

La teoria della linea portante di Prandtl e sue modifiche ed estensioni

Raucci Biagio^a

ABSTRACT

Le note riguardano la teoria della linea portante proposta da Ludwig Prandtl. Vengono proposte alcune modifiche ed estensioni, nonché un accenno alla sua implementazione numerica (metodo di Multhopp).

Keywords: *Ala finita, progettazione aerodinamica, teoria di Prandtl, metodo di Multhopp, Valentino Losito, Modello vorticoso*

1. PREMESSA

Il modello vorticoso che è necessario introdurre per simulare le capacità portanti di un profilo alare è costituito da "vortici aderenti", disposti all'interno o sulla superficie del contorno del corpo, i cui assi, infiniti e rettilinei, sono tutti paralleli tra di loro e tutti perpendicolari alla direzione della corrente asintotica. In tal caso la velocità indotta (downwash) da tale sistema di vortici è nulla, come si è detto nella interpretazione della portanza con la legge di Newton e come conclude il "teorema di induzione" di Munk.

2. IPOTESI DI PRANDTL

Di seguito elenchiamo le ipotesi poste alla base della teoria di Prandtl:

- Il fluido è ideale ed il regime di moto è incomprimibile.
- L'ala ha freccia nulla (o anche trascurabile, in pratica minore di 10^0).
- L'allungamento alare è molto grande ($\mathcal{R} \gg 1$) in modo da ritenere valida l'assunzione che il campo di moto, ad ogni stazione y lungo l'apertura alare – con eccezione delle piccole zone estremali, dov'è marcata la tridimensionalità del flusso – sia di tipo bidimensionale. Ciò equivale a dire che le leggi di variazione delle pressioni sul dorso e sul ventre del profilo alla stazione y , hanno lo stesso andamento di quello valutabile in $2 - D$, ma solo – e vedremo tra poco il motivo – ad un angolo d'attacco minore. Ciò è stato verificato sperimentalmente anche nel comportamento degli strati limiti fino allo stallo. Come conseguenza di tale ipotesi è lecito affermare che la velocità indotta dai vortici aderenti di un'ala a freccia nulla e di grande allungamento è nulla in ogni punto del campo.
- La variazione della portanza, ovvero della circolazione, lungo l'apertura di un'ala finita consente di prevedere, per i teoremi di Helmutz, la formazione dei "vortici liberi" che, essendo non anulari né infiniti, debbono necessariamente partire dalla superficie solida dell'ala.
La presenza di vortici liberi dà luogo ad una velocità verticale indotta che fa diminuire ad ogni stazione l'angolo d'attacco con cui viene a lavorare il profilo corrispondente.
- L'ipotesi di bidimensionalità dei campi di moto nei piani longitudinali, i.e. nei piani paralleli al piano $y = 0$, ed il valore nullo della velocità indotta dai vortici aderenti ammettono, per conseguenza, la possibilità di annullare le dimensioni delle corde alari e di ridurre l'ala ad "una linea" che non è un vortice ma un segmento materiale che dev'essere introdotto come base di partenza dei vortici liberi.

Corresponding author. E-mail address: raucci@gmail.com

- L'intensità di un vortice libero alla stazione y' è pari, per i teoremi di Helmholtz, alla variazione di circolazione in quella stazione ($d\Gamma/dy'$). La direzione dei vortici liberi, per il 3° teorema di Helmholtz, dovrebbe coincidere con quella delle linee di corrente che si dipartono dall'ala fino all'infinito a valle, ma Prandtl, con un intuito geniale, ha trascurato, ai fini dell'orientamento dei vortici liberi, il downwash indotto da detti vortici e li ha assunti disposti nella direzione della corrente asintotica. L'effettiva configurazione non planare ed attorcigliata dei vortici liberi dev'essere tenuta in conto quando si vuole calcolare in modo corretto l'induzione fuori dall'ala, come ad esempio sul piano orizzontale, ad alte incidenze.

