale (complesso) della (9.5.14);*

β) *φ e ψ sono integrali (reali) della (9.5.14);*

γ) *$\varphi - j\psi$ è un integrale (complesso) della (9.5.14).*

Conseguentemente, se un'equazione lineare omogenea con coefficienti reali definita e continua in un intervallo I ammette un integrale complesso $\varphi + j\psi$, essa ammette per integrale anche la parte reale φ, il coefficiente della parte immaginaria ψ, e il coniugato $\varphi - j\psi$ di tale integrale complesso.

Dimostrazione — Scriviamo l'equazione (9.5.14) nella forma $T(y) = 0$. Con lo stesso procedimento con cui si dimostra che l'operatore T è lineare si vede che risulta:

$$T(\varphi + j\psi) = T(\varphi) + jT(\psi) \quad ; \quad T(\varphi - j\psi) = T(\varphi) - jT(\psi)\,.$$

Da queste due eguaglianze segue facilmente che le proprietà α) β) e γ) sono equivalenti. c.v.d. □

Pertanto, per ottenere integrali della (9.5.14) che siano tutti reali, possiamo abbandonare gl'integrali complessi $\mathrm{e}^{\lambda x}$ e $\mathrm{e}^{\bar{\lambda} x}$ e prendere al loro posto i due integrali reali

$$y_1 = \mathrm{e}^{\alpha x} \cos \beta x \quad \text{e} \quad y_2 = \mathrm{e}^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Per questo motivo i due integrali reali $y_1 = \mathrm{e}^{\alpha x} \cos \beta x$ e $y_2 = \mathrm{e}^{\alpha x} \sin \beta x$ si chiamano per definizione i **due integrali reali corrispondenti ai due integrali complessi coniugati** $\mathrm{e}^{\lambda x}$ **e** $\mathrm{e}^{\bar{\lambda} x}$.

Osservazione 119 Si noti che anche la funzione

$$y_3 = -\,\mathrm{e}^{\alpha x} \sin \beta x$$

è un integrale reale della (9.5.14) perchè è il coefficiente della parte reale immaginaria dell'integrale $\mathrm{e}^{\bar{\lambda} x}$. Tuttavia sarebbe errato sostituire ai due integrali complessi $\mathrm{e}^{\lambda x}$ e $\mathrm{e}^{\bar{\lambda} x}$ i tre integrali reali

$$y_1 = \mathrm{e}^{\alpha x} \cos \beta x\ ,\ y_2 = \mathrm{e}^{\alpha x} \sin \beta x \text{ e } y_3 = -\,\mathrm{e}^{\alpha x} \sin \beta x,$$

perchè questi tre integrali reali non sono linearmente indipendenti.

2^o **problema**

Se l'equazione algebrica caratteristica (9.5.15) non ammette n radici distinte, e quindi ammette almeno una radice λ con molteplicità $k > 1$, come faremo per ottenere n integrali distinti dell'equazione (9.5.14)?
Evidentemente per fare ciò occorre ottenere in corrispondenza della radice λ, di molteplicità $k > 1$, k integrali distinti.
Ciò è possibile in virtù del seguente:

Teorema 9.16 *Sia λ un numero reale o complesso. vale la seguente implicazione:*

$$\begin{array}{lcl} & & \text{1) Le } k \text{ funzioni } \left\{x^{i-1}\,\mathrm{e}^{\lambda x}\right\}_{i=\{1,\ldots,k\}} \\ \lambda \text{ è una rad. di molteplicità} & & \text{sono integrali dell'eq.ne (9.5.14)} \\ k\,(\geqslant 1) \text{ dell'eq. (9.5.15)} & \Rightarrow & \text{2) La funzione } x^k\,\mathrm{e}^{\lambda x} \text{ non è un integ.} \\ & & \text{dell'equazione omogenea (9.5.14)} \end{array}$$

Grazie al teorema ora enunciato, poichè la somma delle molteplicità delle radici dell'equazione algebrica (9.5.15) è eguale a n, è possibile trovare n integrali distinti dell'equazione omogenea (9.5.14). Tra questi n integrali vi possono essere coppie d'integrali complessi coniugati. Poichè però queste coppie d'integrali complessi possono essere sostituite da coppie d'integrali reali, possiamo dire che grazie al teorema precedente è possibile trovare n integrali reali distinti dell'equazione omogenea (9.5.14).
Questi n integrali reali dell'equazione (9.5.14) si chiamano per definizione **gli n integrali reali dell'equazione (9.5.14) determinati col metodo dell'equazione algebrica caratteristica**.

