

# Analisi Matematica II

---

appunti delle lezioni

Raucci Biagio



# Indice

<b>1</b>	<b>Lo spazio euclideo reale a <math>k</math> dimensioni. Lo spazio vettoriale <math>\mathbb{R}^k</math></b>	<b>9</b>
1.1	Lo spazio numerico reale a $k$ dimensioni. . . . .	9
1.1.1	Rettangoli e cerchi di $\mathbb{R}^k$ . . . . .	10
1.2	Elementi di topologia in $\mathbb{R}^k$ . . . . .	12
1.3	Punti di accumulazione. Insiemi chiusi, insiemi compatti. . . . .	16
1.4	Insieme connessi . . . . .	20
1.5	Domini . . . . .	22
1.6	Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^k$ . . . . .	23
1.6.1	Definizione. Generalità . . . . .	23
1.6.2	Rappresentazione geometrica dei vettori di $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ . . . . .	24
1.6.3	Rappresentazione vettoriale dei punti di $\mathbb{R}^k$ . . . . .	25
1.6.4	Rette, segmenti e poligoni di $\mathbb{R}^k$ . Caratterizzazione degli aperti connessi di $\mathbb{R}^k$ . . . . .	25
1.6.5	Prodotto scalare . . . . .	28
1.6.6	Prodotto vettoriale di due vettori di $\mathbb{R}^3$ . . . . .	29
<b>2</b>	<b>Funzioni reali di <math>k</math> variabili reali. Funzioni vettoriali.</b>	<b>31</b>
2.1	Funzioni reali di $k$ variabili reali. . . . .	31
2.2	Funzioni vettoriali. Campi vettoriali . . . . .	35
2.3	Funzioni composte . . . . .	38
2.4	Limiti . . . . .	39
2.4.1	Limiti delle funzioni reali di più variabili reali . . . . .	39
2.5	Limiti delle funzioni vettoriali . . . . .	43
2.6	Teoremi sui limiti . . . . .	45
2.6.1	Funzioni continue . . . . .	45
2.7	Successioni di punti di $\mathbb{R}_k$ . . . . .	50
2.7.1	Generalità. Limiti. . . . .	50
2.7.2	Applicazioni . . . . .	51
2.7.3	Teoremi sulle funzioni continue. Funzioni uniformemente continue. . . . .	52
2.8	Operatori lineari — Autovalori ed Autovettori — Forme quadratiche. . . . .	54
2.8.1	Operatori lineari . . . . .	54

2.8.2	Autovettori ed Autovalori . . . . .	56
2.8.3	Forme quadratiche . . . . .	56
<b>3</b>	<b>Calcolo differenziale</b>	<b>59</b>
3.1	Derivazione delle funzioni vettoriali di una variabile reale . . .	59
3.2	Derivate parziali di una funzione reale di due variabili reali . .	61
3.3	Derivate parziali delle funzioni reali di più variabili reali. . . .	65
3.4	Derivate parziali delle funzioni vettoriali di più variabili reali.	69
3.5	Funzioni di classe $C^0, C^m (m \in \mathbb{N}), C^\infty$ . Derivazione sulla frontiera. . . . .	71
3.6	Divergenza e rotore di un campo vettoriale. Laplaciano di una funzione reale. . . . .	73
3.7	Funzioni differenziabili . . . . .	75
3.7.1	Funzioni reali . . . . .	75
3.7.2	Funzioni vettoriali . . . . .	80
3.8	Derivazione delle funzioni composte . . . . .	81
3.8.1	Funzione composte reali di una variabile reale . . . . .	81
3.8.2	Funzioni composte reali di più variabili reali. . . . .	85
3.8.3	Funzioni composte vettoriali di una variabile reale. . . . .	86
3.8.4	Funzioni composte vettoriali di $k$ variabili reali . . . . .	87
3.9	Derivate direzionali . . . . .	89
3.10	Piano tangente e asse normale positivo a una superficie diagramma in un punto $Q_0$ . . . . .	90
3.11	Il teorema di Lagrange e la formula di Taylor per le funzioni reali di più variabili reali. Funzioni reali con gradiente nullo. . . . .	92
3.12	Funzioni omogenee . . . . .	96
3.12.1	Funzioni positivamente omogenee . . . . .	96
3.13	Funzioni omogenee . . . . .	99
3.14	Estremi relativi . . . . .	100
3.15	Funzioni implicite . . . . .	104
3.15.1	Equazioni implicitamente definite da un'equazione del tipo $f(x, y) = 0$ . . . . .	104
3.16	Il teorema del Dini per un'equazione del tipo $f(x, y) = 0$ . . . . .	108
<b>4</b>	<b>Integrazione</b>	<b>115</b>
4.1	Teoria della misura secondo Peano—Jordan in $\mathbb{R}^k$ . . . . .	115
4.2	Integrazione per le funzioni reali di una variabile reale. . . . .	120
4.2.1	Nozioni preliminari . . . . .	120
4.3	Rettangoloide . . . . .	121
4.4	Integrale di una funzione continua in un intervallo compatto . . . . .	123
4.5	L'integrale definito di una funzione reale continua in un intervallo. . . . .	128
4.6	Proprietà dell'integrale definito . . . . .	128
4.7	Il teorema fondamentale del calcolo integrale. . . . .	133