3. EQUAZIONI DELLA TEORIA DELLA LINEA PORTANTE

L'ipotesi di bidimensionalità dei campi di moto nei piani longitudinali consente di scrivere per il coefficiente di portanza del profilo posto alla stazione y

$$c_l(y) = c_{l_0}(y) + c_{l_\alpha}(y) [\alpha(y) - \alpha_i(y)] \quad (1)$$

nella quale c_{l_0} è il coefficiente di portanza in $2 - D$ ad $\alpha = 0$, c_{l_α} è il gradiente della retta di portanza bidimensionale del profilo, ed α_i è l'angolo d'incidenza indotta dai vortici liberi:

$$\alpha_i(y) = \frac{w(y)}{V_\infty} \quad (2)$$

dove $w(y)$ è la velocità indotta, verticale verso il basso, dai vortici liberi semiinfiniti, che Prandtl ha valutato come metà della velocità indotta da vortici liberi infiniti. Risulta:

$$w(y) = \frac{1}{2} w_\infty(y) = \frac{1}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{d\Gamma}{dy'} \frac{dy'}{y - y'} \quad (3)$$

con $y' \in]-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}[$.
Si ha quindi:

$$\alpha_i(y) = \frac{w(y)}{V_\infty} = \frac{1}{4\pi V_\infty} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{d\Gamma}{dy'} \frac{dy'}{y - y'} \quad (4)$$

Più correttamente si deve porre

$$w(y) = f(\mathcal{R}) \cdot w_\infty(y) \quad (5)$$

con la funzione $f(\mathcal{R})$ data da:

$$f(\mathcal{R}) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{4}\mathcal{R} + 0.067147\mathcal{R}^2 - 0.0062767\mathcal{R}^3 & \mathcal{R} \in [0, 3] \\ \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{\mathcal{R}} (\log(\pi\mathcal{R}) - \frac{7}{8}) & \mathcal{R} \in]3, +\infty[\end{cases}$$

Prandtl ha posto $f(\mathcal{R}) = 1/2$, ma come si vede ciò è vero solo al limite per $\mathcal{R} \rightarrow \infty$. Pertanto l'espressione più accurata della (4) è:

$$\alpha_i(y) = \frac{w(y)}{V_\infty} = \frac{f(\mathcal{R})}{4\pi V_\infty} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{d\Gamma}{dy'} \frac{dy'}{y - y'} \quad (6)$$

L'equazione alla base della teoria della linea portante è dunque:

$$c_l(y) = c_{l_0}(y) + c_{l_\alpha}(y) \left[\alpha(y) - \frac{f(\mathcal{R})}{4\pi V_\infty} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{d\Gamma}{dy'} \frac{dy'}{y - y'} \right] \quad (7)$$

Nella (7) il primo membro è legato all'incognita $\Gamma(y)$ tramite la legge di Kutta-Youkowski:

$$\rho V_\infty \Gamma(y) = l(y) = c(y) c_l(y) \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 \quad (8)$$

da cui

$$\Gamma(y) = c(y) c_l(y) \frac{1}{2} V_\infty \quad (9)$$

4. SOLUZIONI DIRETTE ED INDIRETTE DELL'EQUAZIONE DI PRANDTL — TEORIA DELLA LINEA PORTANTE

Nelle prime applicazioni della teoria di Prandtl della linea portante sono stati utilizzati metodi diretti iterativi di risoluzione della (7). Si assegnava una distribuzione $\Gamma(y)$ di tentativo. Tramite derivatori ed integratori grafici associati ai tecnigrafi da disegno si calcolava la distribuzione degli angoli d'incidenza indotta $\alpha_i(y)$ dalla (4) e quindi la legge di variazione dei $c_l(y)$ dalla (7), (con $f(\mathcal{R}) = 1/2$), ovvero una nuova distribuzione $\Gamma(y)$ tramite la (9) ed il processo veniva reiterato fino alla desiderata convergenza.

Più eleganti ed accurati sono i metodi indiretti, basati, per la risoluzione dell'equazione integrale (7) – con l'incognita C_l che appare al primo membro ma anche sotto il segno d'integrale in termini di $d\Gamma$ al secondo membro –, nell'assumere uno sviluppo in serie di Fourier di soli seni per la funzione incognita. In particolare, posto

$$\gamma(\eta) = \frac{\Gamma(\eta)}{bV_\infty} = \frac{cc_l}{2b} = \sum_1^\infty a_n \sin n\vartheta \quad (10)$$

con la trasformazione della variabile indipendente y :

$$y = \frac{b}{2} \cos \vartheta \rightarrow \eta = \cos \vartheta = \frac{y}{(b/2)}$$

con

$$\eta \in [-1, 1]; \vartheta \in [0, \pi]$$

dal momento che

$$\Gamma(-b/2) = \Gamma(b/2) = 0$$

e sono dunque da escludere il termine costante ed i termini in coseno dello sviluppo in serie di Fourier per la funzione $\gamma(\eta)$, i.e. della circolazione adimensionale.