3^o **problema**

Gli n integrali reali dell'equazione (9.5.14) determinati col metodo dell'equazione algebrica caratteristica sono linearmente indipendenti?
La risposta è affermativa in virtù del seguente:

Teorema 9.17 *Il wronskiano degli n integrali reali dell'equazione (9.5.14) determinati col metodo dell'equazione algebrica caratteristica è privo di zeri. Conseguentemente questi n integrali reali sono linearmente indipendenti.*

Esercizio — Integrare l'equazione differenziale

$$y^{(5)} + y^{(3)} = 0 \tag{9.5.16}$$

L'equazione (9.5.16) è un'equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti.
L'equazione algebrica caratteristica della (9.5.16) è l'equazione:

$$\lambda^5 + \lambda^3 = 0$$

che si può scrivere
$$\lambda^3\left(\lambda^2+1\right)=0.$$
tale equazione algebrica ammette le radici

$$\begin{array}{ll} \lambda=0 & \text{con molteplicità} \quad 3 \\ \lambda=j & \text{con molteplicità} \quad 1 \\ \lambda=-j & \text{con molteplicità} \quad 1 \end{array}$$

Quindi l'equazione (9.5.16) ammette i seguenti integrali:

$$y_1=\mathrm{e}^{0x}=1 \quad , \quad y_2=x\,\mathrm{e}^{0x}=x \quad , \quad y_3=x^2\,\mathrm{e}^{0x}=x^2;$$

$$\mathrm{e}^{jx}=\cos x+j\sin x \quad , \quad \mathrm{e}^{-jx}=\cos x-j\sin x$$

Le funzioni reali
$$y_4=\cos x \quad \text{e} \quad y_5=\sin x$$
sono i due integrali reali corrispondenti ai due integrali complessi coniugati e^{jx} e e^{-jx}.
la combinazione lineare:

$$y=c_1+c_2x+c_3x^2+c_4\cos x+c_5\sin x,$$

fornisce l'integrale generale della (9.5.16) al variare di $c_1, c_2, \ldots, c_5$ in $\mathbb{R}$. ■

Esercizio — integrare l'equazione differenziale

$$y''+y'+y=0 \tag{9.5.17}$$

L'equazione (9.5.17) è un'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti. l'equazione algebrica caratteristica della (9.5.17) è l'equazione:

$$\lambda^2+\lambda+1=0.$$

tale equazione algebrica ammette le radici:

$$\lambda=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=-\frac{1}{2}\pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

e i.e. le radici
$$\lambda=-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda=-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}.$$
Pertanto la (9.5.17) ammette gl'integrali complessi

$$\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x}\equiv\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+j\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

e

$$e^{\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x} \equiv e^{-\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x - j\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

Le funzioni reali

$$y_1 = e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x \quad \text{e} \quad y_2 = e^{-\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

sono i due integrali reali corrispondenti ai due integrali complessi coniugati trovati.
La combinazione lineare:

$$y = c_1\, e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2\, e^{-\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x,$$

fornisce l'integrale generale della (9.5.17) al variare di c_1 e c_2 in $\mathbb{R}$. ■

Esercizio — Integrare l'equazione

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0 \tag{9.5.18}$$

la (9.5.18) è un'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti.
L'equazione algebrica caratteristica della (9.5.18) è l'equazione:

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$$

Quest'equazione ammette certamente la radice $\lambda = 1$. Quindi per il teorema di Ruffini[4] il polinomio a 1^o membro è divisibile per $\lambda - 1$.
per trovare il quoziente dei due polinomi applichiamo la regola di Ruffini:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -6 & 11 & -6 \\ 1 & & 1 & -5 & +6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

Quindi il quoziente della divisione dei due polinomi è il polinomio

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

L'equazione algebrica caratteristica si può allora scrivere come segue:

$$\left(\lambda^2 - 5\lambda + 6\right)(\lambda - 1) = 0$$

[4]Enunciamo il teorema di Ruffini:

Teorema 9.18 (di Ruffini) *Condizione necessaria e sufficiente affinchè la funzione razionale intera $f(z)$ sia divisibile per il binomio $z - a$, è che $f(z)$ si annulli per $z = a$.*

tale equazione ammette le radici

$$\lambda = 1, \lambda = 2 \text{ e } \lambda = 3,$$

tutte di molteplicità 1.Pertanto l'equazione differenziale (9.5.18) ammette i seguenti integrali:

$$y_1 = \mathrm{e}^{x} \qquad y_2 = \mathrm{e}^{2x} \qquad y_3 = \mathrm{e}^{3x}.$$

La combinazione lineare:

$$y = c_1 \mathrm{e}^{x} + c_2 \mathrm{e}^{2x} + c_3 \mathrm{e}^{3x}$$

fornisce l'integrale generale della (9.5.18) al variare di c_1, c_2 e c_3 in $\mathbb{R}$. ■

Osservazione 120 E' un grave errore confondere l'equazione algebrica

$$\lambda^n - 1 = 0 \quad \text{con } n > 1$$

con l'equazione

$$(\lambda - 1)^n = 0.$$

infatti l'equazione $\lambda^n - 1 = 0$ ammette nel campo complesso n radici distinte e di molteplicità 1 che s'identificano con le n radici $n-$me complesse di 1; la seconda ammette nel campo complesso un'unica radice di molteplicità n e tale radice è il numero 1.
Per lo stesso motivo è un errore grave confondere l'equazione algebrica

$$\lambda^n + 1 = 0 \quad \text{con } n > 1$$

con l'equazione

$$(\lambda + 1)^n = 0.$$

9.5.3 Le equazioni lineari complete a coefficienti costanti.

Consideriamo un'equazione lineare completa a coefficienti costanti e cioè del tipo