4.8	Regole d'integrazione definita per parti e per sostituzione. . .	135
4.9	Funzioni integrabili. . . . .	138
4.10	Funzioni sommabili . . . . .	141
4.11	Integrale improprio . . . . .	146
4.12	Criteri di sommabilità . . . . .	146
4.12.1	Funzioni reali continue in un intervallo limitato. . . . .	146
4.12.2	Funzioni reali continue in un insieme non limitato . . .	148
4.13	Integrale di una funzione generalmente continua in un intervallo. . . . .	151
4.14	Sommabilità per le funzioni generalmente continue in un intervallo. . . . .	154
4.14.1	Proprietà dell'integrale di una funzione generalmente continua in un intervallo. . . . .	156
4.14.2	Integrale definito di una funzione generalmente continua. . . . .	157
4.14.3	Criteri di sommabilità. . . . .	158
4.15	Applicazioni . . . . .	164
4.15.1	Richiami di teoria utili per studiare gli integrali delle funzioni generalmente continue in un intervallo. . . . .	164
4.16	Integrazione di una funzione vettoriale. . . . .	167
<b>5</b>	<b>Integrazione delle funzioni di più variabili reali.</b>	<b>171</b>
5.1	Cilindri. Solidi di rotazione. . . . .	173
5.1.1	Cilindri. . . . .	173
5.1.2	Solidi di rotazione. . . . .	174
5.2	Integrazioni delle funzioni reali continue in un compatto misurabile di $\mathbb{R}^k$ . . . . .	176
5.2.1	Diametro di un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}^k$ . . . . .	176
5.2.2	Decomposizione di un insieme limitato di $\mathbb{R}^k$ e diametro di una decomposizione. . . . .	176
5.2.3	Parte non negativa [non positiva] di $f$ . . . . .	177
5.3	Cilindroidi . . . . .	178
5.4	Integrali di una funzione reale continua in un compatto misurabile di $\mathbb{R}^k$ e sue proprietà. . . . .	180
5.5	Insiemi normali del piano . . . . .	182
5.6	Integrali tripli . . . . .	192
5.7	Cambiamento di variabili negli integrali multipli. . . . .	193
5.7.1	Cambiamento delle variabili negli integrali doppi . . .	194
5.7.2	Cambiamento delle variabili negli integrali tripli . . . .	208
5.8	Funzioni espresse mediante integrali. . . . .	210
<b>6</b>	<b>Curve. Integrali curvilinei. Forme differenziali lineari.</b>	<b>213</b>
6.1	Curve . . . . .	213
6.1.1	Curve aperte. Curve aperte regolari e generalmente regolari. . . . .	214

6.1.2	Curve chiuse. Curve chiuse regolari e generalmente regolari. . . . .	218
6.2	Retta tangente ad una curva generalmente regolare. . . . .	220
6.3	Curve generalmente regolare orientata . . . . .	222
6.4	Lunghezza di una curva generalmente regolare. . . . .	225
6.5	Ascissa curvilinea. . . . .	230
6.6	Diagrammi . . . . .	231
6.7	Diagrammi polari . . . . .	233
6.8	Integrale curvilineo di una funzione reale. . . . .	234
6.9	Forme differenziali lineari. Integrale curvilineo di una forma differenziale lineare. . . . .	237
6.9.1	Forme differenziali lineari. . . . .	237
6.9.2	Integrale curvilineo di una forma differenziale lineare. . . . .	238
6.10	Proprietà additiva dell'integrale curvilineo. . . . .	240
6.11	Aperti di $\mathbb{R}^2$ connessi ed a connessione semplice. Domini regolari limitati di $\mathbb{R}^2$ . . . . .	241
6.12	Formule di Gauss nel piano. I teoremi di Stokes e della divergenza. . . . .	243
6.13	Approfondimenti . . . . .	246
6.13.1	Integrale curvilineo di una forma differenziale lineare esteso a una curva orientata generalmente regolare, semplice e aperta o chiusa. . . . .	246
6.14	Forme differenziali esatte e campi vettoriale conservativi di classe $C^0$ . . . . .	252
6.14.1	Forme differenziali esatte in due variabili. . . . .	252
6.14.2	Forme differenziali esatte in tre variabili. . . . .	253
<b>7</b>	<b>Superfici. Integrali superficiali.</b>	<b>267</b>
7.1	Superfici regolari. Bordo di una superficie regolare. . . . .	267
7.1.1	Superfici regolari . . . . .	267
7.1.2	Piano tangente ad una superficie regolare. . . . .	269
7.2	Superfici regolari orientate. . . . .	271
7.3	Superfici regolari notevoli. . . . .	273
7.3.1	Diagrammi regolari. . . . .	273
7.4	Area di una superficie regolare: integrali superficiali. . . . .	276
7.5	Il teorema di Stokes nello spazio. . . . .	279
7.6	Domini regolari e limitati in $\mathbb{R}^3$ . Formule di Gauss nello spazio. Il teorema della divergenza nello spazio. . . . .	282
7.7	regola d'integrazione per parti relativa agl'integrali doppi e tripli. . . . .	284
7.8	Applicazioni. . . . .	286
7.8.1	Procedimenti per calcolare il flusso di un vettore. . . . .	290