Dalla (10) si ha per derivazione:

$$d\gamma = \sum_1^\infty n a_n \cos n\vartheta_0 d\vartheta_0 \quad (11)$$

e risulta:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{d\gamma}{\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta} &= \sum_1^\infty n a_n \int_0^\pi \frac{\cos n\vartheta_0}{\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta} d\vartheta_0 = \\ &= \pi \sum_1^\infty n a_n \frac{\sin n\vartheta}{\sin \vartheta} \end{aligned}$$

Pertanto dalla (6) si ottiene:

$$\alpha_i(\vartheta) = f(\mathcal{R}) \sum_1^\infty n a_n \frac{\sin n\vartheta}{\sin \vartheta} \quad (12)$$

Con la (12), la (1), dopo aver modificato primo e secondo membro per $c/2b$, fornisce:

$$\gamma(\vartheta) = \frac{cc_{l0}}{2b} + \frac{cc_{l\alpha}}{2b} \alpha - \frac{cc_{l\alpha}}{2b} f(\mathcal{R}) \sum_1^\infty n a_n \frac{\sin n\vartheta}{\sin \vartheta} \quad (13)$$

ovvero per la (10):

$$\sum_1^{\infty} a_n \sin n\vartheta \left[1 + \frac{cc_{l\alpha}}{2b} f(\mathcal{R}) \frac{n}{\sin \vartheta} \right] = \frac{cc_{l0}}{2b} + \frac{cc_{l\alpha}}{2b} \alpha \quad (14)$$

Se la quantità entro parentesi quadra nella (14) fosse indipendente da ϑ , il che avviene quando

$$\frac{cc_{l\alpha}}{2b} = k \sin \vartheta \quad (15)$$

la (14) fornirebbe gli incogniti coefficienti a_n con la tecnica di Fourier.

Il gradiente della retta di portanza dei profili alari $c_{l\alpha}(y)$, com'è noto, non è molto diverso dal valore teorico 2π ed è comunque poco variabile lungo l'apertura; perciò, tra le infinite possibilità espressa nella (15), è possibile riferirsi, in pratica, la caso di ali con spessore percentuale costante lungo l'apertura ($c_{l\alpha} = \text{cost}(y)$) e di forma in pianta ellittica:

$$c = c_r \sin \vartheta$$

dove c_r è la corda alla radice dell'ala ellittica, i.e. quando nella (15) si assume:

$$k = \frac{c_r c_{l\alpha}}{2b}.$$

Tornando al calcolo dei coefficienti a_n con la tecnica di Fourier moltiplichiamo primo e secondo membro della (14) per $\sin k\vartheta$ ed integriamo tra 0 e π , ricordando che:

$$\int_0^{\pi} \sin k\vartheta \sin n\vartheta d\vartheta = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq n \\ \pi/2 & \text{se } k = n \end{cases} \quad (16)$$

si ricava, con $c_{l0} = \text{cost}$ (i.e. anche la curvatura costante lungo l'apertura):

$$\sum_1^{\infty} a_n (1 + knf(\mathcal{R})) \int_0^{\pi} \sin n\vartheta \sin k\vartheta d\vartheta = \left(\frac{cc_{l0}}{2b} + \frac{cc_{l\alpha}}{2b} \alpha \right) \int_0^{\pi} \sin n\vartheta \sin k\vartheta d\vartheta. \quad (17)$$

Tra gli infiniti integrali che compaiono al primo membro della (17) sono non nulli solo quelli per $k = n$, ma al secondo membro si hanno valori diversi da zero solo nel caso $k = 1$; pertanto dalla (17) si ha:

$$a_1 = \frac{\frac{cc_{l0}}{2b} + \frac{cc_{l\alpha}}{2b} \alpha}{1 + f(\mathcal{R}) \frac{c_r c_{l\alpha}}{2b}} \quad (18)$$

Prandtl pose $c_{l0} = 0$ e $c_{l\alpha} = 2\pi$; essendo la superficie alare dell'ala ellittica $S = \pi(c_r b)/4$ da cui

$$\frac{c_r}{2b} = \frac{2}{\pi \mathcal{R}},$$

la (18) diventa

$$a_1 = \frac{4\alpha}{2 + \mathcal{R}}.$$

Si conclude che l'unica soluzione analitica della teoria della linea portante di Prandtl è corrispondente al caso di carico ellittico lungo l'apertura

$$\gamma(\vartheta) = a_1 \sin \vartheta,$$

essendo nulli tutti gli altri coefficienti a_n dello sviluppo in serie nella (10), e l'ala ellittica ha una distribuzione di carico ellittica.