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x) \tag{9.5.19}$$

con $a_1, a_2, \ldots, a_n$ costanti reali e $f(x)$ funzione reale definita, continua e non identicamente nulla in un intervallo (a, b).
Consideriamo anche l'equazione omogenea associata alla (9.5.19) e i.e. l'equazione:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0. \tag{9.5.20}$$

Per integrare l'equazione (9.5.19) si trova prima l'integrale generale dell'equazione omogenea (9.5.20) col metodo dell'equazione algebrica caratteristica e poi a questo si aggiunge un integrale particolare dell'equazione completa

(2) che si può trovare col metodo di Lagrange.
Ricordiamo che, detta

$$y = c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n$$

una combinazione lineare d'integrali linearmente indipendenti della (9.5.20) che fornisce l'integrale generale della (9.5.20), il metodo di Lagrange consiste nel cercare un integrale particolare della (9.5.19) del tipo:

$$u = \gamma_1(x)\, y_1(x) + \ldots + \gamma_n(x)\, y_n(x),$$

con $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ funzioni derivabili incognite da determinare. Ricordiamo anche che una tale funzione u è effettivamente un integrale della (9.5.19), se le derivate $\gamma_1', \gamma_2', \ldots, \gamma_n'$ delle funzioni incognite $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ soddisfano il seguente sistema:

$$\begin{cases} \gamma_1' y_1 + \gamma_2' y_2 + \ldots + \gamma_n' y_n & = & 0 \\ \gamma_1' y_1' + \gamma_2' y_2' + \ldots + \gamma_n' y_n' & = & 0 \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_1' y_1^{(n-1)} + \gamma_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + \gamma_n' y_n^{(n-1)} & = & f(x) \end{cases}$$

Poichè il metodo di Lagrange è molto laborioso, è bene tener presente che esso può essere evitato nell'ipotesi già fatta che i coefficienti della (9.5.19) siano costanti e nell'ulteriore ipotesi che il termine noto $f(x)$ della (9.5.14) sia di tipo particolare e precisamente del tipo

$$f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\left[A(x)\cos\beta x + B(x)\sin\beta x\right]$$

con α e β numeri reali e $A(x)$ e $B(x)$ polinomi.
infatti nelle due ipotesi fatte un integrale particolare u della (9.5.19) può essere trovato utilizzando il seguente:

Teorema 9.19 *Consideriamo l'equazione lineare completa a coefficienti costanti (9.5.19). Il termine noto $f(x)$ della (9.5.19) sia del tipo:*

$$f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\left[A(x)\cos\beta x + B(x)\sin\beta x\right]$$

con α e β numeri reali e $A(x)$ e $B(x)$ polinomi.
Allora, se il numero complesso $\alpha + j\beta$ non è radice dell'equazione algebrica caratteristica dell'equazione omogenea associata (9.5.20), l'equazione completa (9.5.19) ammette un integrale particolare u del tipo

$$u(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\left[A_1(x)\cos\beta x + B_1(x)\sin\beta x\right]$$

dove $A_1(x)$ e $B_1(x)$ sono due polinomi da determinare il cui grado è minore o uguale rispetto al massimo dei gradi dei polinomi $A(x)$ e $B(x)$.

Nel caso eccezionale che il numero complesso $\alpha+j\beta$ è radice dell'equazione algebrica caratteristica dell'equazione omogenea (9.5.20), detta k la molteplicità di tale radice, l'equazione completa (9.5.19) ammette un integrale particolare u del tipo

$$u\left(x\right) = x^k\,\mathrm{e}^{\alpha x}\left[A_1\left(x\right)\cos\beta x + B_1\left(x\right)\sin\beta x\right]$$

dove $A_1\left(x\right)$ e $B_1\left(x\right)$ hanno il significato prima precisato.

Dal teorema precedente si deducono i seguenti casi particolari:

1^o caso particolare

il termine noto $f\left(x\right)$ della (9.5.19) sia del tipo

$$f\left(x\right) = A\left(x\right)$$

con $A\left(x\right)$ polinomio. Allora, se il numero 0 non è radice dell'equazione algebrica caratteristica dell'equazione omogenea (9.5.20), l'equazione completa (9.5.19) ammette un integrale particolare del tipo

$$u\left(x\right) = A_1\left(x\right)$$

con $A_1\left(x\right)$ polinomio da determinare di grado minore o eguale rispetto al gradi di $A\left(x\right)$.
Nel caso eccezionale che 0 è una radice dell'equazione algebrica caratteristica della (9.5.20), detta k la molteplicità di tale radice, l'equazione completa (9.5.19) ammette un integrale particolare del tipo

$$u\left(x\right) = x^k A_1\left(x\right)$$

dove $A_1\left(x\right)$ ha il significato prima precisato.

2^o caso particolare

il termine noto $f\left(x\right)$ della (9.5.19) sia del tipo

$$f\left(x\right) = A\,\mathrm{e}^{\alpha x}$$

con A costante reale.
Allora se α non è radice dell'equazione algebrica caratteristica della (9.5.20), l'equazione completa (9.5.19) ammette un integrale particolare del tipo

$$u\left(x\right) = a\,\mathrm{e}^{\alpha x}$$

con a costante da determinare.
Nel caso eccezionale che α è radice dell'equazione algebrica caratteristica della (9.5.20) con molteplicità k, l'equazione completa (9.5.19) ammette un integrale particolare del tipo

$$u = x^k a\,\mathrm{e}^{\alpha x}$$

con a costante da determinare.