<b>8</b>	<b>Successioni e serie di funzioni reali di una variabile reale</b>	<b>295</b>
8.1	Successioni di funzioni . . . . .	295
8.2	Serie di funzioni . . . . .	303
8.3	Convergenza puntuale e uniforme per una serie di funzioni . .	303
8.4	Convergenza assoluta ed equiassoluta convergenza . . . . .	305
8.5	Convergenza totale . . . . .	306
8.6	Teoremi sulle serie di funzioni uniformemente convergenti . .	309
8.7	Serie di potenze . . . . .	311
8.7.1	Intervallo di convergenza di una serie di potenze . . .	314
8.7.2	Teoremi sulla somma di una serie di potenze . . . . .	321
8.8	Funzioni analitiche . . . . .	322
<b>9</b>	<b>Equazioni differenziali ordinarie.</b>	<b>327</b>
9.1	Generalità. Problema di Cauchy. Teoremi di esistenza ed unicità. . . . .	327
9.2	Equazioni differenziali lineari con i coefficienti ed il termine noto di classe $C^0$ . . . . .	331
9.2.1	Equazioni omogenee. . . . .	331
9.3	Equazioni non omogenee (o complete). . . . .	338
9.4	Il metodo di Lagrange per l'integrazione delle equazioni dif- ferenziali lineari non omogenee. . . . .	340
9.5	Integrazione delle equazioni differenziali lineari. . . . .	343
9.5.1	L'equazione lineare del prim'ordine. . . . .	343
9.5.2	Le equazioni lineari omogenee a coefficienti costanti. .	348
9.5.3	Le equazioni lineari complete a coefficienti costanti. . .	355
9.6	L'equazione di Eulero. . . . .	363
9.6.1	Osservazioni e definizioni preliminari. . . . .	363
<b>A</b>	<b>Infinitesimi ed infiniti</b>	<b>371</b>
A.0.2	Confronto di infinitesimi . . . . .	371
A.0.3	Ordine di un infinitesimi. . . . .	372
A.0.4	Infiniti e loro confronto. . . . .	374
<b>B</b>	<b>Calcolo degli integrali indefiniti</b>	<b>375</b>
B.1	Integrazione per decomposizione in somma . . . . .	376
B.2	Integrazione per parti . . . . .	377
B.3	Integrazione per sostituzione . . . . .	378
B.4	Formule di ricorrenza . . . . .	380
B.4.1	L'integrale della funzione $\frac{1}{(1+x^2)^n}$ . . . . .	382
B.5	Integrali delle funzioni razionali. . . . .	383

<b>C</b>	<b>Relazioni ed osservazioni utili</b>	<b>387</b>
C.1	Trigonometria . . . . .	387
C.2	Formule di geometria analitica . . . . .	387
C.2.1	Equazione di una retta passante per due punti . . . . .	387
C.2.2	Equazione segmentaria di una retta non passante per l'origine . . . . .	388
C.2.3	Equazione della circonferenza . . . . .	388
C.2.4	Ellisse . . . . .	388
<b>D</b>	<b>Sviluppabilità e sviluppi in serie di Mac-Laurin di alcune funzioni reali.</b>	<b>391</b>
<b>E</b>	<b>Gli spazi vettoriali <math>C^n(I)</math>, <math>D^n(I)</math>, <math>F(I)</math> e <math>C^\infty(I)</math></b>	<b>397</b>
E.1	Operatori lineari tra spazi vettoriali. . . . .	398
E.1.1	Un esempio importante di operatore lineare. . . . .	398
<b>F</b>	<b>Derivata di un determinante.</b>	<b>401</b>
<b>G</b>	<b>Estremi relativi e assoluti.</b>	<b>403</b>
G.1	Procedimento per cercare i punti di estremo relativo per una funzione di due variabili reali. . . . .	403
G.2	Procedimento per cercare i punti di estremo assoluto per una funzione di $k$ variabili. . . . .	410
<b>H</b>	<b>Equazioni differenziali non lineari.</b>	<b>415</b>
H.1	Osservazione preliminare . . . . .	415
H.2	Le equazioni differenziali a variabili separabili. . . . .	417
H.3	L'equazione di Bernoulli . . . . .	421
H.4	Equazioni a secondo membro omogeneo (o equazioni di Man- fredi) . . . . .	426
H.5	Equazioni del tipo $y' = g(ax + by)$ con $a, b$ costanti non nulle di $\mathbb{R}$ . . . . .	429
H.6	Equazioni differenziali di ordine superiore al primo mancanti della $y$ . . . . .	431
H.6.1	Generalizzazione delle considerazioni fatte. . . . .	432
	<b>Bibliografia</b>	<b>433</b>