Per alicon forme in pianta diverse da quella ellittica non è possibile ottenere in forma chiusa una soluzione dell'equazione integro-differenziale (7). In tal caso l'incognita distribuzione di portanza lungo l'apertura, sempre del tipo (2), potrà essere valutata, ma occorrerà riferirsi ad una soluzione numerica dell'equazione (14) per gli incogniti coefficienti a_n . In particolare occorrerà imporre la (14) in un numero finito M di stazioni lungo l'apertura, troncando la serie di Fourier a partire dal termine a_{M+1} . Il problema è così ricondotto alla risoluzione di un sistema di M equazioni lineari algebriche nelle incognite a_n con $n = 1, \dots, M$. Questo procedimento numerico è stato in seguito – a partire dal 1938 – sostituito dal più elegante e conveniente **metodo di Multhopp**.

5. CENNI AL METODO DI MULTHOPP

Il metodo di Multhopp consente di scrivere un'espressione per l'angolo d'incidenza indotta in ogni stazione di un'ala finita direttamente in termini dei valori delle M circolazioni γ_n assunte incognite lungo l'apertura. Multhopp utilizza la seguente tecnica di quadratura di Gauss-Tschebycheff:

$$\int_{-1}^1 f(\eta) d\eta = \frac{\pi}{M+1} \sum_1^M f(\eta_n) \sin \vartheta_n \quad (19)$$

con

$$\eta_n = \cos \vartheta_n, \quad \vartheta_n = \frac{n\pi}{M+1} \quad (n = 1, 2, \dots, M)$$

La scelta della posizione delle stazioni lungo l'apertura è particolarmente felice nel caso di ali finite in cui la circolazione (o portanza) è più fortemente variabile verso le estremità alari; dividendo in parti uguali la semicirconferenza avente per diametro l'apertura alare, con la scelta delle stazioni

$$\vartheta_n = \frac{n\pi}{M+1},$$

queste vengono ad essere più infittite, nella variabile y , proprio verso l'estremità alari. Applicando la (19) alla (4) si ricava, dopo alcuni passaggi che qui si omettono:

$$\alpha_{i\nu} = b_{\nu\nu}\gamma_\nu - \sum_{n=1; n \neq \nu}^M b_{\nu n}\gamma_n \quad (20)$$

Il termine $b_{\nu\nu}\gamma_\nu$ è l'angolo d'incidenza indotta nella stazione ν dal vortice libero posto nella stessa stazione ν dai rimanenti vortici liberi posti nelle altre stazioni ($n \neq \nu$).

I coefficienti di influenza sono dati da:

$$\begin{cases} b_{\nu\nu} = \frac{M+1}{4 \sin \vartheta_n} \\ b_{\nu n} = 0 \\ b_{\nu n} = \frac{1-(-1)^{|n-\nu|}}{M+1} \frac{\cos \vartheta_n}{(\cos \vartheta_n - \cos \vartheta_\nu)^2} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{per } |n-\nu| = 0, 2, 4, 6, \dots \\ \text{per } |n-\nu| = 1, 3, 5, 7, \dots \end{array} \quad (21)$$

La (1), moltiplicando tutti i termini per $c/(2b)$, diventa:

$$\left(\frac{cc_l}{2b}\right)_\nu + \left(\frac{cc_{l_\alpha}}{2b}\right)_\nu \alpha_{i\nu} = \left(\frac{cc_{l_0}}{2b}\right)_\nu + \left(\frac{cc_{l_\alpha}}{2b}\right)_\nu \alpha_\nu \quad (22)$$

ovvero essendo, cfr. eq. (10), $\gamma_\nu = (cc_l/2b)_\nu$,

$$\left(\frac{2b}{cc_{l_\alpha}}\right)_\nu \gamma_\nu + \alpha_{i\nu} = \left(\frac{c_{l_0}}{c_{l_\alpha}}\right)_\nu + \alpha_\nu \quad (23)$$

Si osservi che il rapporto c_{l_0}/c_{l_α} non è altro che l'angolo di portanza nulla, α_{zl} , del profilo, posto alla stazione ν , in campo $2-D$, in valore assoluto.