3^o **caso particolare**

Il termine noto $f(x)$ della (9.5.19) sia del tipo

$$f(x) = A(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}$$

con $A(x)$ polinomio.
Allora l'equazione completa (9.5.19), se α non è radice dell'equazione algebrica caratteristica della (9.5.20), ammette un integrale particolare del tipo

$$u(x) = A_1(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}$$

con $A_1(x)$ polinomio da determinare di grado minore o uguale rispetto al gradi di $A(x)$.
Nel caso eccezionale che α è radice dell'equazione algebrica caratteristica della (9.5.20) con molteplicità k, l'equazione completa (9.5.19) ammette un'integrale del tipo

$$u(x) = x^k A_1(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}$$

dove $A_1(x)$ ha il significato prima precisato.

4^o **caso particolare**

Il termine noto $f(x)$ della (9.5.19) sia del tipo

$$f(x) = A\cos\beta x$$

o del tipo

$$f(x) = B\sin\beta x$$

o del tipo

$$f(x) = A\cos\beta x + B\sin\beta x$$

con A e B costanti reali.
Allora, se $j\beta$ non è radice dell'equazione algebrica caratteristica della (9.5.20), l'equazione completa (9.5.19) ammette un integrale particolare del tipo

$$u(x) = a\cos\beta x + b\sin\beta x$$

con a e b costanti da determinare.
nel caso eccezionale che $j\beta$ è radice dell'equazione algebrica caratteristica con molteplicità k, l'equazione completa (9.5.19) ammette un integrale particolare del tipo

$$u(x) = x^k\left(a\cos\beta x + b\sin\beta x\right)$$

con a e b costanti da determinare.

Osservazione 121 Si osservi che anche quando nel termine noto figura o solo il coseno o solo il seno, l'integrale particolare della completa va cercato in una forma nella quale seno e coseno figurano entrambi.

Osservazione 122 Talvolta per trovare un integrale particolare dell'equazione completa (9.5.19) può essere utile osservare quanto segue.
Supponiamo che il termine noto $f(x)$ sia somma di un numero finito di funzioni, i.e. sia del tipo:

$$f = \sum_{i=1}^{p} f_i = f_1 + f_2 + \ldots + f_p,$$

sicchè l'equazione completa (9.5.19) si può scrivere nella forma:

$$T(y) = f_1 + f_2 + \ldots + f_p. \tag{9.5.21}$$

Allora, se u_1 è un integrale particolare dell'equazione $T(y) = f_1$, e se u_2 è un integrale particolare dell'equazione $T(y) = f_2$, ... e se u_p è un integrale particolare dell'equazione $T(y) = f_p$, la funzione

$$u = u_1 + u_2 + \ldots + u_p$$

è un integrale particolare della (9.5.21). Infatti si ha:

$$\begin{aligned} T(u) = T(u_1 + u_2 + \ldots + u_p) = T(u_1) + T(u_2) + \ldots + T(u_p) = \\ = f_1 + f_2 + \ldots + f_p. \end{aligned}$$

N.B. : L'osservazione ora fatta vale anche per le equazioni lineari complete con coefficienti non costanti.

Esercizio — Integrare le seguenti equazioni differenziali:

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x}, \tag{9.5.22}$$

$$y'' + y = x^2 \tag{9.5.23}$$

e

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x} + x^2 \tag{9.5.24}$$

La (9.5.22) è un'equazione lineare completa. Si può pensare

$$(a, b) =]0, \pi[$$

oppure

$$(a, b) =]\pi, 2\pi[$$

etc. .
L'omogenea associata è l'equazione

$$y'' + y = 0 \tag{9.5.25}$$

la cui equazione caratteristica è : $\lambda^2 + 1 = 0$. le radici di essa sono:

$$\lambda = j \quad ; \quad \lambda = -j.$$

Quindi l'omogenea ammette i due integrali complessi:

$$\mathrm{e}^{jx} \equiv \cos x + j \sin x \qquad \mathrm{e}^{-jx} \equiv \cos x - j \sin x.$$

Le funzioni

$$y_1 = \cos x \qquad y_2 = \sin x$$

sono i due integrali reali corrispondenti agli integrali complessi coniugati e^{jx}, e^{-jx}.
la combinazione lineare:

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

fornisce l'integrale generale dell'equazione omogenea (9.5.25) al variare di c_1, c_2 in $\mathbb{R}$.
Cerchiamo ora un integrale particolare della completa col metodo di Lagrange. Dunque cercheremo un integrale particolare che ha la seguente forma:

$$u(x) = \gamma_1(x) \cos x + \gamma_2(x) \sin x$$

Per determinare γ_1 e γ_2, com'è noto dalla teoria, dobbiamo risolvere il seguente sistema nelle incognite γ_1' e γ_2' :

$$\begin{cases} \gamma_1' \cos x + \gamma_2' \sin x & = \quad 0 \\ \\ \gamma_1' (-\sin x) + \gamma_2' \cos x & = \quad \frac{1}{\sin x} \end{cases}$$

Da tale sistema si ricava:

$$\gamma_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \frac{1}{\sin x} & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\gamma_2' = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \frac{1}{\sin x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Di qui si ricava

$$\gamma_1 = \int -1dx = -x + c \quad ; \quad \gamma_2 = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \log|\sin x| + c$$

Quindi la funzione

$$u = -x \cdot \cos x + (\log|\sin x|) \cdot \sin x$$

è un integrale particolare della (9.5.22). Pertanto l'integrale generale della completa (9.5.22) è fornito dalla funzione

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - x \cdot \cos x + (\log|\sin x|) \cdot \sin x$$

al variare di c_1 e c_2 in $\mathbb{R}$.
L'equazione omogenea associata alla (9.5.23) è l'equazione (9.5.25), i.e.

$$y'' + y = 0.$$

L'integrale generale di quest'ultima equazione, come abbiamo visto, è fornito dalla combinazione lineare:

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

al variare di c_1 e c_2 in $\mathbb{R}$.
poichè il termine noto della completa è un polinomio di 2^o grado e poichè 0 non è radice dell'equazione algebrica caratteristica della (9.5.25), i.e. dell'equazione

$$\lambda^2 + 1 = 0,$$

l'equazione completa (9.5.23) ammette un integrale particolare del tipo

$$u = ax^2 + bx + c$$

dove a, b e c sono costanti da determinare.
Per determinare a, b, c imponiamo che u sia un integrale dell'equazione completa (9.5.23). Ciò facendo si ha:

$$u' = 2ax + b \qquad u'' = 2a.$$

Quindi risulta

$$u'' + u = x^2$$

se e solo se risulta

$$2a + ax^2 + bx + c = x^2 \qquad , \qquad ax^2 + bx + c + 2a = x^2$$

da cui:

$$a = 1 \quad b = 0 \quad c + 2a = 0$$

e quindi si ha $c = -2$.
Dunque la funzione

$$u = x^2 - 2$$

è un integrale particolare della equazione completa. Pertanto l'integrale generale di (9.5.23) è fornito dalla funzione:

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x^2 - 2$$

al variare di c_1, c_2 in $\mathbb{R}$.
Per l'equazione (9.5.24) si può pensare $(a, b) =]0, \pi[$.
L'integrale generale dell'omogenea associata è fornita dalla funzione

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

al variare di c_1, c_2 in $\mathbb{R}$.
un integrale particolare dell'equazione

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x}$$

è la funzione

$$u_1 = -x \cdot \cos x + (\log |\sin x|) \cdot \sin x;$$

un integrale particolare di

$$y'' + y = x^2$$

è la funzione

$$u_2 = x^2 - 2$$

Allora la funzione

$$u = u_1 + u_2 \equiv -x \cos x + (log\, |\sin x|) \cdot \sin x + x^2 - 2$$

è un integrale particolare della (9.5.24).
Pertanto la funzione

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - x \cos x + (\log |\sin x|) \cdot \sin x + x^2 - 2$$

fornisce l'integrale generale della (9.5.24) al variare di c_1, c_2 in $\mathbb{R}$.

• • •

Consideriamo ora il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y &= \frac{1}{\sin x} + x^2 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0 \end{cases}$$

Come è noto questo problema ammette una e una sola soluzione.
Si osservi che:

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[c_1 \cos x + c_2 \sin x - x\cos x + (\log|\sin x|)\cdot \sin x + x^2 - 2\right]_{x=\frac{\pi}{2}} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow c_2 + \frac{\pi^2}{4} - 2 = 0 \Leftrightarrow c_2 = 2 - \frac{\pi^2}{4}$$

$$\Bigg[\quad c_1(-\sin x) + c_2 \cos x - \cos x + x \sin x +$$
$$+ \frac{1}{\sin x}\cos x \sin x + (\log|\sin x|)\cdot\cos x + 2x\Bigg]_{x=\frac{\pi}{2}} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -c_1 + \frac{\pi}{2} + \pi = 0 \Leftrightarrow c_1 = 3\frac{\pi}{2}$$

Pertanto la soluzione del problema di Cauchy considerato è la funzione:

$$y = 3\frac{\pi}{2}\cos x + \left(2 - \frac{\pi^2}{4}\right)\sin x - x\cos x + (\log|\sin x|)\cdot\sin x + x^2 - 2$$

■

9.6 L'equazione di Eulero.

9.6.1 Osservazioni e definizioni preliminari.

Si chiama **equazione di Eulero** di ordine n un'equazione del tipo:

$$y^{(n)} + \frac{a_1}{x}y^{(n-1)} + \frac{a_2}{x^2}y^{(n-2)} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}y = 0 \tag{9.6.1}$$

con $a_1, a_2, \ldots, a_n$ costanti reali.
Si noti che l'equazione (9.6.1) è un equazione lineare omogenea a coefficienti non costanti e continui in $]0,+\infty[$ e in $]-\infty,0[$.
Pertanto per l'equazione (9.6.1) si pone il problema di cercare l'integrale generale in $]0,+\infty[$ (i.e. l'insieme di tutti gl'integrali reali definiti in $]0,+\infty[$) e l'integrale generale in $]-\infty,0[$.
Per riconoscere un'equazione di Eulero è molto utile osservare che in ogni termine a primo membro la somma tra l'ordine di derivazione che compare al numeratore e il grado della potenza di x che compare al denominatore è sempre uguale all'ordine dell'equazione.
Sempre per riconoscere un'equazione di Eulero è utile osservare che la (9.6.1) si può anche scrivere nella forma:

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + a_2 x^{n-2} y^{(n-2)} + \ldots + a_n x^0 y^{(0)} = 0 \tag{9.6.2}$$

e quindi, scritta in questa forma, si ha che in ogni termine al primo membro il grado della potenza di x risulta uguale all'ordine di derivazione della funzione incognita y.
L'importanza dell'equazione di Eulero risiede nel fatto che essa con un'opportuna sostituzione si può trasformare in un'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti.
Per precisare questa sostituzione, indichiamo con $y(x)$ un integrale della (9.6.1) definito in $]0,+\infty[$ (in $]-\infty,0[$).
Allora ha senso considerare la funzione

$$u(t) = y\left(\mathrm{e}^t\right)$$

con $t \in \mathbb{R}$ (la funzione

$$u(t) = y\left(-\mathrm{e}^t\right)$$

con $t \in \mathbb{R}$). La funzione $u(t)$ si chiama **la trasformata della funzione** $y(x)$ **mediante la sostituzione** $x = \mathrm{e}^t$ **(**$x = -\mathrm{e}^t$**)**.
Poichè la funzione $y(x)$ soddisfa l'equazione che si ottiene dalla (9.6.2), scritta con $y(x)$ al posto di y, esprimendo il 1^o membro della (9.6.2) in funzione di t,

$$u(t), u'(t), \ldots, u^{(n)}(t)$$

i.e. soddisfa un'equazione del tipo

$$F\left(t, u, u', u'', \ldots, u^{(n)}\right) = 0. \tag{9.6.3}$$

Questa nuova equazione si chiama **l'equazione trasformata** della equazione (9.6.1) o dell'equazione (9.6.2) mediante la sostituzione $x = \mathrm{e}^t$ ($x = -\mathrm{e}^t$).
E' facile poi riconoscere che vale anche il viceversa, i.e. che se $u(t)$ è un integrale dell'equazione (9.6.3), allora la funzione

$$y(x) = u(\log x)$$

è un integrale della (9.6.1) definito in $]0,+\infty[$ (la funzione

$$y(x) = u(\log(-x))$$

è un integrale della (9.6.1) definito in $]-\infty,0[$).
Si noti che si opera la sostituzione $x = \mathrm{e}^t$ quando x è positivo, i.e. quando si cerca l'integrale della (9.6.1) in $]0,+\infty[$, e si opera la sostituzione $x = -\mathrm{e}^t$ quando x è negativo, i.e. quando si cerca l'integrale generale della (9.6.1) in $]-\infty,0[$.
Si noti ancora che la sostituzione $x = \mathrm{e}^t$ è equivalente alla sostituzione $t = \log x$ e la sostituzione $x = -\mathrm{e}^t$ è equivalente alla sostituzione $t = \log(-x)$. pertanto le due sostituzioni $x = \mathrm{e}^t$ e $x = -\mathrm{e}^t$ sono equivalenti all'unica sostituzione

$$t = \log|x|$$

Vale ora il seguente:

Teorema 9.20 (sull'equazione di Eulero.) *Sono vere le seguenti proposizioni.*

- *L'equazione trasformata dell'equazione di Eulero (9.6.1) mediante la sostituzione $x = \mathrm{e}^t$ coincide con l'equazione trasformata mediante la sostituzione $x = -\mathrm{e}^t$.*

- *La trasformata dell'equazione di Eulero (9.6.1) mediante la sostituzione $x = \mathrm{e}^t$ o $x = -\mathrm{e}^t$ è un'equazione lineare omogenea di ordine n a coefficienti costanti, i.e. del tipo*

$$u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \ldots + b_n u = 0 \tag{9.6.4}$$

  con $b_1, b_2, \ldots, b_n$ costanti reali dipendenti da $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

- *L'equazione algebrica caratteristica dell'equazione (9.6.4) coincide con l'equazione che si ottiene ponendo $y = x^2$ nell'equazione di Eulero (9.6.1) e sopprimendo poi il fattore $x^{\lambda - n}$ comune a tutti gli addendi.*

- *Il primo membro dell'equazione (9.6.4) coincide con la trasformata mediante la sostituzione $x = \mathrm{e}^t$ o $x = -\mathrm{e}^t$ del primo membro dell'equazione (9.6.2) (i.e. dell'equazione di Eulero scritta senza i denominatori)e non del primo membro della (9.6.1).*