Sostituendo la (20) nella (23) si perviene al seguente sistema finale di M equazioni lineari algebriche nelle M incognite γ_n :

$$[(2b/cc_{l_\alpha})_\nu + b_{\nu\nu}] \gamma_\nu - \sum_1^M b_{\nu n} \gamma_n = (|\alpha_{zl}|)_\nu + \alpha_\nu$$

che può essere scritta in forma compatta come:

$$\sum_1^M B_{\nu n} \gamma_n = (|\alpha_{zl}|)_\nu + \alpha_\nu \quad (24)$$

dove:

$$B_{\nu n} = \begin{cases} (2b/cc_{l_\alpha})_\nu + b_{\nu\nu} & \text{per } n = \nu \\ -b_{\nu n} & \text{per } n \neq \nu \end{cases} \quad (25)$$

6. COEFFICIENTI AERODINAMICI GLOBALI

6.1. Calcolo del coefficiente di portanza di un'ala finita

Applicando la legge di Kutta-Youkowski si può scrivere di seguito:

$$\begin{aligned} L &= C_L S \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 = \rho V_\infty^2 \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) dy = \\ &= \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 b^2 \int_0^\pi \gamma(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta \end{aligned}$$

da cui segue facilmente

$$C_L = \mathcal{R} \int_0^\pi \gamma(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = \mathcal{R} \int_{-1}^1 \gamma(\eta) d\eta \quad (26)$$

Dalla (26) si possono ricavare le diverse espressioni analitiche e numeriche.

6.2. Espressioni analitiche

Formula generale:

$$C_L = \mathcal{R} \sum_1^\infty a_n \int_0^\pi \sin n\vartheta \sin \vartheta d\vartheta = \mathcal{R} a_1 \frac{\pi}{2} \quad (27)$$

6.2.1. Carico ellittico – ala ellittica

$$C_L = \frac{c_{l0} + c_{l\alpha} \alpha}{1 + f(\mathcal{R}) \frac{2}{\pi \mathcal{R}} c_{l\alpha}} \quad (28)$$

Nel caso di ala con distribuzione ellittica del carico o di ala ellittica con profili infinitamente sottili e non ricurvi la (28) fornisce:

$$C_L = 2\pi\alpha \frac{\mathcal{R}}{4f(\mathcal{R}) + \mathcal{R}} \quad (29)$$

che, seguendo Prandtl, con $f(\mathcal{R}) = \frac{1}{2}$, diventa:

$$C_L = 2\pi\alpha \frac{\mathcal{R}}{2 + \mathcal{R}} \quad (30)$$

Poiché Prandtl ha sottostimato il valore degli angoli di incidenza indotta e quindi sovrastimato la capacità portante delle ali, tanto più quanto più basso è l'allungamento alare, nel passato per molti anni, si è apportato una classica correzione empirica alla (28) scrivendo in luogo di $c_{l\alpha}$ il fattore $c_{l\alpha}/E$ dove E è il **fattore di Jones**, rapporto tra il semiperimetro dell'ala e l'apertura alare ($E > 1$), il che equivale a correggere la (30) come:

$$C_L = 2\pi\alpha \frac{\mathcal{R}}{2 + E\mathcal{R}} \quad (31)$$

Risulta più rigoroso e corretto l'impiego della (29) in luogo della (31). Inoltre la correzione (5), con l'espressione analitica della $f(\mathcal{R})$, estende la validità della teoria della linea portante anche ad ali di basso allungamento, purché privi di freccia.