Dimostrazione — Per semplicità dimostreremo il teorema nel caso di un'equazione di Eulero del 1^o ordine del tipo

$$y' + \frac{a_1}{x} y = 0 \tag{9.6.5}$$

con a_1 costante reale.
Sia $y(x)$ un integrale della (9.6.5) definito in $]0, +\infty[$ e poniamo

$$u(t) = y\left(\mathrm{e}^t\right) \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Poichè $y(x)$ è anche un integrale dell'equazione

$$y'x + a_1 y = 0, \tag{9.6.6}$$

si ha:

$$y'(x)\, x + a_1 y(x) = 0 \qquad \forall x \in \left]0, +\infty\right].$$

Si osservi ora che $\forall x \in]0, +\infty[$ e $\forall t \in \mathbb{R} : x = \mathrm{e}^t$:

$$y'(x)\, x + a_1 y(x) = y'\left(\mathrm{e}^t\right) \mathrm{e}^t + a_1 y\left(\mathrm{e}^t\right) = u'(t) + a_1 u(t)$$

Conseguentemente, poichè risulta

$$y'(x)\, x + a_1 y(x) = 0 \qquad \forall x \in \left]0, +\infty\right[,$$

risulta anche

$$u'(t) + a_1 u(t) = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Quindi la funzione $u(t)$ è un integrale dell'equazione

$$u' + a_1 u = 0 \tag{9.6.7}$$

L'equazione (9.6.7) è l'equazione trasformata della (9.6.5) o della (9.6.6) mediante la sostituzione $x = \mathrm{e}^t$ ed è effettivamente un'equazione lineare omogenea del 1^o ordine a coefficienti costanti.
Si noti che l'equazione algebrica caratteristica della (9.6.7) è l'equazione

$$\lambda + a_1 = 0$$

e tale equazione effettivamente si ottiene ponendo nell'equazione (9.6.5) $y = x^\lambda$ e sopprimendo poi il fattore $x^{\lambda-1}$ comune a tutti gli addendi.
Si noti ancora che il primo membro della (9.6.7), scritto con $u(t)$ al posto di u, è la funzione trasformata mediante la sostituzione $x = \mathrm{e}^t$ del 1^o membro della (9.6.6) (scritto con $y(x)$ al posto di y) e non del 1^o membro della (9.6.5).
Sia ora $y(x)$ un integrale della (9.6.5) definito in $]-\infty, 0[$ e poniamo

$$u(t) = y\left(-\mathrm{e}^t\right) \qquad \forall \in \mathbb{R}$$

Allora si ha

$$y'(x)\, x + a_1 y(x) = 0 \qquad \forall x \in \left]-\infty, 0\right[.$$

D'altra parte si ha $\forall x \in \left]-\infty, 0\right]$ e $\forall t \in \mathbb{R} : x = -\mathrm{e}^t$:

$$y'(x)\, x + a_1 y(x) = y'\left(-\mathrm{e}^t\right)\left(-\mathrm{e}^t\right) + a_1 y\left(-\mathrm{e}^t\right) = u'(t) + a_1 u(t).$$

quindi risulta

$$u'(t) + a_1 u(t) = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

e quindi $u(t)$ è anche un integrale della (9.6.7). Pertanto la (9.6.7) è anche l'equazione trasformata della (9.6.5) con la sostituzione $x = -\mathrm{e}^t$. □

Osservazione 123 Si noti che il fatto che l'equazione trasformata della (9.6.5) mediante la sostituzione $x = \mathrm{e}^t$ coincide con l'equazione trasformata della (9.6.5) mediante la sostituzione $x = -\mathrm{e}^t$ non deve sorprendere perchè, come già si è osservato, le due sostituzioni $x = \mathrm{e}^t$ e $x = -\mathrm{e}^t$ sono equivalenti all'unica sostituzione $t = \log|x|$.

Dal teorema visto si deduce la seguente **regola pratica per integrare un'equazione di Eulero.**
Consideriamo e riscriviamo per comodità un'equazione di Eulero

$$y^{(n)} + \frac{a_1}{x} y^{(n-1)} + \frac{a_2}{x^2} y^{(n-2)} + \ldots + \frac{a_n}{x^n} y = 0$$

Per integrare tale equazione si eseguono le seguenti operazioni:

1. Si pone nella (9.6.1) $y = x^{\lambda}$ e si sopprime il fattore $x^{\lambda-n}$ comune a tutti gli addendi.
   In tal modo si ottiene l'equazione algebrica caratteristica dell'equazione trasformata dell'equazione (9.6.1) mediante la sostituzione $x = \mathrm{e}^t$ o $x = -\mathrm{e}^t$.

2. Utilizzando l'equazione algebrica caratteristica trovata si trova l'integrale generale dell'equazione trasformata dell'equazione (9.6.1) mediante la sostituzione $x = \mathrm{e}^t$ oppure $x = -\mathrm{e}^t$.
   Tale integrale generale sarà fornito da una funzione del tipo
   $$u = c_1 u_1(t) + \ldots + c_n u_n(t)$$
   al variare di $c_1, \ldots, c_n$ in $\mathbb{R}$.

3. Si pone nell'integrale generale trovato $t = log\,||$.
   Ciò facendo si ottiene la funzione:
   $$y = c_1 u_1(\log|x|) + \ldots + c_n u_n(\log|x|)$$
   Questa funzione al variare di $c_1, \ldots, c_n$ in $\mathbb{R}$ fornisce l'integrale generale dell'equazione di Eulero (9.6.1) sia in $]0, +\infty[$, sia in $]-\infty, 0[$.

Osservazione 124 Consideriamo la funzione $y(x)$ definita in $]-\infty, 0[\, \cup\,]0, +\infty[$ come segue:

$$y(x) = \begin{cases} u_1(\log|x|) + \ldots + u_n(\log|x|) & \text{se} \quad x \in]0, +\infty] \\ \\ -u_1(\log|x|) - \ldots - u_n(\log|x|) & \text{se} \quad x \in]-\infty, 0] \end{cases}$$

Questa funzione è certamente un integrale della (9.6.1) in $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$, ma non si ottiene dalla funzione

$$y = c_1 u_1(\log|x|) + \ldots + c_n u_n(\log|x|)$$

particolarizzando le costanti.
Pertanto la funzione

$$y = c_1 u_1(\log|x|) + \ldots + c_n u_n(\log|x|)$$

fornisce l'integrale generale della (9.6.1) sia in $]0, +\infty[$, sia in $]-\infty, 0[$, ma non in $]-\infty, 0[\,\cup\,]0, +\infty[$.

Esercizio — Integrare l'equazione

$$y'' + \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = 0 \tag{9.6.8}$$

L'equazione (9.6.8) è un'equazione di Eulero del 2^o ordine. Ponendo in essa $y = x^\lambda$ si ottiene l'equazione:

$$\lambda(\lambda - 1)\, x^{\lambda-2} + \lambda x^{\lambda-2} + x^{\lambda-2} = 0$$

Sopprimendo il fattore $x^{\lambda-2}$ comune a tutti gli addendi si ha l'equazione:

$$\lambda(\lambda - 1) + \lambda + 1 = 0 \text{ ossia } \lambda^2 + 1 = 0.$$

Quest'ultima equazione è l'equazione algebrica caratteristica dell'equazione trasformata dell'equazione (9.6.8) mediante la sostituzione $x = \mathrm{e}^t$ o $x = -\,\mathrm{e}^t$.

N.B. : Quindi l'equazione trasformata della (9.6.8) mediante la sostituzione $x = \mathrm{e}^t$ o $x = e^t$ è l'equazione : $u'' + u = 0$

Le radici dell'equazione algebrica

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

sono $\lambda = \pm j$.
Quindi le funzioni complesse

$$\mathrm{e}^{jt} \equiv \cos t + j \sin t \text{ e } \mathrm{e}^{-jt} \equiv \cos t - j \sin t$$

sono integrali complessi dell'equazione trasformata della (9.6.8).
Quindi la funzione:

$$u = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

al variare di c_1 e c_2 in $\mathbb{R}$ fornisce l'integrale generale dell'equazione trasformata della (9.6.8) mediante la sostituzione $x = \mathrm{e}^t$ o $x = -\,\mathrm{e}^t$.
pertanto la funzione:

$$y = c_1 \cos(\log|x|) + c_2 \sin(\log|x|)$$

al variare di c_1 e c_2 in $\mathbb{R}$ fornisce l'integrale generale delle (9.6.8) sia in $]0, +\infty[$, sia in $]-\infty, 0[$. ■

Esercizio — Integrare l'equazione

$$y''' + 2\frac{y''}{x} + \frac{y'}{x^2} - \frac{y}{x^3} = 0 \tag{9.6.9}$$

L'equazione (9.6.9) è un'equazione di Eulero del 3^o ordine.
ponendo in essa $y = x^\lambda$ si ottiene l'equazione:

$$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)\, x^{\lambda-3} + 2\lambda(\lambda - 1)\, x^{\lambda-3} + \lambda x^{\lambda-3} - x^{\lambda-3} = 0.$$

Sopprimendo il fattore $x^{\lambda-3}$ comune a tutti gli addendi si ha l'equazione:

$$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) + 2\lambda(\lambda - 1) + \lambda - 1 = 0$$

ossia

$$\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$$

Quest'equazione è l'equazione algebrica caratteristica dell'equazione trasformata della (9.6.9) mediante la sostituzione $x = \mathrm{e}^t$ o $x = -\,\mathrm{e}^t$.

N.B.: Quindi l'equazione trasformata della (9.6.9) è l'equazione $u''' - u'' + u' - u = 0$.

Le radici dell'equazione algebrica sono $\lambda = 1$ e $\lambda = \pm j$.
Quindi la funzione:

$$u = c_1\,\mathrm{e}^t + c_2 \cos t + c_3 \sin t,$$

al variare di c_1, c_2, c_3 in $\mathbb{R}$, fornisce l'integrale generale dell'equazione trasformata della (9.6.9) mediante la sostituzione $x0\,\mathrm{e}^t$ o $x = -\,\mathrm{e}^t$.
Pertanto la funzione:

$$y = c_1 e^{\log|x|} + c_2 \cos\left(\log|x|\right) + c_3 \sin\left(\log|x|\right),$$

al variare di c_1, c_2, c_3 in $\mathbb{R}$, fornisce l'integrale generale della (9.6.9) sia in $]0, +\infty[$, sia in $]-\infty, 0[$. ■