6.3. Espressione numerica

Applicando la (19) al secondo integrale della (26) segue facilmente:

$$C_L = \frac{\pi \mathcal{R}}{M+1} \sum_1^M \gamma_n \sin \vartheta_n \quad (32)$$

6.4. Calcolo degli angoli d'incidenza indotta

6.4.1. Espressioni analitiche

Nel caso di impegno del metodo indiretto con i coefficienti a_n vale la (12), che si riscrive qui per comodità:

$$\alpha_i(\vartheta) = f(\mathcal{R}) \sum_1^{\infty} n a_n \frac{\sin n\vartheta}{\sin \vartheta}. \quad (33)$$

Con distribuzioni ellittiche del carico la (33), tenendo conto della (27), fornisce

$$\alpha_i = f(\mathcal{R}) a_1 = \frac{2C_L}{\pi\mathcal{R}} f(\mathcal{R}) \quad (34)$$

che diventa, con $f(\mathcal{R}) = 1/2$

$$\alpha_i = \frac{a_1}{2} = \frac{C_L}{\pi\mathcal{R}} \quad (35)$$

6.4.2. Espressione numerica

Utilizzando il metodo di Multhopp vale per l'angolo d'incidenza indotta la relazione (20), con i coefficienti d'influenza indicati nella (21):

$$\alpha_{i\nu} = b_{\nu\nu}\gamma_\nu - \sum_1^M b_{\nu n}\gamma_n \quad (36)$$

6.5. Calcolo della resistenza indotta

Uguagliando l'espressione convenzionale e quella fisica della resistenza indotta, possiamo scrivere:

$$D_i = C_{D_i} S \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 = \rho V_\infty^2 \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) \alpha_i(y) dy \quad (37)$$

ed effettuando l'usuale cambio di variabili segue dalla (37)

$$C_{D_i} = \mathcal{R} \int_0^\pi \gamma(\vartheta) \alpha_i(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = \mathcal{R} \int_{-1}^1 \gamma(\eta) \alpha_i(\eta) d\eta \quad (38)$$

6.5.1. Espressioni analitiche

La (38), con le relazioni (10) e (12), consente di ottenere:

$$C_{D_i} = f(\mathcal{R}) \mathcal{R} \sum_1^{\infty} n a_n^2 \int_0^\pi \sin^2 n\vartheta d\vartheta = f(\mathcal{R}) \mathcal{R} \frac{\pi}{2} \sum_1^{\infty} n a_n^2 \quad (39)$$

Con la (39) si vede facilmente che quando il carico è ellittico ($a_1 \neq 0$ e $a_2, a_3, \dots, a_n, \dots = 0$) si ottiene il minimo della resistenza indotta.

In tal caso si ricava dalla (39)

$$C_{D_i} = \mathcal{R} \frac{\pi}{2} f(\mathcal{R}) a_1^2 = 2f(\mathcal{R}) \frac{C_L^2}{\pi\mathcal{R}} \quad (40)$$

che diventa con $f(\mathcal{R}) = 1/2$:

$$C_{D_i} = \frac{C_L^2}{\pi\mathcal{R}} \quad (41)$$

Per ali a distribuzione di portanza non ellittica vale la relazione:

$$C_{D_i} = \frac{kC_L^2}{\pi\mathcal{R}} \quad (42)$$

con $k > 1$, ma invero la (42), stante la (40), andrebbe scritta anche per ali con distribuzione ellittica del carico. Rimane comunque valido il risultato:

$$k_{\text{carico non ellittico}} > k_{\text{carico ellittico}}$$

6.5.2. Espressione numerica

Con il metodo di Multhopp il coefficiente di resistenza indotta si calcola numericamente con la relazione:

$$C_{D_i} = \frac{\pi\mathcal{R}}{M+1} \sum_{\nu=1}^M \gamma_{\nu} \alpha_{i\nu} \sin \vartheta_{\nu} = \frac{\pi\mathcal{R}}{M+1} \sum_{\nu=1}^M \gamma_{\nu} \left(b_{\nu\nu} \gamma_{\nu} - \sum_{n=1, n \neq \nu}^M b_{\nu n} \gamma_n \right) \sin \vartheta_{\nu}$$

Una volta noti i valori numerici di C_{D_i} e di C_L si ricava per l'ala in esame il coefficiente k che compare nella (42) come:

$$k = \frac{\pi\mathcal{R}}{C_L^2} C_{D_i}$$

Ancora oggi la teoria della linea portante ed il metodo di Multhopp sono utili nella progettazione aerodinamica. In particolare tutte le teorie alari più sofisticate (quelle, ad esempio, per l'analisi di ali a freccia e di forma in pianta arbitraria) presentano difficoltà ed approssimazioni nella valutazione della resistenza indotta, dal momento che non appare più come variabile diretta dell'angolo d'incidenza indotta ad ogni stazione lungo l'apertura alare.